УДК 004.652

Буй Д. Б., д-р физ.-мат.наук,
Шишацкая Е. В.,
Fabunmi S.,
Mohammed K.

РЕФЛЕКСИВНО-ТРАНЗИТИВНЫЕ ЗАМЫКАНИЯ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Аннотация. Работа посвящена математическим основаниям алгоритмов линеаризации – одного из методов разрешения конфликта имен, возникающего при множественном наследовании в объектно-ориентированных языках программирования. Объект исследования – рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения. Установлены свойства замыкания: критерий быть частичным порядком, замыкание является оператором замыкания, приведены три неявных представления замыкания, исходя из его свойств, и как наименьшего решения характеристического уравнения.

Ключевые слова: язык программирования, конфликт имен, алгоритмы линеаризации, рефлексивность, транзитивность, замыкание, монотонность, возрастаемость, идемпотентность, оператор замыкания, денотативное задание, наименьшее решение, характеристическое уравнение

Буй Д. Б., д-р фіз.-мат.наук,
Шишацька О. В.,
Fabunmi S.,
Mohammed K.

РЕФЛЕКСИВНО-ТРАНЗИТИВНІ ЗАМИКАННЯ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

Анотація. Робота присвячена математичним основам алгоритмів лінеаризації – одного з методів вирішення конфлікту імен, що виникає при множинному спадкуванні в об'єктно-орієнтованих мовах програмування. Об'єкт дослідження – рефлексивно-транзитивне замикання бінарного відношення. Встановлено властивості замикання: критерій бути частковим порядком, замикання є оператором замикання, наведені три неявних представлення замикання, виходячи з його властивостей, і як найменшого рішення характеристичного рівняння..

Ключові слова: мова програмування, конфлікт імен, алгоритми лінеаризації, рефлексивність, транзитивність, замикання, монотонність, зростання, ідемпотентність, оператор замикання, денотативне задання, найменше рішення, характеристичне рівняння.

Bui D. B., DSc.,
Shyshatska O. V.,
Fabumni S.,
Mohammed K.

REFLEXIVE-TRANSITIVE CLOSURES OF BINARY RELATIONS

Abstract. The paper is devoted to the mathematical foundations of the linearization algorithms – one of the methods of names conflict resolution that occurs in object-oriented programming languages which support multiple inheritance. The main object of study is the reflexive-transitive closure of a binary relation. The properties of this closure are found: the criterion to be partial order, closure is the closure operator, three denotation representations of closure in terms of its properties and as the least solution of some characteristic equation are established.

Key words: programming language, a conflict of names, linearization algorithms, reflexive, transitive, closure, the monotonicity, increasing, idempotency, closure operator, denotative definition, least solution, characteristic equation.

1. Введение

В объектно-ориентированных языках программирования, которые поддерживают множественное наследование, возможен конфликт имен: один и тот же метод (либо поле), имея различную реализацию, присутствуют в нескольких родительских классах данного класса.

Существует два основных подхода к разрешению конфликта имен [1]. Во-первых, конфликт разрешается тривиально с помощью явного указания одного соответствующего родительского класса из нескольких возможных (C++). Во-вторых, применяется специальный алгоритм для выбора нужного родительского класса (языки CLOS, LOOPS, Python, Perl, Dylan [2-5]).

Основная идея второго подхода заключается в линеаризации всех предков класса с последующим выбором первого соответствующего предка [6].

Несмотря на то, что алгоритмы линеаризации были предложены 25 лет назад, они не имеют формального математического обоснования.

Предлагаемая работа посвящена математическим основам линеаризации: в ней представлен фрагмент математической теории бинарных отношений, касающийся рефлексивно-транзитивных замыканий.

Теория бинарных отношений занимает важное место в математике вообще, и в дискретной математике, в частности; мы упомянем только не очень известные фундаментальные классические работы [7, 8], не потерявшие и сейчас свою актуальность.

