

УДК 005.8

Т. М. Олех, канд. техн. наук,  
Ю. С. Барчанова

### ЕРГОДИЧНІСТЬ МОДЕЛІ ОЦІНКИ «ШЕСТИ РІВНІВ УСПІШНОСТІ»

**Анотація.** В статті представлена модель оцінки «шести рівнів успішності», яка описана ергодичним ланцюгом Маркова. Також показано декілька способів знаходження фінальних ймовірностей при відомому початковому розподілі і заданій матриці переходу, яка здобута за допомогою оцінки експертів.

**Ключові слова:** модель «шести рівнів успішності», ергодичні ланцюги Маркова, фінальні ймовірності, початковий розподіл ймовірностей, матриця переходу

T. Olekh, PhD.,  
J. Barchanova

### ERGODICITY FOR MODEL OF VALUATION "SIX LEVELS OF SUCCESS"

**Abstract.** The article presents a model of valuation "six levels of success," which is described ergodic Markov chain. Also shown are several ways of finding final probability at a known initial distribution and transition matrix given that obtained by evaluating experts.

**Keywords:** model "six levels of success", argotic Markov chain, final probabilities, the initial probability distribution, the matrix switch

T. M. Olexh, канд. техн. наук,  
Ю. С. Барчанова

### ЭРГОДИЧНОСТЬ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ «ШЕСТИ УРОВНЕЙ УСПЕШНОСТИ»

**Аннотация.** В статье представлена модель оценки «шести уровней успешности», которая описана эргодической цепью Маркова. Также показано несколько способов нахождения финальных вероятностей при известном начальном распределении и заданной матрицей перехода, которая получена с помощью оценки экспертов.

**Ключевые слова:** модель оценки «шести уровней успешности», эргодические цепи Маркова, финальные вероятности, начальное распределение вероятностей, матрица перехода

Аналіз світового досвіду показав доцільність використання кількох параметрів для оцінки результативності проектів, що дозволяє найбільш ефективно вирішити важливі завдання щодо забезпечення вимог ефективності проектів в умовах обмеженості часу, фінансових, людських та інших видів ресурсів [1 - 2].

У разі розв'язання задачі оцінки виробничої системи щодо створюваної цінності оберемо за цільову функцію сукупність ймовірностей певних станів, які відображають рівень досконалості системи у сенсі відповідності деяким критеріям [3 - 5]. Систему можна змінювати і вдосконалювати за рахунок управління. Це можливо при використанні впливів на ресурси, технології, комунікації або структурні зміни в системі [6 - 7]. Розглянемо шкалу ступенів відповідності на прикладі екологічних оцінок проектів, що відповідають заданим критеріям (табл. 1).

Залежно до градації станів відповідності як ступеня досконалості проектів пропонується модель «шести рівнів успішності». Ця модель є універсальною і може бути застосована для будь-яких проектів та їх складових, що характеризують основні аспекти проектів. Для опису такої моделі використовуємо ланцюги Маркова з дискретним часом.

Представимо орієнтованим графом модель оцінки ступенів відповідності екологічних оцінок критеріям якості (табл. 1). Вершини графа відповідають станам ступенів відповідності екологічних оцінок певним критеріям, а дуги ненульовим ймовірностям переходів (рис. 3). При цьому приймемо гіпотезу, що переходи здійснюються між сусідніми станами.

© Олех Т.М., Барчанова Ю.С., 2015

#### 1. Ступені відповідності екологічних оцінок критеріям «шести рівнів успішності»

Оцінка	Пояснення, критерії оцінки	Стан
A	в цілому виконано добре, ніякі важливі завдання не залишилися невиконаними	$D_1$
B	в цілому задовільний і повний, є лише незначні упущення	$D_2$
C	задовільний, незважаючи на упущення і/або невідповідності	$D_3$
D	є добре виконані розділи, але в цілому має розглядатися як незадовільний через значні упущень і/або невідповідностей	$D_4$
E	незадовільний, істотні упущення або невідповідності	$D_5$
F	вкрай незадовільний, важливі завдання погано виконані або не виконані взагалі	$D_6$

Перехідні ймовірності  $\pi_{ik}$   $\{i=1..n; k=1..n; n=6\}$  можуть бути отримані експертним методами. Переходи між станами у певній мірі характеризують рівень технологічної зрілості організації. Ймовірності «затримки»  $\pi_{ii}$ , доповнюють до одиниці суму перехідних ймовірностей з  $i$ -го стану до інших станів за один крок.

