УДК 62-83:62-50

Я. Ю. **Марущак**, д-р техн. наук

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ СТАНДАРТНИХ ФОРМ РОЗПОДІЛУ КОРЕНІВ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ ПРИ СИНТЕЗІ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Анотація. *Проаналізована проблема вибору вагових коефіцієнтів функціонала при синтезі електромеханічних систем методом параметричної оптимізації. Знайдено вирази значень вагових коефіцієнтів функціонала за умови забезпечення двох найбільш поширених в електромеханічних системах стандартних форм: біноміальної та Баттерворта.*

Ключові слова: *оптимальне керування, функціонал, біноміальна форма, форма Баттерворта, вагові коефіцієнти, рівняння Ейлера-Пуассона*

Y. Marushchak, ScD.

SOFTWARE STANDARD FORM DISTRIBUTION OF THE ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION IN THE SYNTHESIS ELECTROMECHANICAL SYSTEMS BY PARAMETRIC OPTIMIZATION

Abstract. *The problems of the choice of weighting coefficients in the synthesis of functional electromechanical systems by parametric optimization. Expressions functional values of weight coefficients provided that the two most common in electromechanical systems standard forms: binomial and Butterworth.*

Keywords: *optimal control, functionality, binomial form, Butterworth, weighting coefficients, Euler-Poisson equation*

Я. Ю. Марущак, д-р техн. наук

ОБЕСПЕЧЕНИЕ СТАНДАРТНЫХ ФОРМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Аннотация. *Проанализирована проблема выбора весовых коэффициентов функционала при синтезе электромеханических систем методом параметрической оптимизации. Найдено выражения значений весовых коэффициентов функционала при условии обеспечения двух наиболее распространенных в электромеханических системах стандартных форм: биномиальной и Баттерворта.*

Ключевые слова: *оптимальное управление, функционал, биномиальная форма, форма Баттерворта, весовые коэффициенты, уравнение Эйлера-Пуассона*

Актуальність роботи. Серед існуючих методів синтезу детермінованих електромеханічних систем можна виділити методи оптимального синтезу [1 – 4], які можуть бути єдиною методологічною основою при побудові систем з різними структурами. При цьому поведінка вихідної координати регулювання відповідає екстремалі, що визначається вибраною функцією мети. Синтез систем автоматичного керування оптимізаційними методами, зокрема методами аналітичного конструювання регуляторів [3], широко використовується для створення електромеханічних систем. У результаті такого синтезу отримуються структури і параметри елементів, що входять у неї, і забезпечується переміщення координати з однієї точки фазового простору в інший по екстремалі, котра забезпечує мінімум вибраному оптимізаційному функціоналові[2; 4 – 5]. Вираз екстремалі в свою чергу залежить від параметрів цього функціоналу, зокрема його вагових коефіцієнтів.

Значення вагових коефіцієнтів, як правило, приймаються, в кращому випадку, за експертними оцінками, що не гарантує об'єктивності. У той же час, якщо ставиться вимога забезпечення відповідності перехідної функції кінцевої координати регулювання якійсь стандартній перехідній функції, що відповідає вибраній стандартній формі розподілу коренів характеристичного рівняння при наперед заданому значенню середньогеометричного кореня ω_o, то завданням оптимального синтезу буде знаходження екстремалі, яка б відповідала вибраній стандартній формі перехідної функції.

© Марущак Я.Ю., 2015

Постановка задачі. Спектр стандартних форм є дуже широкий, а питання вибору тієї, чи іншої стандартної форми та її параметрів детально розглянуто в багатьох роботах і в них практично проблема відповідності стандартних форм заданим перехідним функціям вирішена. Тому вважаємо, що вираз бажаного характеристичного полінома електромеханічної системи може бути визначений з урахуванням особливостей функціонування виробничого механізму чи технологічного процесу.

Забезпечення стандартних форм перехідної функції вихідної координати регулювання в результаті оптимального синтезу може бути отримана за допомогою методів параметричної оптимізації.

