

УДК 621.313.333

*В порядке обсуждения*

**А. В. Китаев**, канд. техн. наук,  
**В. Л. Агбомассу, В. И. Глухова**

### СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

*Установлено, что для электрических двигателей постоянного тока могут быть составлены схемы замещения, аналогичные схемам замещения асинхронного двигателя. Тем самым достигнута унификация их исследования в соответствии с системным подходом и принципом преемственности. Обеспечена оперативность и простота вывода аналитических соотношений основных характеристик с записью в компактном виде.*

**Ключевые слова:** электрические машины, электрические двигатели, статор, ротор, обмотка возбуждения, сопротивление, коллектор, независимое, параллельное и смешанное возбуждение, постоянный ток, схема включения, схема замещения, моментные, механические, скоростные и рабочие характеристики

**A. V. Kitayev**, PhD.,  
**V. L. Agbomassou, V. I. Glukhova**

### DIRECT-CURRENT ELECTRIC MOTORS EQUIVALENT SCHEMES

*It was determined that DC motors equivalent schemes are electrical machines are similar to induction motors one's. Thereby unification of their research according to the systematic principles and continuity is reached. Efficiency and simplicity of a derivation of analytical ratios of the main characteristics with the compact writing is provided.*

**Keywords:** electric machines, electric engines, stator, rotor, excitation winding, resistance, collector, independent, parallel and combined excitation, direct current, chart of including, chart of substitution, moments, mechanical speed and working descriptions

**О. В. Китаев**, канд. техн. наук,  
**В. Л. Агбомасу, В. И. Глухова**

### СХЕМИ ЗАСТУПНІ ЕЛЕКТРИЧНИХ ДВИГУНІВ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

*Встановлено, що для електричних двигунів постійного струму можуть бути складені заступні схеми, аналогічні схемам асинхронного двигуна. Тим самим досягнуто уніфікація їх дослідження відповідно до принципів системності і спадкоємності. Забезпечено оперативність і простоту виведення аналітичних співвідношень основних характеристик із записом в компактному вигляді.*

**Ключові слова:** електричні машини, електричні двигуни, статор, ротор, обмотка збудження, опір, колектор, незалежне, паралельне і змішане збудження, постійний струм, схема включення, схема заступна, моментні, механічні, швидкісні і робочі характеристики

Согласно канонам дидактики изложение материала каждой изучаемой дисциплины должно строиться на основе соблюдения принципов системности и преемственности. Аналогичные требования постоянно звучат и в директивных документах Министерства образования. Если под таким ракурсом рассмотрим курс «Электрические машины» (ЭМ), то в итоге будут установлены разные точки зрения, например: материал, построен строго, четко и удовлетворяет всем предъявленным требованиям:

электрические машины столь разнотипные устройства, что разговор о какой-либо системности и унификации беспредметен;

© Китаев А.В, Агбомассу Л.В.,  
Глухова В.И, 2013

курс объемов, сложен и по целому ряду разделов требует усилий по совершенствованию логической последовательности изложения материала.

Если согласиться с последним мнением, то разговор о схемах замещения электрических двигателей постоянного тока приобретает значимость, интерес, остроту и актуальность. Дело в том, что такие схемы известны, но лишь для асинхронного двигателя (рис. 1), причем они преподносятся как удачный расчетно-методический прием, среди основных достоинств которого – возможность представления механической мощности на валу в виде электрического эквивалента. Для других типов электрических машин вопреки логическому и здравому смыслу таких схем

нет, что следует из анализа отечественной и зарубежной литературы.

