

УДК 621.3.089

**О. В. Полярус**, д-р техн. наук,  
**Є. О. Поляков**

### ОЦІНКА ДЖЕРЕЛ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА ПОХИБОК ПРИ НАБЛИЖЕНОМУ РОЗВ'ЯЗАННІ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ВИМІРЮВАНЬ

*Визначено вимоги до точності оберненої задачі вимірювань. Розглянуто джерела похибок і невизначеності і оцінено їх вплив на результат відновлення вхідного сигналу датчика. Розраховано випадкові і систематичні похибки розв'язання оберненої задачі вимірювань.*

**Ключові слова:** точність оберненої задачі, відновлення вхідних сигналів, джерела невизначеності, генетичний алгоритм.

**A. Poliarus**, PhD.,  
**E. Poliakov**

### ESTIMATION OF UNCERTAINTY SOURCES AND ERRORS IN APPROXIMATE SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF MEASUREMENT

*The requirements for accuracy of the measurements inverse problem are presented in this article. Errors and uncertainty sources are considered and their influence on the result of the sensors input signal reconstruction are estimated. Random and systematic errors of the inverse problem of measurements solving are calculated.*

**Keywords:** accuracy of the inverse problem, reconstruction of input signals, sources of uncertainty, genetic algorithm.

**О. В. Полярус**, д-р техн. наук,  
**Е. А. Поляков**

### ОЦЕНКА ИСТОЧНИКОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИЗМЕРЕНИЙ

*В публикации определены требования к точности обратной задачи измерений. Рассмотрены источники погрешностей и неопределенности и оценено их влияние на результат восстановления входного сигнала датчика. Рассчитано случайные и систематические погрешности решения обратной задачи измерений.*

**Ключевые слова:** точность обратной задачи, восстановление входных сигналов, источники неопределенности, генетический алгоритм.

**Вступ.** На багатьох технічних об'єктах для виконання різноманітних завдань встановлюються датчики контактного типу, значна частина яких є інерційними. Інерційність обумовлена наявністю в датчиках енергонакопичувальних елементів (пружин, конденсаторів, індуктивностей тощо).

Реалізацію випадкової вхідної дії датчика  $x(t)$  можна описати деякою математичною формулою. Внаслідок інерційності датчика реалізація вихідного сигналу  $y(t)$  описується іншим виразом, який найчастіше не збігається з  $x(t)$ . Отже, при перетворенні вхідної дії у вихідний сигнал виникають спотворення, які змінюють інформацію про характер впливу на датчик.

Якщо б були точно відомі характеристики датчика, наприклад, імпульсна  $h(t)$  або частотна характеристика, то неважко було б розрахувати математичну функцію, що описує вхідну дію датчика. В подальшому для

спрощення термінології будемо називати цю функцію вхідним сигналом. Даний тип задач називають оберненими задачами вимірювань. Істотний внесок у їх розв'язок зробили відомі вчені Тихонов А. М., Морозов В. О., Гончарський О. В., Петров Б. М., Солопченко Г. М., Худак Ю. Й., Михлін С. Г., Лаврентьев М. М., Иванов В. К., Верлань А. Ф. [1] та інші, сформовані наукові школи за даним напрямом в нашій країні та за кордоном.

Оскільки вихідний сигнал  $y(t)$  датчика зв'язаний з вхідним  $x(t)$  рівнянням згортки

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad (1)$$

то шляхом розв'язання інтегрального рівняння (1) можна отримати точний вид реалізації випадкового процесу  $x(t)$  на вході датчика [1]. На жаль, існуючі методи, що описані в літературі, достатньо ефективні при відомій імпульсній характеристиці датчика  $h(t)$ , високих вимогах до точності вимірювання  $y(t)$  та при відсутності зовнішніх впли-

© Полярус О.В., Поляков Є. О., 2012

вів на датчик (шумів механічного характеру, електромагнітних впливів тощо).