Завданням параметричної оптимізації є вибір параметрів регуляторів та корегуючих зв'язків, які б забезпечили екстремум якоїсь функції мети при заданій структурі системи автоматичного керування. Функція мети вибирається як критерій якості динамічних характеристик вихідної координати. Як правило, це є інтегральний критерій від квадратичних форм. Для електромеханічних систем широкого поширення набув критерій

$$W=\int_0^{\infty}\left(\varepsilon^2+\gamma_1\dot{\varepsilon}^2+\gamma_1\ddot{\varepsilon}^2+\dots+\gamma_k\overset{k}{\overset{....}{\varepsilon}}{}^2\right)dt=\dots$$

$$\dots=\int_0^{\infty}Fdt\Rightarrow min, \qquad (1)$$

де $\varepsilon,\dot{\varepsilon},\ddot{\varepsilon},...,\overset{k}{\overset{.....}{\varepsilon}}$ – похибка координати регулювання та її похідних до k-ї похідної включно; γ_1 ... γ_k – вагові коефіцієнти [2 – 3; 6].

Синтез електромеханічних систем методом параметричної оптимізації потребує інформації про вагові коефіцієнти γ_1,... γ_k. Якщо їх вибрати, виходячи з умови забезпечення перехідної функції відповідно до якоїсь стандартної форми (бажаного перехідного процесу), то тоді можна використати вираз (1) для синтезу параметрів реальної електромеханічної системи згідно з методом параметричної оптимізації за такою процедурою:

– вибір функції мети та розрахунок її вагових коефіцієнтів, виходячи з бажаної форми перехідного процесу вихідної координати;

– визначення параметрів регуляторів та корегуючих зв'язків системи в базовій (вихідній) точці оптимізації, наприклад: методом логарифмічних амплітудно-фазових характеристик, чи виходячи з умови стійкості системи;

– розрахунок, для знайдених параметрів, значень $\varepsilon,\dot{\varepsilon},\ddot{\varepsilon},...,\overset{k}{\overset{.....}{\varepsilon}}$ необхідних для розрахунку W;

– змінюючи певним чином (метод спряження напрямків Пауелла, метод випадкового пошуку, метод деформованого багатогранника Недлера-Міда) параметри регуляторів та корегуючих зв'язків, досягають мінімального значення W, при якому перехідна функція вихідної координати відповідатиме стандартній формі.

У відповідності до цієї процедури параметричної оптимізації, в роботі [2] наведено алгоритм синтезу параметрів системи автоматичного керування, виходячи з такої бажаної форми перехідної функції:

$$\varepsilon=e^{-\frac{t}{2T_\mu}}+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{4T_\mu}}sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4T_\mu}t\right), \qquad (2)$$

яка відповідає так званому модульному оптимуму. Вираз (2) є розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння. При цьому встановлено, що перехідній функції (2) відповідає мінімальне значення функціонала

$$W=\int_0^{\infty}\left(\varepsilon^2+64\,T_\mu^6\,\dddot{\varepsilon}^2\right)dt\ , \qquad (3)$$

тобто $\gamma_1=\gamma_2=0$; $\gamma_3=64T_\mu^6=\omega_0^{-6}$, (тут $\omega_0=1/(2T_\mu)$ – середньогеометричний корінь системи). Там же розглянуто випадок, коли бажана перехідна функція є розв'язком неоднорідного диференціального рівняння (умова симетричного оптимуму). При цьому шляхом введення фіктивної вихідної координати знову ж таки приходять до функціоналу (3). В процесі його мінімізації перевіряють відповідність реальної вихідної координати бажаній формі. Слід зауважити, що вона тут виступає, як проміжна координата, тому що вихідною є фіктивна координата.

Отже основною проблемою параметричної оптимізації є вибір вагових коефіцієнтів функціонала (1), які б відповідали вибраній стандартній формі перехідної функції.

Матеріал і результати досліджень. Розглянемо узагальнений вираз (ненормований) стандартної форми характеристичного полінома $H_{cm}(p)$ із відповідними коефіцієнтами C_i.

$$H_{cm}(p)=C_0p^n+C_1p^{n-1}+C_2p^{n-2}+...+C_{n-1}p+C_n, \qquad (4)$$

або в нормованому вигляді:

$$H_{cm}(p)=p^n+\alpha_1\omega_o p^{n-1}+\alpha_2\omega_o^2p^{n-2}+\ ...\ +\alpha_{n-1}\omega_o^{n-1}p+\omega_o^n \qquad (5)$$

де α_i – коефіцієнти, що визначають конкретну стандартну форму; ω_o –задане (бажане) значення середньогеометричного кореня системи автоматичного керування; n – порядок системи, p – оператор Лапласа.