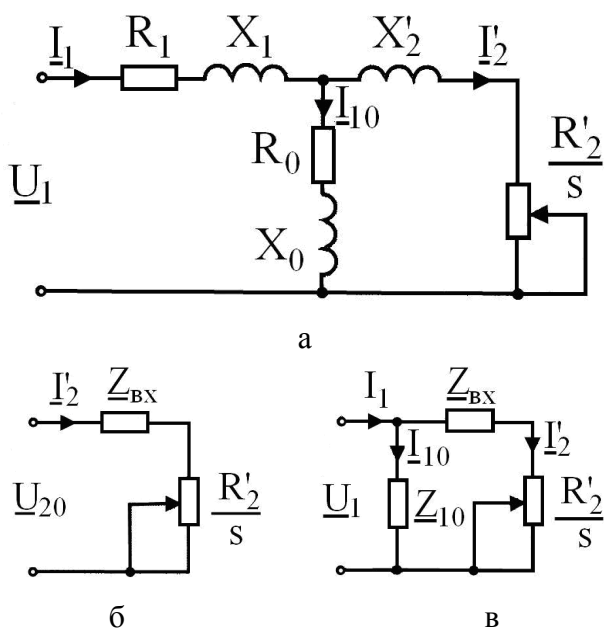


Рис. 1. Схемы замещения АД

Специалисты по электрическим машинам объясняют этот факт тем, что поведение, например, двигателей постоянного тока (ДПТ) удаётся изучать без разработки схем замещения. Поэтому их поиск означает усложнение решения задачи и, следовательно, бесполезен.

**Цель работы** – показать, что в соответствии с принципами системности и преемственности аналогичные схемы могут быть разработаны для ДПТ, причем по своим возможностям они не будут уступать схеме замещения асинхронного двигателя (АД) и иметь тот же самый электрический эквивалент механической мощности на валу. Полезность же их состоит в том, что на этапе начального обучения они существенно облегчают анализ поведения ДПТ и делают его наглядным.

Начнем с описания поведения ДПТ, например, параллельного возбуждения. Обычно здесь приводят схему, изображенную на рис. 2, а. Она является электрической принципиальной схемой и к разряду схем замещения с электрическим эквивалентом механической мощности на валу отнесена быть не может. Однако, используя ее, можно составить уравнение баланса напряжений для якорной цепи:

$$U = I_{я} R_{я} + E_{я}, \quad (1)$$

где  $U$  – напряжение источника питания;  $I_{я}, R_{я}, E_{я}$  – соответственно ток, сопротивление и ЭДС якорной цепи.

Уравнение (1) после несложных преобразований можно переписать в виде

$$U = I_{я} (R_{я} + R_{я} \frac{1-s_{\Phi}}{s_{\Phi}}) = I_{я} \frac{R_{я}}{s_{\Phi}}, \quad (2)$$

где  $s_{\Phi} = \frac{n_o - n}{n_o}$  совпадает с определением

скольжения  $s$  в асинхронных машинах и потому может быть названо формальным, или фиктивным скольжением;  $n_o$  – число оборотов ротора в минуту при идеальном холостом ходе.

На основании выражения (2) могут быть составлены схемы замещения ДПТ (рис. 2, б, в), по существу сходные со схемами замещения АД и двухполюсника. Следует подчеркнуть, что диапазон изменения  $s_{\Phi}$  для ДПТ такой же, как и для скольжения  $s$  в АД, т.е. лежит в пределах от нуля (холостой ход) до 1 (режим пуска, где  $n = 0$ ). Полная аналогия сохраняется также при сопоставлении выражений

$$R'_{2} \cdot \frac{1-s}{s}; \quad \frac{R'_{2}}{s} \text{ и } R_{я} \cdot \frac{1-s_{\Phi}}{s_{\Phi}}; \quad \frac{R_{я}}{s_{\Phi}},$$

поскольку каждое из них выступает как эквивалент либо механической мощности на валу, либо электромагнитной мощности.

Схемы замещения ДПТ параллельного возбуждения и ДПТ независимого возбуждения, аналогичны, поскольку, если параметры и показатели обмотки возбуждения рассчитаны на напряжение, отличное от номинального напряжения якорной цепи  $U_{НОМ}$ , то, используя операцию приведения, их можно свести к  $U_{НОМ}$ .

Обеспеченная выше идентичность схем замещения АД и ДПТ независимого и параллельного возбуждения открывает возможность унификации описания их характеристик.