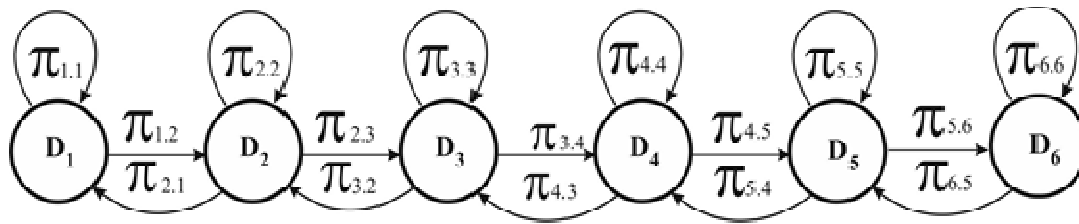


Рис. 1. Розмічений граф моделі оцінки «шести рівнів успішності»

Загальне рішення ланцюга Маркова, представленого орієнтованим розміченим графом на рис. 1 отримаємо на основі матриці перехідних ймовірностей, за умови, що початковий стан  $\{p_1(k), p_2(k), \dots, p_6(k)\}$  системи відомий:

$$\begin{pmatrix} p_1(k+1) \\ p_2(k+1) \\ p_3(k+1) \\ p_4(k+1) \\ p_5(k+1) \\ p_6(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{3,2} & \pi_{3,3} & \pi_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{4,3} & \pi_{4,4} & \pi_{4,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{5,4} & \pi_{5,5} & \pi_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{6,5} & \pi_{6,6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(k) \\ p_2(k) \\ p_3(k) \\ p_4(k) \\ p_5(k) \\ p_6(k) \end{pmatrix}$$

«Марковість» моделі оцінки системи підтверджується тим, що і в запропонованій системі і у ланцюгах Маркова існують переходи між станами у часі (за кроками), існують перехідні ймовірності між окремими станами, що є підставою для висновку щодо обґрунтованості застосування ланцюгів Маркова для відображення системи оцінки проектів.

Поведінка системи визначається матрицею перехідних ймовірностей, яка для кожного нового проекту і параметра, що оцінюється, має різні значення елементів. Приклад результатів моделювання для гіпотетичного варіанта системи оцінки із застосуванням марківського ланцюга показує можливість здійснення багатовимірної оцінки ймовірності настання певних подій (рис. 2). Результати відображають перехід до нового стану від існуючого рівня досконалості системи, який визначений за експертними оцінками таким, що відповідає наступній сукупності ймовірностей станів:

$$p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = p_5(0) = p_6(0) = 0; \\ p_4(0) = 1.$$

Матриця ймовірностей переходу  $\|\pi_{ij}\|$ :

$$\|\pi_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0,74 & 0,26 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,68 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,6 & 0,17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,59 & 0,21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,36 & 0,55 & 0,09 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,42 & 0,58 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Для інших систем матриця  $\|\pi_{ij}\|$  (1) буде мати інші значення елементів.

Математичний опис моделі оцінки проектів або портфелю проектів дозволяє моделювати траєкторію зміни ймовірностей станів системи у залежності від кроків проекту  $k$ .

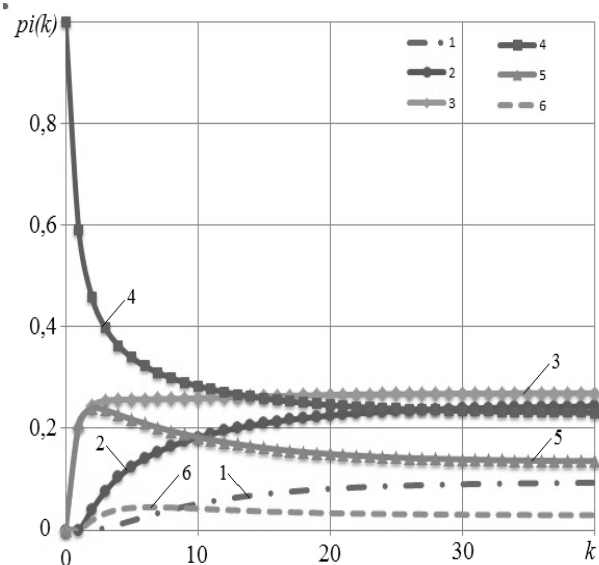


Рис 2. Зміна станів успішності як ступеня досконалості системи:  $p_i(k)$  – ймовірності станів,

$i = 1, \dots, 6; k$  – номер кроку

Застосування ланцюгів Маркова моделі дозволяє визначити необхідну кількість проектних кроків задля досягнення конкретних результатів проектів. Модель відображає марківський ланцюг, для якого виконуються усі властивості ергодичності марківського ланцюга і теорема Маркова про граничні ймовірності.

