

УДК 004.67

**Е. В. Мантула,**  
**С. В. Машталир,** канд. техн. наук

### МАТРИЧНАЯ ПРОГНОЗИРУЮЩАЯ МОДЕЛЬ И ЕЕ ОБУЧЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

*Предложен подход к синтезу матричных прогнозирующих моделей двумерных полей наблюдений и введены процедуры оценивания параметров этих моделей, которые являются обобщением известных адаптивных алгоритмов идентификации на матричный случай, для решения задач экологического мониторинга, в которых исходные данные «зашумлены» интенсивными возмущениями, а сами контролируемые последовательности достаточно нестационарны. Данные процедуры характеризуются простотой численной реализации.*

**Ключевые слова:** прогнозирование, прогнозирующая модель, прогнозирующая модель с экзогенными переменными, обучение прогнозирующей модели, процедуры адаптивной идентификации, матричная модель, аддитивно-мультипликативный алгоритм Качмажа, процедуры оценивания параметров моделей, процедуры оценивания на скользящем окне

**Ye. V. Mantula,**  
**S. V. Mashtalir,** PhD.

### MATRIX PREDICTIVE MODEL AND ITS LEARNING IN TASKS OF ENVIRONMENTAL MONITORING

*An approach to the synthesis of matrix predictive models of two-dimensional fields of observation is offered and introduced the procedure of estimating the parameters of these models which are generalizations of adaptive algorithms identify the matrix case, for the solution of problems of environmental monitoring, that have a problem related to the fact that the raw data are "noised" by intense interference and controlled by themselves sufficient non-stationary sequences. These procedures are characterized by simple numerical implementation.*

**Keywords:** forecasting, predictive model, predictive model with exogenous variables, predictive model learning, adaptive identification procedure, matrix model, additiv-multiplivativny Kaczmarz's algorithm, the procedure for estimating the parameters of models, the estimation procedure for the sliding window

**О. В. Мантула,**  
**С. В. Машталір,** канд. техн. наук

### МАТРИЧНА ПРОГНОЗУЮЧА МОДЕЛЬ ТА ЇЇ НАВЧАННЯ В ЗАДАЧАХ ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

*Запропоновано підхід до синтезу матричних прогнозуючих моделей двовимірних полів спостережень і введені процедури оцінювання параметрів цих моделей, що є узагальненням існуючих адаптивних алгоритмів ідентифікації на матричний випадок, для вирішення проблем екологічного моніторингу, де вихідні дані «зашумлені» інтенсивними перешкодами, а самі контрольовані послідовності досить нестационарні. Дані процедури характеризуються простотою чисельної реалізації.*

**Ключові слова:** прогнозування, прогнозуюча модель, прогнозуюча модель з екзогенними змінними, навчання прогнозуючої моделі, процедури адаптивної ідентифікації, матрична модель, адитивно-мультиплікативний алгоритм Качмажа, процедури оцінювання параметрів моделей, процедури оцінювання на змінному вікні

**Введение.** В задачах экологического мониторинга достаточно часто встречаются процессы, протекание которых характеризуется двумерными полями [1]. Наиболее характерными представителями таких полей являются области загрязнений воздушного бассейна и водной поверхности, а прогнозирование их распространения в пространстве является достаточно актуальной задачей.

Для решения этой задачи необходимо использовать какую-либо гипотезу о меха-

низме их генерации и иметь наиболее приемлемую математическую модель оценивания параметров загрязнений. В качестве матричной прогнозирующей модели в [1, 4] была предложена операция линейного преобразования матрицы предыстории прогнозируемого процесса  $y$  в матрицу  $z$  той же размерности вида

$$z = A * y = \left( \sum_{j=1}^v A_{1j} y_j ; \sum_{j=1}^v A_{2j} y_j ; \dots ; \sum_{j=1}^v A_{nj} y_j \right), (1)$$

где  $y_j$  –  $j$ -й столбец  $(n \times v)$  – матрицы  $y$ ,  $A_{ij}$  –  $(n \times n)$  матрицы преобразований, под-

© Мантула Е.В., Машталир С.В., 2013

лежащие оцениванию, при этом преобразование (1) содержит  $(nv)^2$  неизвестных параметров.