Поэтому в число характеристик ДПТ наряду с известными войдут и характеристики, которые принято считать относящимися только к АД:

– моментная, или зависимость  $M = f(s_{\Phi})$ ;

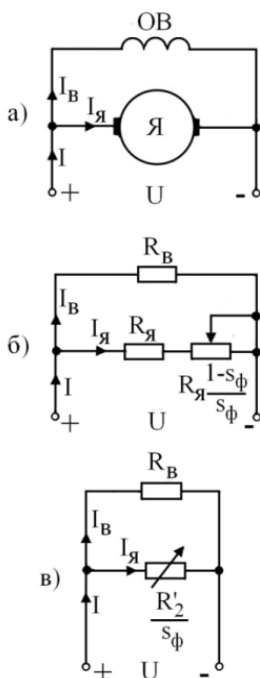


Рис. 2. Принципиальная электрическая схема и схемы замещения ДПТ

- механическая, или  $n = f(M)$ ;
- скоростная, или  $n = f(I_Я)$ ;
- семейство рабочих характеристик, или зависимостей  $s_Ф, n, M, I, P_1, \eta = f(P_2)$ .

Рассмотрим характеристики подробнее.

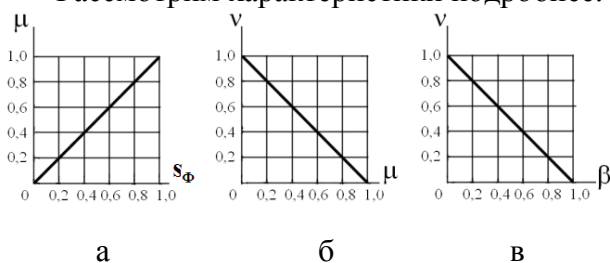


Рис. 3. Моментная (а), механическая (б) и скоростная (в) характеристики ДПТ

**Моментная характеристика.** Вывод ее аналитического выражения выполним тем же приемом, который используется по отношению к АД:

$$M = \frac{P_2}{\omega} = \frac{I_Я^2 R_Я}{\omega_0 s_Ф} = \frac{(U - c_E n \Phi)^2}{\omega_0 s_Ф R_Я} = M_{MAX} s_Ф, \quad (3)$$

где  $\omega_0, \omega$  – угловые скорости вращения якоря при холостом ходе и избранном режиме;  $M_{MAX}$  – максимальный момент ДПТ;  $c_E$  – коэффициент;  $\Phi$  – магнитный поток.

Полученное уравнение (3) является уравнением прямой, выходящей из начала координат. Она может принять конкретные

числовые значения при переходе к относительным единицам. С этой целью введем значение относительного момента  $\mu = M / M_{MAX}$ . Тогда аналитическое выражение моментной характеристики запишется в виде

$$\mu = s_Ф, \quad (4)$$

ее графическое изображение дано на рис. 3, а.

**Механическая характеристика.** Для АД несложно определить ее аналитическое выражение, используя прием перестроения  $M = f(s)$  в  $n = f(M)$ . Он основывается на том, что для любого фиксированного момента  $M$  число оборотов  $n$  найдется по соотношению  $n = n_1(1 - s)$ .

Этот прием может быть использован и для ДПТ, но линейность моментной характеристики ведет к линейности и механической характеристики, которая подчиняется следующему аналитическому выражению:

$$n = n_0 - M \frac{R_Я}{c_E c_M \Phi^2} = n_0 \left( 1 - \frac{M}{M_{MAX}} \right), \quad (5)$$

после перехода к относительным значениям момента  $\mu$  и числа оборотов  $v = n / n_0$

$$v = 1 - \mu, \quad (6)$$

Графическое изображение механической характеристики дано на рис. 3, б.

**Скоростная характеристика.** Вновь воспользуемся уравнением баланса напряжений, которое перепишем в виде

$$n = \frac{U}{c_E \Phi} - I_Я \frac{R_Я}{c_E \Phi} = n_0 \left( 1 - \frac{I_Я}{I_{ЯКЗ}} \right). \quad (7)$$

Переход к относительным величинам даст

$$v = 1 - \beta, \quad (8)$$

где  $\beta = I_Я / I_{ЯКЗ}$ , а ток короткого замыкания  $I_{ЯКЗ}$  есть результат деления напряжения сети питания  $U$  на сопротивление обмотки якоря  $R_Я$ .