В принципі, імпульсну характеристику датчика можна оцінити при експериментальних дослідженнях, але при встановленні датчика на конкретний об'єкт вона може відрізнятися від вимірної внаслідок особливості закріплення на об'єкті та впливу останнього на датчик. Більш того, при встановленні однотипних інерційних датчиків на різні частини одного і того ж об'єкта можливі відмінності в імпульсних характеристиках кожного датчика. Авторами були визначені умови, при яких доречно застосовувати класичний метод строгого розв'язання інтегрального рівняння типу (1) для отримання рішення оберненої задачі вимірювань. Вони визначають вимоги до точності вимірювань вихідного сигналу датчика, виду його імпульсної характеристики та рівня завад і шумів. При невідомій імпульсній характеристиці датчика та високому рівні завад розв'язання оберненої задачі вимірювань існуючими методами стає неможливим. В інших випадках при не дуже сильних завадах авторами запропоновано [2] використовувати наближений метод розв'язання оберненої задачі вимірювань, який не вимагає точних знань імпульсної характеристики датчика.

Сутність наближеного методу зводиться до мінімізації функціонала

$$J(a_1, \dots, a_k, \dots) = \int_{-\infty}^{\infty} [y(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sum_{k=1}^m a_k \psi_k(t - \tau) d\tau - n(t)]^2 dt, \quad (2)$$

тобто відстані у функціональному просторі в метриці  $L_2$  між вимірним сигналом  $y(t)$  та цим же сигналом, який представляється через інтеграл згортки від реалізації вхідного сигналу, причому останній апроксимується рядом Карунена-Лоева [3]

$$x(t) \approx \sum_{k=1}^m a_k \psi_k(t), \quad (3)$$

де  $\{\psi_k(t)\}$  – ортонормальний базис у просторі з квадратичною метрикою,  $a_k$  – випадкові некорельовані коефіцієнти,  $m$  – кількість членів ряду.

Перевагою запропонованого методу є істотне зниження вимог до апріорних знань про імпульсну характеристику системи датчик – об'єкт. Для виключення можливості отримання «фантомних» рішень при визначенні  $x(t)$  метод вимагає лише інформації про загальний вид імпульсної характеристики  $h(t)$ . В процесі мінімізації функціонала одночасно з визначенням вхідного сигналу розраховується також конкретна імпульсна характеристика датчика.

Одним з завдань метрологічного забезпечення є визначення вимог щодо точності вимірювань. При розв'язанні оберненої задачі проводиться вимірювання лише вихідного сигналу датчика. Концепція невизначеності [4] припускає, що результат вимірювань  $y(t)$  є відомим. У прямій задачі вимірювань невизначеність знань про вимірювану величину обумовлена властивостями самого вимірювача. Зі зростанням точності вимірювача зазначена невизначеність зменшується. При розв'язанні оберненої задачі невизначеність вимірювань може істотно зростати.

Оцінювання похибок і обчислення невизначеності вимірювань здійснюється за три таких етапи [4]:

аналіз рівняння вимірювань;

виявлення всіх джерел похибок (невизначеності) вимірювань та їхнє кількісне оцінювання;

введення поправок на систематичні похибки (ефекти), які можна вилучити.

### 1. Рівняння вимірювань

Рівняння вимірювань вхідного сигналу представимо у вигляді ряду Карунена-Лоева (3). Коефіцієнти ряду (3) при мінімальній похибці

$$\varepsilon_x = x(t) - \sum_{k=1}^m a_k \psi_k(t) \quad (4)$$

визначаються з умови

$$a_k = \int_0^T x(t) \psi_k(t) dt, \quad (5)$$

де  $T$  – інтервал спостереження.

Отже, при відомому сигналі  $x(t)$  завжди можна визначити «точні» значення коефіцієнтів ряду  $a_k$ . Якщо ж сигнал  $x(t)$  є випадковим, то коефіцієнти також є випадковими і обчислюються по реалізації випадкового

процесу на вході датчика. Статистичні властивості коефіцієнтів  $a_k$  залежать від вибору базису  $\{\psi_k(t)\}$ .