Вводя далее операции циклической перестановки

$$[y]^{(j)} = (y_j : y_{j+1} : \dots : y_v : y_1 : \dots : y_{j-2} : y_{j-1})$$

и трансплантации

$$\{y\}_{(j)} = (\vec{0} : \vec{0} : \dots : \vec{0} : y_j : \vec{0} : \dots : \vec{0}),$$

преобразование (1) можно переписать в виде матричной свертки

$$z = A * y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^v \{A_{ij}[y]^{(j)}\}_{(i)}. \quad (2)$$

Использование выражения (2) для синтеза прогнозирующей модели неудобно в силу его громоздкости и большого числа оцениваемых параметров, что, в свою очередь, требует больших объемов обучающих выборок для решения задачи параметрической идентификации. Можно, конечно, воспользоваться операциями векторизации и девекторизации [6], при этом для  $(n \times v)$  – матрицы  $y$  в результате столбцевой векторизации получаем  $(nv \times 1)$  – вектор-столбец

$$y = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_j^T, \dots, y_v^T)^T,$$

а в результате строчной векторизации –  $(1 \times nv)$  -вектор-строку

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n),$$

где  $y_j, y_i$  –  $j$ -й столбец и  $i$ -я строка матрицы  $y$  соответственно.

Обратное преобразование столбца или строки в матрицу реализуется с помощью операции девекторизации, обозначаемой  $\oplus$  и  $\ominus$  соответственно.

Вводя далее матрицу преобразования в виде:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1v} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{v1} & A_{v2} & \dots & A_{vv} \end{pmatrix}$$

(здесь  $A_{ij}$  –  $(n \times n)$  – матрицы) и произведения

$$Ay = \left( \left( \sum_{j=1}^v A_{1j} y_j \right)^T, \left( \sum_{j=1}^v A_{2j} y_j \right)^T, \dots, \left( \sum_{j=1}^v A_{vj} y_j \right)^T \right)^T$$

в результате столбцевой девекторизации получаем:

$$z = (Ay) = \left( \sum_{j=1}^v A_{1j} y_j : \sum_{j=1}^v A_{2j} y_j : \dots : \sum_{j=1}^v A_{vj} y_j \right) = A \times y.$$

Аналогичным образом преобразование типа (1) может быть получено и с помощью строчных векторизации – девекторизации.

В задачах экологического мониторинга (и не только) достаточно часто предполагается, что контролируемые процессы и явления являются случайными, в связи с чем целесообразно ввести матричные аналоги векторных случайных процессов и последовательностей. Так, в [4] была введена матричная Марковская последовательность.

$$y(k) = A * y(k-1) + \xi(k), \quad (3)$$

где  $\xi(k) = \{\xi_{ij}(k)\}$  – матричный белый шум.

В принципе, используя операции векторизации–девекторизации, можно переписать (3) в форме

$$y(k) = (Ay)_{\oplus}(k-1) + \xi(k) \quad (4)$$

и для оценки неизвестных параметров матрицы  $A$  использовать стандартный метод наименьших квадратов, однако высокая размерность  $((nv)^2)$  существенно усложняет его использование. В связи с этим, в [4] было предложено использовать конструкцию

$$\begin{aligned} y(k) &= A * y(k-1) + \xi(k) = \\ &= \left( \sum_{j=1}^v c_{j1} A y_j(k-1) : \sum_{j=1}^v c_{j1} A y_j(k-1) : \dots \right. \\ &\quad \left. : \sum_{j=1}^v c_{j1} A y_j(k-1) \right) + \xi(k), \end{aligned}$$

соответствующую выражению

$$y(k) = Ay(k-1)C + \xi(k), \quad (5)$$

где  $A$  и  $C$  –  $(n \times n)$  и  $(v \times v)$  – матрицы преобразования, подлежащие определению, при этом описание содержит всего  $n^2 + v^2 < (nv)^2$  параметров.