При сопоставлении (4), (6) и (8) получаем  $s_Ф = \mu = \beta$ . Поэтому графическое изображение скоростной характеристики (рис. 3, в) повторяет изображение механической характеристики.

**Семейство характеристик скольжения.** Аналитические соотношения для семейства характеристик скольжения в относительных значениях приведены в табл. 1. На рис. 4 дано

их графическое изображение в диапазоне скольжений от нуля до единицы.

Следует пояснить, что рабочий диапазон скольжений ДПТ существенно уже и лежит в пределах от 0 до номинального скольжения  $s_{ФН}$ . Это приводит к малым и неудобным относительным числовым значениям тока и мощности (порядка 0,01, 0,001 и т.п.), а при построении характеристик желательно, чтобы эти показатели в номинальном режиме имели значения, близкие или равные единице. Очевидно, что в таком случае целесообразно изменить масштаб путем смены базовых показателей режима короткого замыкания на показатели номинального режима, а в качестве переменного аргумента использовать отношение  $\frac{s_{Ф}}{s_{ФН}}$ .

В итоге зависимости семейства характеристик скольжения будут описываться другими числовыми значениями, одновременно изменится их графическое изображение (рис. 5)

*Семейство рабочих характеристик.* В принципе возможна аналитическая запись входящих сюда зависимостей. Однако полученные в итоге соотношения имеют громоздкий вид и неудобны для расчета.

1. Аналитические соотношения для ДПТ параллельного возбуждения

Наименование показателя	Аналитическое соотношения
Частота вращения ротора	$v = 1 - s_{\Phi}$
Момент	$\mu = s_{\Phi}$
Мощность на валу	$p_2 = v \cdot \mu$
Ток в обмотке якоря	$\beta = s_{\Phi}$
Ток, потребляемый двигателем от источника	$\beta_1 = \beta + \beta_0$
Потребляемая мощность	$p_1 = \mu + s_{\Phi} + 2s_{\Phi}$
КПД	$\eta = \frac{p_2}{p_1}$

Целесообразнее использовать прием перестроения, основываясь на уже известных результатах расчета семейства характеристик скольжения. В итоге будут получены

графические зависимости (рис. 6) семейства рабочих характеристик.

Как известно, ДПТ может быть переведен на работу в режим рекуперации и противовключения. Моментная, механическая и скоростная характеристики этих режимов являются продолжением тех же характеристик двигательного режима, что иллюстрируют графические зависимости рис. 7.