Згідно з [3] вибір базису здійснюється при максимізації суми квадратичних функціоналів

$$\sum_{i=0}^n \int_0^T \int_0^T k_{xx}(t, \tau) \psi_i(t) \psi_i(\tau) dt d\tau \Rightarrow \max, \quad (6)$$

де  $k_{xx}$  – автокореляційна функція вхідного процесу з скінченним середнім квадратом. Сума отримується з умови мінімуму квадрата норми похибки  $\varepsilon_x$  (формула (4)).

Вираз (4) може представлятись через інтегральний оператор  $A_x$ , тобто

$$\sum_{i=1}^n (A_x \psi_i(t), \psi_i(t)), \quad (7)$$

де  $(A_x \psi_i(t), \psi_i(t))$  – скалярний добуток інтегрального оператора від функції  $\psi_i(t)$  і самої функції  $\psi_i(t)$ , а сам інтегральний оператор має вигляд [3]

$$A_x \psi(t) = \sum_0^T k_{xx}(t, \tau) \psi(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Максимум (4) досягається при найбільших власних значеннях  $\lambda_i$  оператора  $A_x$ , який розкладається через власні функції  $\varphi_i(t)$  або

$$\int_0^T k_{xx}(t, \tau) \varphi_i(\tau) d\tau = \lambda_i \varphi_i(t). \quad (9)$$

В такому випадку середній квадрат норми похибки є сума інших власних значень, які не ввійшли в формулу (9). Зі збільшенням часу спостереження  $T$  власні значення зростають і потрібно збільшувати кількість членів ряду (3) для забезпечення необхідної точності визначення  $x(t)$ .

Формули (3) та (5) легко застосовувати, коли вхідний сигнал повністю відомий, наприклад, при математичному моделюванні. Назвемо коефіцієнти, що розраховуються в (5), теоретичними і позначимо  $a_k = a_k^T$ .

Реально вхідний сигнал є невідомим і коефіцієнти ряду (3) визначаються запропонованим авторами наближеним методом при мінімізації функціонала (2).

Співвідношення (2) та (3) є рівняннями вимірювання.

## 2. Джерела невизначеності

Існує багато причин, що впливають на якість розв'язання оберненої задачі вимірювань. Оцінимо вплив причин, які визначають точність розв'язання оберненої задачі вимірювань:

- а) неточність засобів вимірювання вихідного сигналу датчика  $y(t)$ ;
  - б) вплив особливостей і якості кріплення датчиків на технічний об'єкт;
  - в) розкид характеристик датчиків одного типу;
  - г) просторова та часова нестабільність роботи технічного об'єкта;
  - д) ефекти взаємодії технічного об'єкта з датчиками та засобами вимірювання;
  - е) неточність використаних довідкових даних про імпульсну характеристику датчика;
  - є) шуми та вібрації машин, на яких встановлюються датчики;
  - ж) нераціональність вибраної системи ортогональних функцій  $\psi(t)$ ;
  - з) наявність верхньої межі числа членів ряду (1), тобто числа  $m$ ;
  - и) тривалість інтервалу спостереження вхідної дії  $T$ ;
  - і) наближення при роботі алгоритму випадкового пошуку (генетичного алгоритму), який іноді при неякісному настроюванні цього алгоритму може знаходити не глобальний, а локальний мінімум функціонала (2).
- Для оцінки складових невизначеності розраховувалось середньоквадратичне відхилення динамічної похибки, що має гаусівський розподіл. Результат можна одночасно вважати значенням похибки перерахунку і невизначеності для даного параметра. Окрім похибки оцінювався коефіцієнт кореляції  $K$  між вхідним і відновленим сигналами, що пояснюється тим, що перерахований на вхід датчика сигнал з високою точністю може мати невелику схожість з істинним і навпаки. Тому необхідно оцінювати ці параметри одночасно для отримання повнішої інформації, що описує якість відновлення вхідного сигналу датчика.

Під впливом умов, в яких працює датчик, і зміні його характеристик з часом, як зазначалось, можуть з'являтися похибки вихідного сигналу  $y(t)$ , що не спричинені характеристиками випадкового процесу, який потрапляє на його вхід (причина а). Дані похибки знижують точність роботи системи, тому їх необхідно враховувати при визначенні меж застосування методу.