В развитие описания (5) в [7] была введена матричная модель авторегрессии вида

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{h=1}^{n_A} A^h * y(k-h) + \xi(k) = \\ &= \sum_{h=1}^{n_A} A^h * y(k-h)C^h + \xi(k) = \\ &= \tilde{A}(y(k-1) : y(k-2) : \dots : y(k-n_A))\tilde{C} + \xi(k) = \\ &= \tilde{A}\tilde{y}(k-1)\tilde{C} + \xi(k), \end{aligned} \quad (6)$$

содержащая  $(n^2 + v^2)n_A$  параметров.



$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{A}(k) &= \tilde{A}(k-1) + \gamma(SpV^A(k)\tilde{C}^T(k-1)\tilde{y}^T(k-1) \times \\ &\times \tilde{y}(k-1)\tilde{C}(k-1)V^A(k))(\beta + SpV^A(k)\tilde{C}^T(k-1) \times \\ &\times \tilde{y}^T(k-1)\tilde{y}(k-1)\tilde{C}(k-1)\tilde{C}^T(k-1)\tilde{y}^T(k-1) \times \\ &\times \tilde{y}(k-1)\tilde{C}(k-1)V^A(k))^{-1}V^A(k)\tilde{C}(k-1)\tilde{y}^T(k-1), \\ \tilde{C}(k) &= \tilde{C}(k-1) + \gamma(SpV^{CT}(k)\tilde{A}(k)\tilde{y}(k-1) \times \\ &\times \tilde{y}^T(k-1)\tilde{A}^T(k)V^C(k))(\beta + Sp\tilde{A}(k)\tilde{y}(k-1) \times \\ &\times \tilde{y}^T(k-1)\tilde{A}^T(k)V^C(k)V^{CT}(k)\tilde{A}(k) \times \\ &\times \tilde{y}(k-1)\tilde{y}^T(k-1)\tilde{A}^T(k))^{-1}\tilde{y}^T(k-1)\tilde{A}^T(k)V^C(k), \end{aligned} \right. \quad (12)$$

где  $0 < \gamma < 2$ ,  $\beta \geq 0$  – свободные параметры, выбираемые из эмпирических соображений. Несложно также заметить, что, если  $y(k)$  и  $\tilde{y}(k-1)$  – скаляр и вектор соответственно,  $\gamma = 1$ ,  $\beta = 0$ , то (12) автоматически превращается в обычный одношаговый алгоритм Качмажа, являющийся одним из самых популярных в теории и практике адаптивной идентификации.

Поскольку в реальных задачах экологического мониторинга исходные данные «зашумлены» интенсивными возмущениями, а сами контролируемые последовательности существенно нестационарны, одношаговые алгоритмы типа (12) могут не обеспечивать требуемую точность прогнозирования, в связи с чем имеет смысл использовать «оконные» процедуры [10], обладающие сглаживающими свойствами.

Введем в рассмотрение матричную модель.

$$y(k) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \xi(k)$$

(здесь  $y(k)$ ,  $\tilde{x}(k)$ ,  $\tilde{A}$  –  $(n \times v)$ ,  $n(n_A + n_B) \times v$ ,  $n \times n(n_A + n_B)$  – матрицы,  $\tilde{x}(k) = \tilde{y}(k-1)\tilde{c}$ ) и критерий идентификации

$$J^{\tilde{A}}(k) = \sum_{\lambda=1}^h Sp(y(x) - \tilde{A}(k)\tilde{x}(\lambda))(y(\lambda) - \tilde{A}(k)\tilde{x}(\lambda))^T,$$

минимизация которого ведет к оценке

$$\tilde{A}(k) = p_{\tilde{A}}(k)R_{\tilde{A}}^{-1}(k), \quad (13)$$

где

$$p_{\tilde{A}}(k) = \sum_{\lambda=1}^k y(\lambda)\tilde{x}^T(\lambda), \quad R_{\tilde{A}}(k) = \sum_{\lambda=1}^k \tilde{x}(\lambda)\tilde{x}^T(\lambda).$$