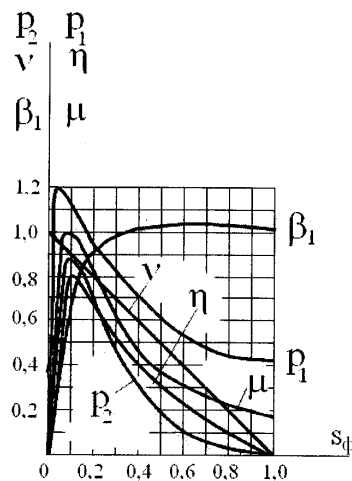


Рис.4. Семейство характеристик скольжения

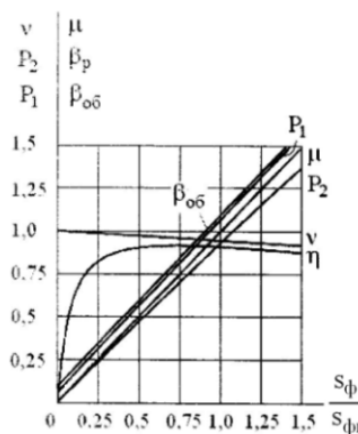


Рис. 5. Семейство характеристик для диапазона рабочих скольжений

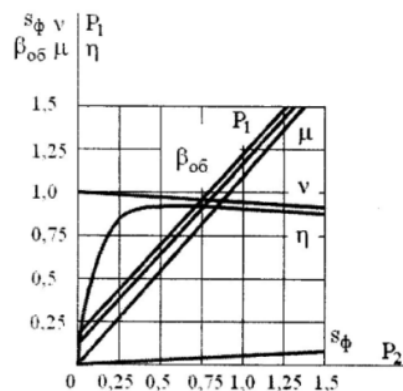


Рис. 6. Семейство рабочих характеристик

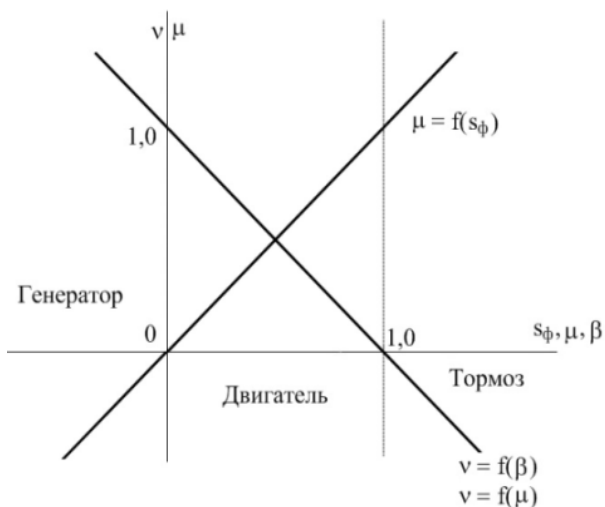


Рис. 7. Моментная, механическая и скоростная характеристики ДПТ в различных режимах

В режиме динамического торможения ток в цепи якоря

$$I_{я} = \frac{c_e \Phi n}{R_{я}}, \quad (9)$$

Приемами, которые описаны выше, уравнение (9) переписывается в виде  $v = \mu$  или  $v = \beta$ . Это вновь означает идентичность механической и скоростной характеристики, но теперь это будут линии, выходящие из начала координат.

Разработанная методика приемлема и для описания поведения ДПТ с последовательным возбуждением.

Обратимся сначала к схеме замещения, приведенной на рис. 8, а.

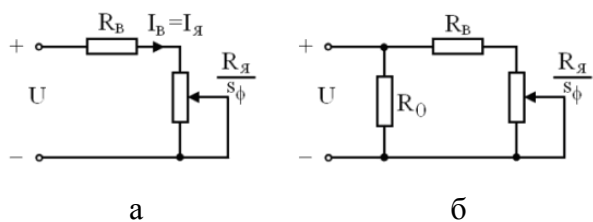


Рис. 8. Схемы замещения ДПТ последовательного возбуждения

Она состоит из двух сопротивлений и потому ее сходство со схемой замещения двухполюсника очевидно. Важно подчеркнуть, что фиктивное скольжение, входящее в состав сопротивления  $\frac{R_{я}}{s_{\phi}}$  становится еще более формальным показателем. Оно

имеет четкую связь с частотами вращения и выступает как коэффициент, используя который можно найти сопротивление якорной цепи для заданной величины тока. Учтем также, что машина здесь работает в условиях  $\Phi = var$  и меняющегося напряжения на зажимах якоря, что затрудняет аналитическое исследование. Поэтому выберем графический метод и будем полагать, что известны: напряжение сети питания  $U$ , а также сопротивления обмоток якоря и возбуждения  $R_{я}$  и  $R_{в}$ . Отложим на оси ординат и абсцисс (рис. 9) относительное значение тока короткого замыкания и заданного напряжения сети, равные единице, и построим квадрат  $OABC$ . На стороне  $AB$  найдем положение точки  $K$ , при котором отношение отрезков  $AK$  и  $BK$  равно отношению  $R_{я}$  к  $R_{в}$ . Тогда отрезок  $OK$  может трактоваться как вольт-амперная характеристика (в.а.х.)  $R_{я}$ , а отрезок  $KC$  – как зеркальное изображение в.а.х.  $R_{в}$  (обе в относительных единицах). Изберем дискретность тока 0,2 и проведем горизонтальные линии до пересечения с зеркальным отражением в.а.х.  $R_{в}$ . Соединив точки пересечения с началом координат, получим семейство в.а.х.  $\frac{R_{я}}{s_{\phi}}$ ;