На рис. 1 зображено залежність відносної похибки перерахунку і коефіцієнта кореляції між вхідним і перерахованим на вхід сигналами від величини відносної випадкової похибки вихідного сигналу відповідно. Якісним відновленням будемо вважати відновлення сигналу з похибкою меншою 10 % і кореляцією більшою 0,9.

Отже, для відновлення вхідного сигналу необхідно, щоб відносна випадкова похибка вимірювання вихідного сигналу не перевищувала приблизно 20 % (шуми відфільтровуються методом).

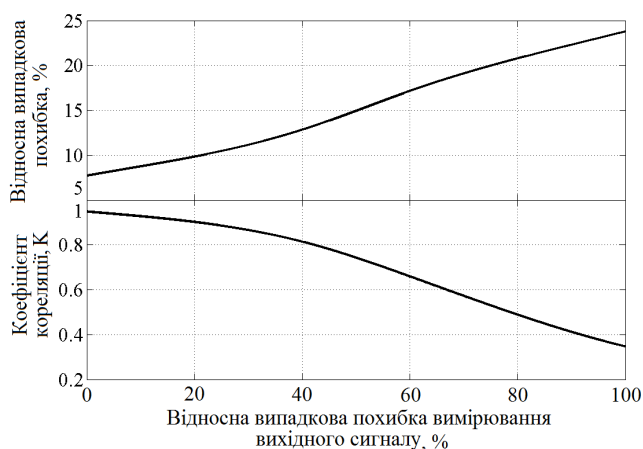


Рис. 1. Залежність величини відносної випадкової похибки перерахунку і коефіцієнта кореляції  $K$  від величини відносної випадкової похибки вимірювання вихідного сигналу

Причини (б), (в), (г), (д), (е) віднесемо до задачі вибору раціональної імпульсної характеристики датчика  $h(t)$ . Навіть якщо імпульсна характеристика датчика вимірюється з високою точністю, в системі датчик – елемент технічного об'єкта вона буде вже іншою внаслідок зазначених вище причин. Отже, один і той же тип датчика в різних місцях розміщення на технічному об'єкті буде

мати свою імпульсну характеристику. В формулі (2) її можна також представити у вигляді суми членів ряду, але значне збільшення кількості невідомих коефіцієнтів ряду неминуче приведе до істотного зниження точності визначення  $h(\tau)$  і навіть до появи «фантомних» рішень при мінімізації функціонала (2). Авторами запропоновано представлення імпульсної характеристики як функції загального вигляду з дуже малою кількістю невідомих коефіцієнтів (найчастіше двох). Цю функцію можна визначити експериментально для окремого відділеного від об'єкта вимірювання датчика або на основі його математичного моделювання. При встановленні датчика на технічний об'єкт імпульсна характеристика буде змінюватись, але її загальний вигляд найчастіше зберігається. Тому для кожного окремого датчика при розв'язанні задачі (2) визначається не більше двох-трьох коефіцієнтів, які при описі імпульсної характеристики раніше були невідомими.

Результати розрахунку вказують на складну залежність точності відновлення вхідного сигналу датчика від точності представлення імпульсної характеристики. Іноді навіть невеликі неточності визначення форми імпульсної характеристики можуть призводити до значних похибок перерахунку. Через складну залежність важко провести узагальнення отриманих результатів. Даний розрахунок необхідно приводити для конкретного випадку.

Причина (є), тобто шуми та вібрації технічного об'єкта враховуються шляхом введення в функціонал (2) білого шуму  $n(t)$  (рис. 2).

З рис. 2 можна зробити висновок про те, що при відношенні сигнал-шум більше двох вплив даної складової можна вважати незначним.

При визначенні найбільших складових спектру інтегрального оператора (6), тобто найбільших власних значень  $\lambda_i$  причина (ж) усувається автоматично. Для вибраних при математичному моделюванні вхідних сигналів  $x(t)$  виявилось, що раціональними є гармонічні функції  $\psi_i(t)$ .