Несложно организовать пересчет оценок (13) на скользящем окне, содержащем  $s$  последних наблюдений:

$$\left\{ \begin{aligned} p_{\tilde{A}}^s(k) &= p_{\tilde{A}}^s(k-1) + y(k)\tilde{x}^T(k) - \\ &- y(k-s)\tilde{x}^T(k-s), \\ R_{\tilde{A}}^s(k) &= R_{\tilde{A}}^s(k-1) + \tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k) - \\ &- \tilde{x}(k-s)\tilde{x}^T(k-s), \\ \tilde{A}^s(k) &= p_{\tilde{A}}^s(k)(R_{\tilde{A}}^s(k))^{-1}. \end{aligned} \right.$$

Аналогично предыдущему введем также модель

$$y(k) = \tilde{\tilde{x}}(k)\tilde{C} + \xi(k)$$

(здесь  $\tilde{\tilde{x}}(k)$ ,  $\tilde{C}$  –  $n \times v(n_A + n_B)$ ,  $\delta(n_A + n_B) \times \delta$ -матрицы,  $\tilde{\tilde{x}}(k) = \tilde{A}\tilde{y}(k-1)$ ) и критерий идентификации

$$J^{\tilde{C}}(k) = \sum_{\lambda=1}^h Sp(y(\lambda) - \tilde{\tilde{x}}(\lambda)\tilde{C})(y(\lambda) - \tilde{\tilde{x}}(\lambda)\tilde{C})^T, \quad (14)$$

минимизация которого ведет к оценке

$$\tilde{C}(k) = R_{\tilde{C}}^{-1}(k)p_{\tilde{C}}(k), \quad (15)$$

где

$$R_{\tilde{C}}(k) = \sum_{\lambda=1}^k \tilde{\tilde{x}}^T(\lambda)\tilde{\tilde{x}}(\lambda),$$

$$p_{\tilde{C}}(k) = \sum_{\lambda=1}^k y^T(\lambda)\tilde{\tilde{x}}(\lambda).$$

Вводя далее процедуру оценивания на скользящем окне, получаем оценки

$$\left\{ \begin{aligned} p_{\tilde{C}}^s(k) &= p_{\tilde{C}}^s(k-1) + y^T(k)\tilde{\tilde{x}}(k) - \\ &- y^T(k-s)\tilde{\tilde{x}}(k-s), \\ R_{\tilde{C}}^s(k) &= R_{\tilde{C}}^s(k-1) + \tilde{\tilde{x}}^T(k)\tilde{\tilde{x}}(k) - \\ &- \tilde{\tilde{x}}^T(k-s)\tilde{\tilde{x}}(k-s), \\ \tilde{C}^s(k) &= (R_{\tilde{C}}^s(k))^{-1}p_{\tilde{C}}^s(k). \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Таким образом, алгоритмы оценивания (12), (14), (16) являются обобщением на матричную модель популярных процедур адаптивной идентификации.

### Выводы

Решена задача синтеза матричных прогнозирующих моделей двумерных полей наблюдений применительно к проблемам экологического мониторинга. Введены процедуры оценивания параметров этих моделей, являющихся обобщением известных адаптивных алгоритмов идентификации на матричный случай. Введенные процедуры характеризуются простотой численной реализации.

Список использованной литературы

1. Кунцевич, В. М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак. – К. : Наукова думка, 1985. – 248 с.

2. Caldas-Pinto, J. R. Self-tuning filters and predictors for two-dimensional systems / J. R. Caldas-Pinto, P. E. Wellstead // *Int. J. Control.* – 1985. – Vol. 42. – No. 2. – P. 457 – 515.

3. Wellstead, P. E. Two-dimensional adaptive prediction, smoothing and filtering / P. E. Wellstead, G. R. Wagner, J.R. Caldas-Pinto // *IEE Proceedings-F Communications, Radar and Signal Processing.* – 1987. – Vol. 134. – No. 3. – P. 253 – 267.