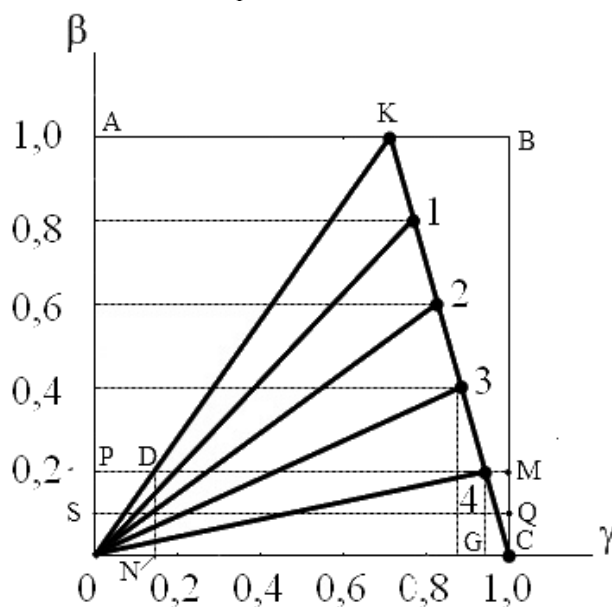


Рис. 9. Метод зеркальных изображений в приложении к анализу ДПТ последовательного возбуждения

Предложенный прием выгоден при расчете мощностей и КПД. Действительно, здесь площадь любого из прямоугольников, например, ОРМС равна относительной потребляемой мощности  $p_1$  при заданном относительном значении тока  $\beta$ . От нее вычитанием площадей ОРДН (относительное значение мощности, теряемой на сопротивлении  $R_{я}$ ) и G4МС (относительное значение мощности, теряемой на сопротивлении  $R_B$ ) переходим к относительным значениям мощности на валу  $p_2$ . Разумеется, что деление  $p_2$  на  $p_1$  даст величину КПД  $\eta$ . Результаты такой работы при выборе значений  $\beta$  в диапазоне от нуля до единицы с дискретностью 0,2 приведены в табл. 2.

Среди них резкий протест вызовет значение  $\eta=1$  при  $\beta=0$ , поскольку любой электрический двигатель в режиме х.х. должен иметь КПД, равный нулю. Но здесь дело не в ошибке, а в использовании схемы замещения двухполюсника в виде двух последовательно соединенных сопротивлений. Исследование ее энергетических показателей выполнено, например, в [4], где показано, что обсуждаемый результат есть следствие использования формулы КПД в виде  $\eta=1-\beta$ . Там же предложено включение параллельно ветви якоря и возбуждения сопротивления  $R_0$  (рис. 8, б) для исключения физического парадокса. В случае ДПТ последовательного возбуждения роль  $R_0$  выполняют механические вентиляционные и до-

полнительные потери, которые пока не были учтены. Трудность их числового определения связана с переменностью потерь в широком диапазоне значений при изменении частоты вращения, т.е.  $R_0$  следует воспринимать как переменное сопротивление. Тогда его графическое изображение будет иметь вид пучка прямых, выходящих из начала координат. Однако, если ДПТ настроен на работу вблизи частоты вращения номинального режима, то в пределах приемлемой погрешности можно считать  $R_0$  неизменным. Тогда к площадям прямоугольников, воспринимаемых выше как мощность  $p_1$ , следует добавить площадь прямоугольника потерь ASQC, в котором диагональ OQ одновременно является в.а.х.  $R_0$ .