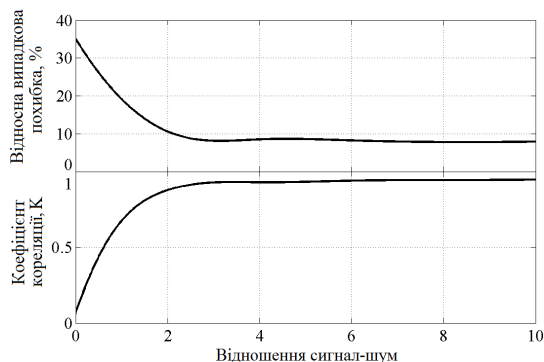


Рис. 2. Залежність величини відносної випадкової похибки перерахунку і коефіцієнта кореляції  $K$  від відношення сигнал-шум вхідного сигналу

На рис. 3 наведено залежність коефіцієнта кореляції між реальною вхідною дією і перерахованим на вхід датчика сигналом від кількості коефіцієнтів ряду, якими представлено вхідну дію (причина (3)).

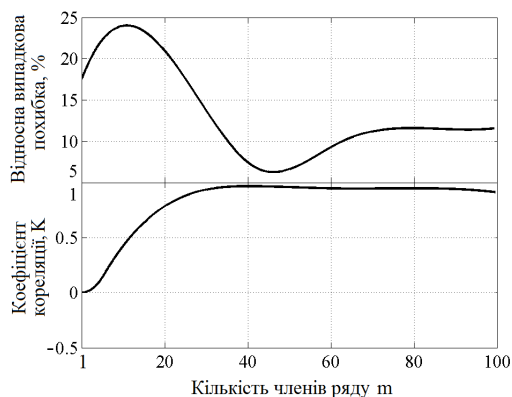


Рис. 3. Залежність величини відносної випадкової похибки перерахунку і коефіцієнта кореляції  $K$  від кількості членів ряду (3), яким представлено вхідний сигнал

Відповідно до пункту (и) побудовано залежність точності відновлення вхідного сигналу датчика від тривалості інтервалу спостережень  $T$  (рис. 4).

З рисунку можна зробити висновок про те, що збільшення часу спостережень після досягнення певної тривалості не приводить до істотного зниження точності відновлення, проте необхідно зважати на значне збільшення часу перерахунку, що супроводжує збільшення часу спостереження. Графік для коефіцієнту кореляції  $K$  в даному випадку не приведено через його незначну зміну зі збільшенням даного параметру ( $K \approx 0.94$ ).



Рис. 4. Залежність величини відносної випадкової похибки перерахунку від тривалості інтервалу спостереження вхідної дії

Для оцінки впливу настроювання генетичного алгоритму на точність відновлення (і) було побудовано залежність похибки перерахунку від величини розміру популяції і кількості генерацій, що мають значний вплив на результат відновлення (рис. 5).

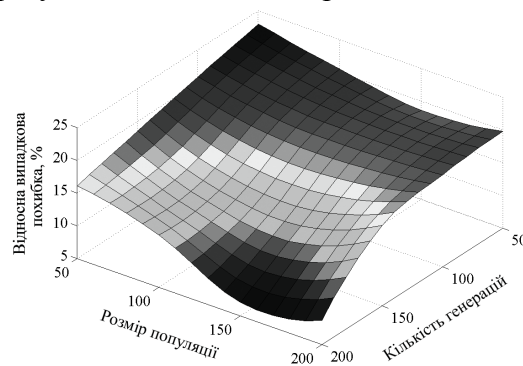


Рис. 5. Залежність величини відносної випадкової похибки перерахунку від величини розміру популяції і кількості генерацій генетичного алгоритму

Збільшення даних констант приводить до зменшення похибки перерахунку, проте, як і у випадку (и), значно впливає на час розрахунку. Взагалі, якщо нема інших чинників, що впливають на точність відновлення, і гарному настроюванні генетичний алгоритм завжди є причиною похибок через наближене рішення. Дану похибку можна вважати методичною і вона становить приблизно 5%.