Для указанного замыкания: (1) установлен критерий быть частичным порядком; (2) замыкание является оператором замыкания включения; (3) замыкание имеет три неявных (денотативных) задания.

Все стандартные понятия для бинарных отношений понимаются в смысле [9], для замкнутости изложения и удобства читателя приведены основные определения.

Зафиксируем универсум D, элементы которого обозначим $x, y, z, \ldots$; бинарные отношения на D обозначим $U, V, \ldots$

Мы будем использовать две вспомогательные операции – инверсию $U^{-1} = \{\langle y, x\rangle | \langle x, y\rangle \in U\}$ и произведение $U \circ V = \{\langle x, y\rangle | \exists z(\langle x, z\rangle \in U \wedge \langle z, y\rangle \in V)\}$.

2. Вспомогательные результаты

Рефлексивность бинарного отношения понимается стандартно:

$$U \text{ – рефлексивно} \Leftrightarrow \forall x(\langle x, x\rangle \in U).$$

Антисимметричность понимается стандартно:

$$U \text{ – антисимметрично} \Leftrightarrow \forall xy(\langle x, y\rangle \in U \wedge \langle y, x\rangle \in U \Rightarrow x = y).$$

Предложение 1.

$$U \text{ – антисимметрично} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} \subseteq \Delta_D .$$

Следствие 1.

$$U \text{ – антисимметрично и рефлексивно} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} = \Delta_D .$$

Транзитивность понимается стандартно:

$$U \text{ – транзитивно} \Leftrightarrow \forall xyz(\langle x, y\rangle \in U \wedge \langle y, z\rangle \in U \Rightarrow \langle x, z\rangle \in U).$$

Далее $U^2 = U \circ U$.

Предложение 2.

$$U \text{ – транзитивно} \Leftrightarrow U^2 \subseteq U .$$

Следствие 2.

$$U \text{ – транзитивно и рефлексивно} \Leftrightarrow U^2 = U \wedge \Delta_D \subseteq U .$$

Предложение 3.

$$U \text{ – частичный порядок} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} \subseteq \Delta_D \wedge \Delta_D \subseteq U \wedge U^2 \subseteq U .$$

Следствие 3.

$$U \text{ – частичный порядок} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} = \Delta_D \wedge U^2 = U .$$

3. Рефлексивно-транзитивное замыкание

Рефлексивно-транзитивное замыкание имеет явное определение:

$$U^* = \bigcup_{i=0,1,2,\ldots} U^i \text{, где } U^0 = \Delta_D,\ U^1 = U,$$

$$U^{i+1} = U \circ U^i,\ i = 1, 2, \ldots$$

Предложение 4. U^* – рефлексивно и транзитивно.

Предложение 5.

$$U^* \text{ – антисимметрично} \Leftrightarrow \forall i, j = 1, 2, \ldots U^i \cap (U^{-1})^j \subseteq \Delta_D .$$

Теорема 1.

$$U^* \text{ – частичный порядок } \Leftrightarrow \forall i, j = 1,2,\ldots U^i \cap \left(U^{-1}\right)^j \subseteq \Delta_D .$$

Именно этот результат важен для алгоритмов линеаризации, когда по иерархии классов, удовлетворяющей условию отсутствия циклов в соответствующем индуцированном графе на классах, строится частичный порядок на множестве классов.

4. Денотативные задания рефлексивно-транзитивного замыкания

4.1. Рефлексивно-транзитивное замыкание как наименьшее рефлексивное и транзитивное отношение, содержащее исходное отношение

Зафиксируем отношение U и рассмотрим семейство:

$$F_U = \{V \mid V \text{ – рефлексивно и транзитивно} \wedge U \subseteq V\}.$$

Предложение 6. Семейство F_U замкнуто относительно произвольных пересечений.

Теорема 2. $U^* = \bigcap_{V \in F_U} V$.

Таким образом, замыкание U^* – наименьшее рефлексивное и транзитивное отношение, содержащее отношение U .