Обчислення фінальних ймовірностей при відомому початковому розподілі і заданій матриці ймовірностей переходів являє собою найбільш важливе завдання для ергодичних ланцюгів. Перший шлях визначення ймовірностей дає теорема Маркова, згідно з якою зведення матриці переходів в досить велику ступінь  $n$  повинно дати матрицю-рядок шуканих ймовірностей [8 – 9]. Визначити ймовірності подібним чином досить трудомістко. Набагато простіше вони знаходяться з розв'язку системи алгебраїчних рівнянь, яка складається, виходячи з наступних міркувань. У відповідності з формулою повної ймовірності запишемо співвідношення, яке справедливо при довільному  $n$ :

$$p_j(k+1) = \sum_{i=1}^n p_i(k) \pi_{ij}.$$

Але в стаціонарному режимі (при великому  $n$ ) безумовні ймовірності дорівнюють фінальним  $p_j(k) = p_j(k+1) = p_j$ , тому

$$p_j = \sum_{i=1}^n p_i \pi_{ij} \quad (2)$$

Система з  $n$  алгебраїчних рівнянь є однорідною і, отже, має лише нульове значення. Якщо з системи взяти  $n-1$  рівняння і доповнити їх умовою нормування

$$\sum_{i=1}^n p_i \pi_{ij} - p_j = 0; \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (3)$$

то така система дає вже ненульове рішення.

Розглянемо на прикладі моделі «шести рівнів успішності»  $D_1 \div D_6$ , як змінюються матриці переходу і безумовні ймовірності станів із зростанням числа  $k$ .

Нехай матриця переходів має вигляд  $\pi = (\pi_{ij})$  (1),  $i, j = \overline{1,6}$ .

Зводячи цю матрицю (1) в другу ступінь, отримуємо:

$$\pi^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0,57 & 0,37 & 0,057 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0,14 & 0,53 & 0,29 & 0,037 & 0 & 0 \\ \hline 0,02 & 0,26 & 0,47 & 0,21 & 0,036 & 0 \\ \hline 0 & 0,04 & 0,24 & 0,46 & 0,24 & 0,019 \\ \hline 0 & 0 & 0,072 & 0,41 & 0,42 & 0,1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0,47 & 0,37 \\ \hline \end{array}$$

Перший рядок матриці в другому ступені збігається з вектором перехідних ймовірностей на другому кроці  $k=2$

$k=2$	0,574	0,370	0,057	0,000	0,000	0,000
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Вже на 36 кроці очевидно, що матриця переходу поступово вироджується в матрицю, повністю визначається матрицею-рядком. Існуючі невеликі похибки можна віднести на рахунок обчислень.

$$\pi^{36} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0,098 & 0,251 & 0,271 & 0,224 & 0,129 & 0,027 \\ \hline 0,097 & 0,249 & 0,270 & 0,226 & 0,131 & 0,029 \\ \hline 0,095 & 0,246 & 0,270 & 0,226 & 0,133 & 0,028 \\ \hline 0,092 & 0,242 & 0,269 & 0,232 & 0,136 & 0,029 \\ \hline 0,091 & 0,240 & 0,268 & 0,233 & 0,138 & 0,030 \\ \hline 0,090 & 0,238 & 0,268 & 0,235 & 0,139 & 0,031 \\ \hline \end{array}$$

$k=36$	0,098	0,251	0,271	0,224	0,129	0,027
--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Згідно з теоремою Маркова фінальні ймовірності для цього прикладу рівні:  $p_1=0,0942$ ,  $p_2=0,2511$ ,  $p_3=0,2707$ ,  $p_4=0,2239$ ,  $p_5=0,1287$ ,  $p_6=0,0272$ .

Матриці показують зміну безумовних ймовірностей зі зростанням числа кроків. Добре помітний ефект «забування» початкового розподілу. Незалежно від виду початкового розподілу вже через певне число кроків (в даному випадку 30-40) настає стаціонарний режим.