Разумеется, при практической реализации предлагаемого приема в качестве базовых выгодно взять показатели номинального режима. Тогда аналитические выражения для момента и частоты вращения примут вид

$$\mu = k_i k_\phi \beta; \nu = \frac{1}{k_\phi} \cdot \frac{1 - k_i \beta}{1 - k_i \beta_{НОМ}};$$

$$\mu = \frac{M}{M_{НОМ}}; \beta = \frac{I_{я}}{I_{яНОМ}}; \nu = \frac{n}{n_{НОМ}};$$

где

$$k_i = \frac{I_{ЯКЗ}}{I_{яНОМ}}; k_\phi = \frac{\Phi}{\Phi_{НОМ}}.$$

## 2. Показатели ДПТ по схеме замещения рис. 8, а

$\beta$	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0
$s_\phi$	1,0	0,75	0,52	0,34	0,15	0,075	0
$\Delta p_{я-}$	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0
$\Delta p_{B-}$	0,28	0,184	0,105	0,048	0,012	0,003	0
$p_1$	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0
$p_2$	0	0,156	0,243	0,24	0,158	0,089	0
$\eta$	0	0,195	0,4	0,6	0,79	0,89	1,0
Принятые обозначения: $\Delta p_{я-}$ – потери в обмотке якоря; $\Delta p_{B-}$ – потери в обмотке возбуждения							

Числовые значения коэффициентов по току  $k_i$  и потоку  $k_\Phi$  устанавливаются соответственно по графическим построениям рис.9 и характеристике холостого хода. Очевидно, что для номинального режима  $\mu$  и  $\nu$ , а также их произведение, т.е. относительное значение мощности  $p_2$  равны единице. Но согласно графическим построениям рис. 9 мощность  $p_2$  меньше единицы (из-за выбора других базовых значений). Поэтому необходим пересчет мощностей, а также  $\mu$  и  $\nu$  в соответствии с масштабными коэффициентами.

С учетом изложенного выполнен новый расчет показателей работы ДПТ с последовательным возбуждением. Результаты расчета приведены в табл. 3 и в виде графических зависимостей рис. 10.

Аналогично может проводиться исследование ДПТ со смешанным возбуждением. Разумеется, здесь в качестве зеркального отражения следует использовать в.а.х. сопротивления последовательной обмотки возбуждения. Параллельное соединение обмоток якоря и возбуждения описываются результирующими в.а.х.

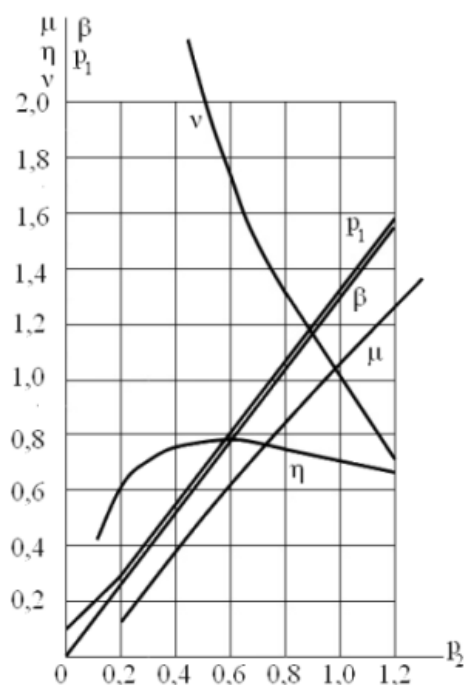


Рис. 10. Рабочие характеристики ДПТ

По сути это будут те же в.а.х. якорной цепи, но каждая из них окажется приподнятой на величину в.а.х. сопротивления параллельной обмотки возбуждения.

### 3. Показатели ДПТ по схеме замещения рис. 8, б

$\beta$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$s_\Phi$	0,03	0,06	0,09	0,125	0,15	0,19
$k_\Phi$	0,45	0,71	0,88	0,95	1,0	1,03
$\mu$	0,09	0,295	0,53	0,76	1,0	1,235
$\nu$	2,6	1,52	1,2	1,09	1,0	0,87
$\Delta p_\alpha + \Delta p_\beta$	0,014	0,04	0,084	0,144	0,21	0,345
$\Delta p_{мвд}$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$p_2$	0,23	0,45	0,65	0,85	1,0	1,08
$p_1$	0,34	0,59	0,83	1,09	1,31	1,525
$\eta$	0,67	0,76	0,78	0,76	0,76	0,7

Принятые обозначения:  $\Delta p_{мвд}$  – потери механические, вентиляционные и дополнительные;  $\Delta p_\alpha + \Delta p_\beta$  – мощность, потребляемая цепями якоря и возбуждения

## Выводы

1. Предложены схемы замещения двигателей постоянного тока, содержащие электрический эквивалент механической мощности на валу.