4. Кунцевич, В. М. О решении задачи двумерной дискретной фильтрации. / В. М. Кунцевич // *Автоматика и телемеханика.* – 1987. – № 6. – С. 68 – 78.

5. Бодянский, Е. В. О решении задачи управления матричным объектом в условиях неопределенности / Е.В. Бодянский, И.П. Плисс // *Автоматика и телемеханика.* – 1990. – №2. – С 175 – 178.

6. Гришин, В.Н. Модели, алгоритмы и устройства идентификации сложных систем. / В. Н. Гришин, В. А. Дятлов, Л. Г. Милов – Л.: Энергоатомиздат., 1985. – 104 с.

7. Бодянский, Е. В. Субоптимальное управление стохастическими процессами. / Е. В. Бодянский, С. Г. Удовенко, А. Е. Ачкасов, Г. К.Вороновский. – Харьков : Основа, 1997. – 140 с.

8. Zanetti, P. Air pollution modelling. / P. Zanetti // N. Y.: Van Nostrand Reinhold, 1990 – 302 p.

9. Райбман, Н. С. Построение моделей процессов производства. / Н. С. Райбман, В.М. Чадеев. – М. : Энергия, 1975. – 367 с.

10. Перельман, И. И. Оперативная идентификация объектов управления. / И.И. Перельман. – М. : Энергоатомиздат, 1982. – 272 с.

Получено 23.04.2013

References

1. Kuntsevich, V. M. Synthesis of optimal and adaptive control systems. Game approach / V. M. Kuntsevich, M. M. Lychak. – Kiev : Naukova Dumka, 1985. – 248 p. [in Russian]

2. Caldas-Pinto, J. R. Self-tuning filters and

predictors for two-dimenal systems / J. R Caldas-Pinto, P. E Wellstead // *Int. J. Control.* – 1985. – Vol. 42. – No. 2. – P. 457 – 515 [in English].

3. Wellstead, P. E. Two-dimensional adaptive prediction, smoothing and filtering / P. E Wellstead, G. R Wagner, J. R Caldas-Pinto // *IEE Proceedings-F Communications, Radar and Signal Processing.* – 1987. – Vol. 134. – No. 3. – P. 253 – 267 [in English].

4. Kuntsevich, V. M. About solution of two-dimensional digital filtering. – *Automation and Remote Control.* – 1987. – No. 6. – P. 68 – 78 [in Russian].

5. Bodyanskiy, Ye. V. Solution of the control matrix object in the conditions of uncertainty / Ye. V. Bodyanskiy, I. P. Pliss // *Automation and Remote Control.* – 1990. – No. 2. – P. 175 – 178 [in Russian].

6. Grishin, V.N. Models, algorithms, and device identification of complex systems / V. N. Grishin, V. A. Dyatlov, L. G. Milov – Moscow : Energoatomizdat, 1985. – 104 p. [in Russian].

7. Bodyanskiy, Ye. V. Suboptimal control of stochastic processes [Bodyanskiy Ye. V., Udovenko S. G., Achkasov A. E., Voronovskiy G. K.] – Kharkiv : Osнова, 1997. – 140 p. [in Russian].

8. Zanetti, P. Air pollution modelling. – N.Y.: Van Nostrand Reinhold, 1990 – 302 p. [in English].

9. Raybman, N. S. Construction of models of production processes / N. S. Raybman, V. M. Chadeev – Moscow : Energiya, 1975. – 367 p. [in Russian].

10. Perelman, I.I. Real time identification of control objects / I. I. Perelman – Moscow : Energoatomizdat, 1982. – 272 p. [in Russian].



Мантула  
Елена Вадимовна,  
аспирантка Харьков-  
ского нац. ун-та ра-  
диоэлектроники,  
м/т +38501927961



Машталир  
Сергей Владимирович,  
канд. техн. наук, доц.  
каф. информатики  
Харьковского нац. ун-  
та радиоэлектроники,  
м/т +380505966299