Обчислимо тепер фінальні ймовірності станів шляхом вирішення системи рівнянь. Згідно (3) маємо:

$$\begin{cases} 0,74p_1 + 0,1p_2 - p_1 = 0, \\ 0,26p_1 + 0,68p_2 + 0,2p_3 - p_2 = 0, \\ 0,22p_2 + 0,63p_3 + 0,2p_4 - p_3 = 0, \\ 0,21p_4 + 0,55p_5 + 0,42p_6 - p_5 = 0, \\ 0,09p_5 + 0,58p_6 - p_6 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Рішення цієї системи рівнянь призводить до результату, який вже отримано у імітаційному експерименті:

$$p_1=0,0942, p_2=0,2449, p_3=0,2694, p_4=0,2290, p_5=0,1336, p_6=0,0286.$$

За допомогою ергодичних ланцюгів можливо отримати більш докладні відомості про внутрішню структуру процесу, ніж ті, які даються знанням фінальних ймовірностей.

#### Список використаної літератури

1. Бушуев С. Д. National Competence Baseline, NCB UA Version 3.1 [Text] / С. Д. Бушуев, Н. С. Бушуева. – К. : ІРІДУМ, 2010. – 208 с.
2. Гогунский В. Д. Основные законы проектного менеджмента / В. Д. Гогунский, С. В. Руденко // IV міжнар. конф.: «Управління проектами: стан та перспективи». - Миколаїв : НУК. – 2008. - С. 37 – 40.
3. Колесникова Е. В. Матричная диаграмма и «сильная связность» индикаторов ценности в проектах / Е. В. Колесникова, Т. М. Олех // *Електротехнические и компьютерные системы*. - К. : Техніка. – 2012. - № 7(83). - С. 148 - 153.
4. Олех Т.М. Методы оценки проектов и программ / Т. М. Олех, А. Г. Оборская, Е. В. Колесникова // *Праці Одеського політехнічного університету*. – 2012. - № 2 (39).- С. 213 - 220.
5. Kolesnikova K.V., Vlasenko E.V., Lukyanov D.V., and Olekh T.M. Process Model of Communication in Projects using Markov Chain, // *Інформаційні технології в освіті, науці та виробництві: збірник наукових праць*. – Одеса : АО Бахва. – 2013. – Вип. 1(2). – С. 261 – 269.
6. Kolesnikowa K.V., Vlasenko O.V., Lukyanow D.V., and Olech T.M., (2013), Markow's Model in Project Management Communications in Organizational i Technical Systems, "*Spoleczno-ekonomiczne Uwarunkowania Zarzadzania i Administracji – Innowacyjność, Komunikacja*", pod red. M. Duczmala, T. Pokusy, Opole, *Wyd. WSZiA, Instytut Śląski*, pp. 223 – 232.
7. Олех Т. М. Багатомірні оцінки проектів за допомогою марківських моделей / Т. М. Олех, В. Д. Гогунский, С. В. Ткачук // *Матеріали X міжнародної науково-практичної конференції «Управління проектами: стан та перспективи»*. – Миколаїв : НУК, 16-19 вересня 2014. – С. 196 – 199.

8. Колеснікова К. В. Розробка марківської моделі станів проектно-керованої організації [Текст] / К. В. Колеснікова, В. О. Вайсман, С. О. Величко // Сучасні технології в машинобудуванні: зб. – Вип. 7. - Харків : ХТУ «ХП», 2012. – С. 217 – 222.

9. Vaysman V.A., Lukianov D.V., and Kolesnikova K.V. The Planar Graphs Closed Cycles Determination Method // Труды Одесского политехн. ун-та. – 2012. – № 1(38). – С. 222 – 227.

10. Вайсман В. А. Методологические основы управления качеством: факторы, параметры, измерение, оценка / В. А. Вайсман, В. Д. Гогунский, В. М. Тонконогий // Сучасні технології в машинобудуванні. – 2012. – Вип. 7. – С. 160 – 165.

11. Оборский Г. А. Актуальность дистанционного обучения / Г. А. Оборский, А. Е. Колесников, В. А. Граменицкий // Шляхи реалізації кредитно-модульної системи: матеріали наук.-метод. семінару. – 2011. - № 7. – С. 3 – 8.

Отримано 30.06.2015

#### References

1. Bushuev S.D., and Bushueva N.S National Competence Baseline, NCB UA Version 3.1 [Text], (2010), Kiev, Ukraine, *IRIDIUM*, 208 p. (In English).