Следствие 3.

$$U \text{ – рефлексивно и транзитивно } \Leftrightarrow U^* = U .$$

Предложение 7. Имеет место:

1) $U \subseteq V \Rightarrow U^* \subseteq V^*$ (монотонность);

2) $U \subseteq U^*$ (возрастаемость);

3) $\left(U^*\right)^* = U^*$ (идемпотентность).

Ниже понятие оператора замыкания используется в смысле [10].

Следствие 4. Оператор $U \mapsto U^*$ является оператором замыкания.

4.2. Рефлексивно-транзитивное замыкание как специальная подалгебра

Рассмотрим следующую унарную параметрическую операцию над парами:

$$\xrightarrow[x,y]{} : D \times D \overset{\sim}{\to} D \times D ,$$

$$dom \xrightarrow[x,y]{} = D \times \{x\} ,\ \left(\langle z, x\rangle\right) \xrightarrow[x,y]{} = \langle z, y\rangle$$

(используем постфиксную форму записи).

Зафиксируем отношение U и рассмотрим частичную параметрическую алгебру всех пар $A_U = \langle D \times D, \Omega_U \rangle$, где $\Omega_U = \left\{ \xrightarrow[x,y]{} \middle| \langle x, y\rangle \in U \right\}$ – сигнатура.

Далее $[\Delta_D]_{\Omega_U}$ – подалгебра алгебры A_U , порожденная диагональю Δ_D .

Теперь можно сформулировать утверждение о втором денотативном представлении рефлексивно-транзитивного замыкания.

Теорема 3 $U^* = [\Delta_D]_{\Omega_U}$.

5. Рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения как наименьшее решение уравнения

Зафиксируем отношение U и рассмотрим (параметрическое) уравнение относительно переменной $X \in 2^{D \times D}$:

$$X = \Delta_D \cup X \cup U \circ X . \qquad (1)$$

Теорема 4. Рефлексивно-транзитивное замыкание U^* является наименьшим решением уравнения (1).

Теорема 5. Отношение вида $U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^k \circ V$ для любого отношения V является решением уравнения (1). Любое решение имеет указанный вид.

6. Основные результаты и выводы

Приведем основные результаты и выводы, которые они позволяют сделать. В статье установлены следующие свойства рефлексивно-транзитивного замыкания бинарного отношения:

1) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения U является частичным порядком тогда и только тогда, когда $\forall i, j = 1,2,\ldots U^i \cap \left(U^{-1}\right)^j \subseteq \Delta_D$ (теорема 1);

2) оператор построения по отношению его рефлексивно-транзитивного замыкания

является оператором замыкания (следствие 4);

3) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения является наименьшим рефлексивным и транзитивным отношением, содержащим исходное отношение (теорема 2);

4) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения порождается диагональю в частичной параметрической алгебре пар вида A_U (теорема 3);

5) рефлексивно-транзитивное замыкание U^* является наименьшим решением уравнения $X = \Delta_D \cup X \cup U \circ X$ (теорема 4);

6) установлена структура множества всех решений этого уравнения (теорема 5).

Из указанных результатов следуют выводы:

1) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения является частичным порядком тогда и только тогда, когда граф этого отношения является ациклическим;

2) наряду с явным заданием рефлексивно-транзитивного замыкания имеются и три денотативных (теоремы 2-4).