### 3. Похибки при розв'язанні оберненої задачі вимірювань

Для визначення середньоквадратичного відхилення сумарної невиключеної систематичної складової похибки результату вимірювань  $\sigma_x^c$  скористаємось методикою, що викладена в [4]. Оскільки вхідний сигнал (3) є функцією лише некорельованих випадкових коефіцієнтів, то для оцінки  $\sigma_x^c$  виберемо формулу

$$\sigma_x^c = \sqrt{\sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial x}{\partial a_k} \right)^2} U^2(a_k), \quad (10)$$

де  $\sigma_x^c$  однозначно є сумарною стандартною невизначеністю  $U_c(x)$ , а  $U(a_k)$  – невизначеність коефіцієнта  $a_k$ . Остання визначається як різниця між теоретичним коефіцієнтом  $a_k^T$  та таким же коефіцієнтом, що отриманий при мінімізації функціоналу (2), тобто

$$U(a_k) = a_k^T - a_k. \quad (11)$$

З формули (3) похідні

$$\frac{\partial x(t)}{\partial a_k} = \psi_k(t). \quad (12)$$

Підставивши  $U(a_k)$  і похідні з (11) і (12) в (10), одержуємо

$$U_c(x, t) = \sigma_x^c = \sqrt{\sum_{k=1}^m \psi_k^2(t) \cdot (a_k^T - a_k)^2}. \quad (13)$$

В результаті розрахунку встановлено, що розмір  $U_c(x, t)$  не перевищує для даного випадку 10 %.

**Висновок.** В статті визначено перелік джерел, що впливають на точність відновлення вхідного сигналу датчика, та проведено їх порівняльний аналіз. Представлений метод розв'язання оберненої задачі вимірювань, який на відміну від існуючих методів дозволяє отримати задовільне рішення задачі з урахуванням похибок вимірювання вихідного сигналу та при наявності шумів. Навіть за наявності відносних похибок вимірювання вихідного сигналу датчика 10...20 % запропонований метод забезпечує якісне відновлення вхідного сигналу при умові, що відношення сигнал/завада на вході і виході датчика є високим (не менше 2). При цьому висувається вимога про необхідність знання загального виду імпульсної характеристики датчика. Обґрунтовані вимоги щодо інтервалу спостереження вхідного сигналу та параметрів генетичного алгоритму. Систематична складова похибки результату вимірювань  $\sigma_x^c$  склала приблизно 10 %, а методична похибка, спричинена особливостями роботи генетичного алгоритму, приблизно 5 %.

#### Список використаної літератури

1. Солопченко Г. Н. Обратные задачи в измерительных процедурах / Г. Н. Солопченко // Измерение, контроль, автоматизация. – 1983. – № 2 (46) – С. 32–46.
2. Полярус О. В. Метод відновлення сигналу на вході датчика / О. В. Полярус, Є. О. Поляков // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ «ХПИ», 2011. – № 57. – С. 142–147.
3. Френкс Л. Теория сигналов / Л. Френкс. – М.: Сов. радио, 1974. – 344с.
4. РМГ 43-2001. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений». – Введ. 2003-07-01. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – 20 с.

Отримано 25.06.2012

#### References

1. Solopchenko G. N. Inverse Problems in the measurement procedures / G. N. Solopchenko // Measurement, control, automatization. – 1983 – № 2 (46). – P. 32–46 [in Russian].
2. Poliarus A. V. Sensors input signal reconstruction method / A. V. Poliarus, E. A. Poliakov // Bulletin of NTU «KhPI». – Kharkiv: NTU «KhPI», 2011. – № 57. – P. 142–147 [in Ukrainian].
3. Franks L. E. Signal theory / L. E Franks. – Moscow: Sov.radio, 1974. – 344 p. [in Russian].
4. RIS 43-2001. The use of "Guide to the expression of measurement uncertainty". – Introd. 2003-07-01. – Moscow: Standards publishing, 2002. – 20 p. [in Russian].



Полярус  
Олександр Васильович,  
д-р техн. наук, проф., зав.  
каф. МБЖД ХНАДУ,  
polyarus.kharkov@rambler.ru



Поляков  
Євген Олександрович,  
асистент каф. МБЖД  
ХНАДУ,  
Eug\_P@mail.ru