2. Gogunskij V.D., and Rudenko S.V. Osnovnye zakony proektnogo menedzhmenta, [The Basic Laws of Project Management], (2008), *IV Mizhnar. Konf.: "Upravlinnja Proektami: Stan ta Perspektivi"*, Mikolaiv, Ukraine, *NUK*, pp. 37 – 40 (In Russian).

3. Kolesnikova E.V., and Oleh T.M., Matrichnaja diagramma i «sil'naja svjaznost'» indikatorov cennosti v proektah, [Matrix Diagram and the “Strong Connectedness” Indicator Value in the Projects], (2012), *Elektrotehnicheskie and Komp'yuternye Systems Publ.*, No. 7 (83), Kiev, Ukraine, *Tehnika*, pp. 148 – 153 (In Russian).

4. Oleh T.M., Oborskaja A.G., and Kolesnikova E.V. Metody ocenki proektov i programm [Methods of Evaluation of Projects and Programs], (2012), *Praci Odesskogo Polytechnic. Univ.*, No. 2 (39), pp. 213 – 220 (In Russian).

5. Kolesnikova K.V., Vlasenko E.V., Lukyanov D.V., and Olekh T.M. Process Model of Communication in Projects using Markov Chain, (2013), *Informacijni Tehnologii v Osviti, Nauci ta Virobnictvi: Zbirnik Naukovih Prac'*, Odessa, Ukraine, *AO Bahva*, Vip. 1(2), pp. 261 – 269 (In English).

6. Kolesnikowa K.V., Vlasenko O.V., Lukyanow D.V., and Olech T.M., (2013), Markow's Model in Project Management communications in Organizational i Technical Systems, “*Spoleczno-ekonomiczne Uwarunkowania Zarzadzania i Administracji – Innowacyjność, Komunikacja*”. Pod red. M. Duczmala, T. Pokusy, Opole, *Wyd. WSZiA, Instytut Śląski*, pp. 223 – 232 (In English).

7. Oleh T.M., Gogunskij V.D., and Tkachuk S.V. Bagatovimira ocinka proektiv za dopomogoju markivs'kih modelej, [Multidimensional Evaluation of

Projects using Markov Models], (2014), *Materiali H Mizhnarodnoi Naukovo-praktichnoi Konferencii "Upravlinnja Proektami: Stan ta Perspektivi"*, Mikolaiv, Ukraine, *NUK*, 16-19 veresnja 2014, pp. 196 – 199 (In Ukrainian).

8. Kolesnikova K.V., Vajsman V.O., and Velichko S.O. Rozrobka markivs'koj mode-li staniv proektno kерованої організації, [Development Markov Model States design-driven Organization], (2012), *Suchasni Tehnologii v Mashinobuduvanni: Zb., Vip. 7*, Har'kiv, Ukraine, *HTU "HPI"*, pp. 217 – 222 (In Ukrainian).

9. Vaysman V.A., Lukianov D.V., and Kolesnikova K.V., (2012), The Planar Graphs Closed Cycles Determination Method, *Trudy Odesskogo Polytechnic. Univ.*, No. 1(38), pp. 222 – 227 (In English).

10. Vajsman V.A., and Gogunskij V.D., Tonkonogij V.M. Metodologicheskie osnovy upravlenija kachestvom: faktory, parametry, izmere-nie, ocenka, [Methodological Fundamentals of Quality Management: Factors, Parameters, Measurement, Evaluation], (2012), *Suchasni Tehnologii v Mashinobuduvanni*, Vip. 7, pp. 160 – 165 (In Russian).

11. Oborskij G.A., Kolesnikov A.E., and Gramenickij V.A. Aktual'nost' distancionno-go obuchenija, [The Relevance of Distance Learning], (2011), *Shljahi Realizacii Kreditno-modul'noi Sistemi: Materiali Nauk.-metod. Seminaru*, No. 7, pp. 3 – 8 (In Russian).



Олех

Тетяна Мефодіївна,  
к.т.н., ст. викладач каф. вищої математики та моделювання систем Одеського нац. політехнічного ун-ту.

E-mail: olekhseta@ya.ru



Барчанова

Юлія Сергіївна,  
ст. викладач каф. інформаційних технологій проектування в машинобудуванні Одеського нац. політехнічного ун-ту.

E-mail: vbybgen@ukr.net