Знайдемо вирази вагових коефіцієнтів функціоналу (1) для різних порядків полінома (4), для чого запишемо вираз (1), коли

$$F=\varepsilon^2+\gamma_1\dot{\varepsilon}^2\ . \qquad (6)$$

Умова мінімуму (1) у цьому випадку знаходиться з рівняння Ейлера:

$$\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\dot{\varepsilon}}=0\ . \qquad (7)$$

Враховуючи вираз (4), на підставі (7) отримаємо

$$\frac{1}{\gamma_1}\varepsilon-\ddot{\varepsilon}=0\ .$$

Цьому виразові відповідає наступний характеристичний поліном

$$H(p)=1/\gamma_1-p^2. \qquad (8)$$

З урахуванням того, що стандартна форма характеристичного полінома першого порядку може бути представлена, як $H_{cm}(p)=pC_0+C_1$, то знайдемо:

$$H_{cm}(-p)\,H_{cm}(p)=C_1^2-C_0^2\,p^2. \qquad (9\ )$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях p виразів (8) та (9), запишемо:

$$\gamma_1=1/C_1^2\ ,\ C_0=1.$$

Аналогічним чином знайдемо вагові коефіцієнти для будь-якого іншого порядку F, зокрема, при

$$F=\varepsilon^2+\gamma_1\dot{\varepsilon}^2+\gamma_2\ddot{\varepsilon}^2+\gamma_3\dddot{\varepsilon}^2\ ,$$

з рівняння Ейлера-Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\dot{\varepsilon}}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial\ddot{\varepsilon}}-\frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial F}{\partial\dddot{\varepsilon}}=0$$

знайдена умова мінімуму (1) буде, якщо $C_0 = 1$, а також :

$$\gamma_1 = \frac{C_2^2 - 2C_1C_3}{C_3^2},$$

$$\gamma_2 = \frac{C_1^2 - 2C_2}{C_3^2},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{C_3^2}.$$

Коли ж

$$F = \varepsilon^2 + \gamma_1 \dot{\varepsilon}^2 + \gamma_2 \ddot{\varepsilon}^2 + \gamma_3 \dddot{\varepsilon}^2 + \gamma_4 \ddddot{\varepsilon}^2,$$

то отримаємо такі вирази:

$$\gamma_1 = \frac{C_3^2 - 2C_2C_4}{C_4^2},$$

$$\gamma_2 = \frac{2C_4 + C_2^2 - 2C_1C_3}{C_4^2},$$

$$\gamma_3 = \frac{C_1^2 - 2C_2}{C_4^2},$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{C_4^2}.$$

Тут також C_0=1. Судячи з того, що в усіх випадках ставиться вимога C_0=1, то це означає, що стандартну форму характеристичного полінома (4) слід представити у нормованому вигляді (5), записаному через середньо-геометричний корінь ω_0. Формули, за якими розраховуються вагові коефіцієнти функціонала (1) для різних порядків полінома, наведені в табл. 1.

1. Вирази для розрахунку вагових коефіцієнтів

n	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
1	$1 / C_1^2$	-	-	-
2	$(C_1^2-2C_2) / C_2^2$	$1 / C_2^2$	-	-
3	$(C_2^2-2C_1C_3) / C_3^2$	$(C_1^2-2C_2) / C_3^2$	$1 / C_3^2$	-
4	$(C_3^2-2C_2C_4) / C_4^2$	$(2C_4+C_2^2-2C_1C_3)/C_4^2$	$(C_1^2-2C_2) / C_4^2$	$1 / C_4^2$

Для двох найбільш поширених в електромеханічних системах стандартних форм: біноміальної та Баттерворта, були розраховані конкретні значення вагових коефіцієнтів для порядків стандартного полінома від першого до четвертого включно. При цьому використовувалися дані з табл.1. Результати цих розрахунків приведені в табл. 2, де в чисельнику (зліва) вказано значення вагового коефіцієнта для біноміальної форми, а в знаменнику (справа) – для Баттерворта.

Зрозуміло, що аналогічно можна отримати вирази розрахунку вагових коефіцієнтів функції мети при параметричній оптимізації для будь-якої іншої стандартної форми розподілу коренів характеристичного рівняння, не обмежуючись четвертим порядком.

Слід відзначити, що використання методу параметричної оптимізації не завжди дає змогу синтезувати електромеханічну систему зі стандартною формою перехідної функції вихідної координати тому, що структура такої системи та її регуляторів і корегуючих зв'язків вибираються апріорі.