Список использованной литературы

1. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, M.L. Mugnier. Proposal for a Monotonic Multiple Inheritance Linearization // OOPSLA '94 Proceedings of the ninth annual conference on Object-oriented programming systems, language, and applications. – 1994. – P. 164-175.
2. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, M.L. Mugnier. Monotonic conflict resolution mechanisms for inheritance // Proceeding OOPSLA '92 conference proceedings on Object-oriented programming systems, languages, and applications. – 1992. – P.16-24.
3. Michele Simionato. The Python 2.3 Method Resolution Order. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.python.org/download/releases/2.3/mro/.
4. Guido van Rossum. Method Resolution Order – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://python-history.blogspot.com/2010/06/method-resolution-order.html.
5. Par Gaël Pegliasco. Python Tutorial: Understanding Python MRO – Class search path. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://makina-corpus.com/blog/metier/2014/python-tutorial-understanding-python-mro-class-search-path.
6. D. Buy, J. Karam, S. Kompan, S. Polyakov. Linearization algorithms CLOS and LOOPS of the classes in programming languages: the formal definitions // 13th International Scientific Conference on Informatics. – Poprad, Slovakia, 18-20 Nov., 2015. – P. 63-66 (Print ISBN: 978-1-4673-9867-1, DOI 10.1109/Informatics.2015.7377809).
7. Риге Ж. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сборник: Сборник переводов. – Москва: Иностранная литература, 1963. – Вып. 7. – С. 129-185.
8. Вагнер В.В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения (Сборник статей). – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1965. – Вып. 1. – С. 3-178.
9. Общая алгебра. Т. 1 / О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков и др. Под общей редакцией Л.А. Скорнякова. – Москва: Наука, 1990. – 592 с.
10. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. – Москва: Наука, 1982. – 159 с.

Получено 17.05.2016

References

1. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, M.L. Mugnier. Proposal for a Monotonic Multiple Inheritance Linearization // OOPSLA '94 Proceedings of the ninth annual conference on Object-oriented programming systems, language, and applications. – 1994. – pp. 164-175 (In English).
2. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, M.L. Mugnier. Monotonic conflict resolution mechanisms for inheritance // Proceeding OOPSLA '92 conference proceedings on Object-oriented programming systems, languages, and applications. – 1992. – pp.16-24 (In English).
3. Michele Simionato. The Python 2.3 Method Resolution Order (In English). Available at: https://www.python.org/download/releases/2.3/mro/.
4. Guido van Rossum. Method Resolution Order (In English). Available at: http://python-history.blogspot.com/2010/06/method-resolution-order.html.
5. Par Gaël Pegliasco. Python Tutorial: Understanding Python MRO – Class search path (In English). Available at: http://makina-corpus.com/blog/metier/2014/python-tutorial-understanding-python-mro-class-search-path.
6. D. Buy, J. Karam, S. Kompan, S. Polyakov. Linearization algorithms CLOS and LOOPS of the

classes in programming languages: the formal definitions // 13th International Scientific Conference on Informatics. – Poprad, Slovakia, 18-20 Nov., 2015. – pp. 63-66 (Print ISBN: 978-1-4673-9867-1, DOI 10.1109/Informatics.2015.7377809) (In English).

7. Rige Zh. Binarnye otnosheniya, zamykaniya, sootvetstviya Galua [Binary relations, closures, Galois correspondence]. – Moscow, 1963. – Vol. 7. – pp. 129-185 (In Russian).

8. Vagner V.V. Teoriya otnoshenii i algebra chastichnykh otobrazhenii [The theory of relations and the algebra of partial maps] // The theory of semigroups and its applications (collection of articles). – Saratov, 1965. – Vol. 1. – pp. 3-178 (In Russian).

9. Obshchaya algebra [general algebra]. V. 1 / O.V. Mel'nikov, V.N. Remeslennikov, V.A. Roman'kov i dr. Pod obshchei redaktsiei L.A. Skornyakova. – Moscow, Nauka Publ., 1990 – 592 p (In Russian).

10. Skornyakov, L.A. Elementyi teorii struktur [Elements of the theory of structures], Moscow, Nauka Publ., 1982. – 159 p (In Russian).

Буй Дмитрий Борисович,
д-р. физ.-мат. наук, профессор, Киевский национальный университ имени Тараса Шевченко,
dmitriybuy@mail.ru

Шишацкая Елена Владимировна,
инженер-программист, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
oshyshatska@gmail.com

Fabunmi Sunmade,
аспирант, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
sunmadefabunmi@yahoo.com

Mohammed Karam,
аспирант, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
karamjasim1978@yahoo.com