2. Достигнута аналогия исследования двигателей этого типа с асинхронными как по методике, так и по результатам построения основных характеристик.

3. В последующих публикациях предполагается изложить методику построения схем замещения для различных двигателей переменного тока.

## Список использованной литературы

1. Арнольд, Э. Машины постоянного тока / Э. Арнольд, С. Лакур // ГНТИ, 1931. – 675 с

2. Важнов, А. И. Электрические машины / А. И. Важнов – Л. : Энергия, 1968. – 768 с..

3. Вольдек, А. И. Электрические машины / А. И. Вольдек – Л. : Энергия, 1974, 840 с..

4. Китаев, А. В. Теоретические основы электротехники /А. В. Китаев – К. : НКМ, 1990. – 130 с..

5. Костенко, М. П., Электрические машины. Части 1 и 2. / М. П. Костенко, Л. М. Пиотровский – Л. : Энергия. – 1972. – 544 с. – 1973. – 648 с.

6. Kron, G. Motorbauarten fur Industrie /G. Kron – ETZ-A 76, 1985. – 566 p.

7. Петров, Г. Н. Электрические машины. Части 1, 2 и 3 / Г. Н. Петров –М. –Л. : ГЭИ. – 1956. –135 с. – 1963. – 416 с. – 1968. – 244 с.

8. Рихтер, Р. Электрические машины /Р. Рихтер – ОНТИ, 1935.

9. Schulsky, W. Induktijnsmaschine / W. Schulske. – Wien, 1987. –507 p.

10. Vetrnott, C. G. Theory and desingn off small induction motors /C. G. Vetrnott. –New. York, 1981. – 418 p.

Получено 05.04.2013

## References

1. Arnold, E. DC Machines / E. Arnold, C. Lakur – GNTI, 1931. – 675 p. [in Russian].

2. Vajnov, A. I. Electric machines. – Leningrad :Energy, 1968. – 768 p. [in Russian].

3. Voldek, A. I. Electric machines / A. I. Voldek – Leningrad : Energy, 1974. – 840 p. [in Russian]

4. Kitayev, A.V. Theoretical bases of the electrical engineering / A. V. Kitayev – Kiev : NKM, 1990. – 130 p. [in Russian].

5. Kostenko, M. P. Electric machines. Parts 1 and 2. / M. P. Kostenko, Л. М. Piotrovsky. – Leningrad : Energy, 1972. –544 p. – 1973. – 648 p. [in Russian].

6. Crown, G. Architectural styles of motors of industry / G. Crown – ETZ-A 76, 1985. – 566 p. [in German].

7. Petrov, G. N. Electric machines. Parts 1, 2 and 3 / G. N. Petrov – Moscow– Leningrad : GEI, 1956. –135 p., 1963. – 416 p., – 1968. – 244 p. [in Russian].

8. Richter, R. The Electric machines /R. Richter – ONTI, 1935 [in Russian].

9. Schulsky, W. Induktijnsmaschine / W. Schulske – Wien, 1987. –507 p. [in Deutsch].

10. Vetrnott, C. G. Theory and desingn off small induction motors / C. G. Vetrnott. – New York, 1981. – 418 p. [in English].



Китаев Александр Васильевич, канд. техн. наук, проф. каф. энергетики и электротехники Херсонского нац. техн. ун-та, тел.+38(0552)516-468, e-mail: laurvignon@yahoo.fr



Агбомассу Виньон Лоран, магистр, инженер первой категории каф. энергетики и электротехники Херсонского нац. техн. ун-та, тел.+38(0552)516-468, e-mail: laurvignon@yahoo.fr



Глухова Валентина Ивановна, ст. преподаватель каф. энергетики и электротехники Херсонского нац. техн. ун-та, тел.+38(0552)516-468, e-mail: laurvignon@yahoo.fr