2. Значення вагових коефіцієнтів

n	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
1	ω_0^{-2}	-	-	-
	ω_0^{-2}	-	-	-
2	$2\ \omega_0^{-2}$	ω_0^{-4}	-	-
	$0,56\ \omega_0^{-2}$	ω_0^{-4}	-	-
3	$3\ \omega_0^{-2}$	$3\ \omega_0^{-4}$	ω_0^{-6}	-
	0	0	ω_0^{-6}	-
4	$4\ \omega_0^{-2}$	$6\ \omega_0^{-4}$	$4\ \omega_0^{-6}$	ω_0^{-8}
	$-0,04\ \omega_0^{-2}$	$0,04\ \omega_0^{-4}$	$-0,04\ \omega_0^{-6}$	ω_0^{-8}

У той же час, важливою є така позитивна риса методу параметричної оптимізації з використання вагових коефіцієнтів приведених вище, зокрема в табл. 2, як забезпечення умови (1) не тільки для різних стандартних форм, але й для різних ω_0, що визначають бажану швидкодію системи в рамках вибраної стандартної форми характеристичного полінома.

До недоліку методу параметричної оптимізації відноситься вимога визначення параметрів змінюваної частини системи в базовій (вихідній) точці оптимізації, адже це робиться за допомогою відомих неоптимальних методів синтезу.

ВИСНОВКИ. Використовуючи результати, приведені в табл.. 1 і 2, можна синтезувати будь-яку стандартну форму перехідної функції кінцевої координати регулювання методом структурно-параметричного синтезу з використанням аналітичного конструювання регуляторів. Внаслідок цього синтезу отримується структура з релейними регуляторами, що працюють в ковзному режимі. Перевагою таких електромеханічних систем є їх низька чутливість до параметричних і координатних збурень.

Список використаної літератури

1. Марущак Я. Ю. Синтез електромеханічних систем з послідовним та паралельним корегуванням [Текст] /Я. Ю. Марущак – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2005. – 208 с.

2. Герасимяк Р. П. Оптимальные системы автоматического управления электроприводами [Текст] / Р. П. Герасимяк // Учеб. пособие. – Одесса, 1996. – 88 с.

3. Садовой А. В.Система оптимального управления прецизионными электроприводами [Текст]/ А. В. Садовой, Б. В. Сухинин, Ю. В. Сохина – К. : ИСМО, 1996. – 298 с.

4. Lawrence C. Evans, (2010), An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory, *University of California,* Berkelej, 126 p.

5. Richard Weber, (2010), Optimization and Control, *University of Cambridg,* 70 p.

6. Brian D.O.Anderson, and John B.Moore, (2014), Optimal Control: Linear Quadratic Methods, *United States by Courier Corporation,* 381 p.

Отримано 15.05.2015

References

1. Marushchak Y.Y. Syntez elektromechanichnych system z poslidownym ta paralelnym koryguwanniam [Synthesis of Electromechanical Systems with Serial and Parallel Adjustment.], (2005), Lviv, Ukraine, *Publishing House of Lviv Polytechnic University*, 208 p. (In Ukrainian).

2. Gerasymiak R.P. Optimalnyje sistemy automaticheskogo uprawlienia elektropriwodami. [Optimal Automatic Control of Electric Drives], (1996), Odessa, Ukraine, 88 p. (In Russian).

3. Sadovoj A.V., Suchinin B.V., and Sochina Y.V. Sistiema optimalnogo uprawlienija precizionnymi elektropriwodami. [The System of Optimal Control Precision Electric Drives], (1996), Kiev, Ukraine, *ISMO*, 298 p. (In Russian).

4. Lawrence C. Evans, (2010), An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory, *University of California*, Berkeley, 126 p. (In English).

5. Richard Weber, (2010), Optimization and Control, *University of Cambridge,* 70 p. (In English).

6. Brian D.O. Anderson, and John B. Moore, (2014), Optimal Control: Linear Quadratic Methods, *United States by Courier Corporation,* 381 p. (In English).

Марущак
Ярослав Юрійович,
д-р техн. наук, професор.
Професор каф. електротехніки і основ інформатики Жешувської Політехніки.
Польща, м. Жешув, Жешувська Політехніка ім. І. Лукасєвіча, вул. Вінсента Поля, 2.
Тел. +0380679160466.
E-mail: jamaru@prz.edu.pl