

УДК 621.365.22

**Марущак Я. Ю.**, д-р техн. наук,  
**Кушнир А. П.**, канд. техн. наук

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЗМА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОДОВ ДУГОВОЙ СТАЛЕПЛАВИЛЬНОЙ ПЕЧИ НА ОСНОВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕНАВИТА-ХАРТЕНБЕРГА

**Аннотация.** В статье разработана математическая модель механизма перемещения электродов дуговой сталеплавильной печи на основе представления Денавита-Хартенберга и метода Лагранжа. Данная модель позволяет проанализировать влияние конструктивных элементов механизма перемещения на упругие колебания электрода и установить частоту собственных колебаний. Проведено компьютерное исследование работы системы автоматического управления перемещением электрода с использованием разработанной математической модели.

**Ключевые слова:** механизм перемещения электрода, дуговая сталеплавильная печь, упругие колебания, представление Денавита-Хартенберга, метод Лагранжа.

**Марущак Я. Ю.**, д-р техн. наук,  
**Кушнир А. П.**, канд. техн. наук

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МЕХАНІЗМУ ПЕРЕМІЩЕННЯ ЕЛЕКТРОДІВ ДУГОВОЇ СТАЛЕПЛАВИЛЬНОЇ ПЕЧІ НА ОСНОВІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДЕНАВІТА-ХАРТЕНБЕРГА

**Анотація.** В статті розроблена математична модель механізму переміщення електродів дугової сталеплавильної печі на основі представлення Денавіта-Хартенберга і методу Лагранжа. Дана модель дає змогу проаналізувати вплив конструктивних елементів механізму переміщення на пружні коливання електрода та встановити частоту власних коливань. Проведено комп'ютерні дослідження роботи системи автоматичного керування переміщенням електрода з використанням розробленої математичної моделі.

**Ключові слова:** механізм переміщення електрода, дугова сталеплавильна піч, пружні коливання, представлення Денавіта-Хартенберга, метод Лагранжа.

**Marushchak Y. Y.**, ScD.,  
**Kushnir A. P.**, PhD.

## THE MATHEMATICAL MODEL OF THE MECHANISM OF ELECTRODES MOVEMENT OF ARC STEEL-MELTING FURNACES ON THE BASIS OF DENAVIT-KHARTENBERG PRESENTATION

**Abstract.** The mathematical model of electrodes movement mechanism of arc steel-melting furnaces on the basis of Denavit-Khartenberg presentation and Lagrangian method has been created in the article. The given model enables to analyze influence of structural elements of the shift mechanism on elastic vibrations of electrodes as well as to determine the frequency of natural vibrations. The computer research of the automatic control of electrode shifting with the usage of created mathematical model has been carried out.

**Key words:** mechanism of electrodes movement, arc of steel-melting furnaces, elastic vibrations, Denavit-Khartenberg presentation, Lagrangian method.

**Введение.** Дуговая сталеплавильная печь (ДСП) представляет собой сложный стохастический технологический объект. Основные технико-экономические показатели функционирования ДСП в значительной мере зависят от конструкции механизма перемещения электродов и от системы автоматического управления (САУ) перемещением электрода. Их главной задачей является обеспечение такого движения электродов каждой из трех фаз в вертикальной плоскости, чтобы длина дуги между электродом и переплавляемой шихтой (металлоломом) была неизменной для заданного периода плавки. Тогда введение электрической энер-

гии в печное пространство согласно директивным значениям происходит путем изменения длины дуги. Какие-либо колебания электрода в вертикальной плоскости относительно заданного значения длины дуги приводят к колебанию мощности дуги, а это увеличивает длительность плавки, и в следствии ухудшаются технико-экономические показатели эксплуатации печи. Такие колебания электродов могут быть спровоцированы некачественным процессом регулирования со стороны САУ перемещением электродов, либо упругими деформациями элементов механизма передачи движения от приводного двигателя к электроду. Особен-

ностью работы ДСП является то, что значительную часть времени плавки на дугу постоянно воздействуют возмущения со стороны шихты, которая в процессе плавки произвольно перемещается. Это тянет за собой потребность вмешательства в процесс плавки САУ перемещением электродов, тем самым обуславливая динамические колебания электродов. Следовательно, доминирующим режимом для электродуговой печи, пока шихта не расплавится, является динамический режим. Это значит, что в течение длительного времени плавки существуют колебания электродов, а, следовательно, и мощности, вводимой в печное пространство. Демпфирование колебаний электродов позволяет повысить эффективность эксплуатации ДСП. Поэтому актуальной является проблема исследования функционирования механизма перемещения электродов с целью уменьшения колебания электродов в вертикальной плоскости, а значит обеспечение стабилизации длины дуги, которая связана с ее мощностью.

**Анализ исследований.** В большинстве случаев механизм перемещения электродов ДСП представляется двухмассовой системой [1] с упругими деформациями изгиба электрододержателя, который характеризуется соответствующими коэффициентами жесткости и внутреннего вязкого трения. Эти коэффициенты в большинстве случаев неизвестны, а потому для их определения необходимо проведение натурного эксперимента на ДСП, что довольно проблематично. Кроме того, такая двухмассовая математическая модель без информации о параметрах упругих элементов не дает возможность исследовать демпфирующие свойства элементов различного исполнения, которые формируют механизм перемещения электрода.

Поэтому предлагается математическая модель исполнительного механизма перемещения электрода на основе представления Денавита-Хартенберга и метода Лагранжа [2-5]. Такое их совместное использование приводит к компактной векторно-матричной форме записи уравнений динамики механической части системы, которые удобны для анализа.

Для создания математической модели

механизма перемещения электродов на основе представления Денавита-Хартенберга и метода Лагранжа предлагается рассмотреть электрододержатель абсолютно жестким элементом, и тем самым его упругие колебания заменить эквивалентным поворотным (вращающим) движением жесткого элемента. Тогда, под воздействием динамических усилий (моментов), жесткий элемент будет поворачиваться на некоторый угол  $\pm\theta$ , который со временем стремится к нулю. Иначе говоря, электрододержатель, к концу которого крепится электрод, осуществляет затухающие колебания, эквивалентные упругим колебаниям в реальной системе с упругими деформациями.

**Задачи исследования.** Задачей последующих исследований является создание математической модели механизма перемещения электродов ДСП, которая давала бы возможность проанализировать влияние конструктивных элементов этого механизма на демпфирование колебаний электродов. Данную модель следует использовать, как модель объекта регулирования, необходимую для синтеза САУ перемещением электродов с демпфирующими свойствами.

**Решение проблемы.** Учеными Денавитом и Хартенбергом для описания вращательных и поступательных связей между соседними звеньями был предложен [2-5] матричный метод последовательного построения системы координат, связанных с каждым звеном кинематической схемы. Для механизма перемещения электродов ДСП суть представления Денавита-Хартенберга заключается в том, что формируется однородная матрица преобразования, которая имеет размерность  $4 \times 4$  и она описывает положение системы координат каждого звена относительно системы координат предыдущего звена. Это дает возможность последовательно преобразовать последнюю систему координат, которая связана с концом электрода, в базовую систему координат. Она является инерциальной системой координат и связанная с концом колонны перемещения, к которой прикладывается сила, которая осуществляет перемещение электрода.

Обобщенная кинематическая схема механизма перемещения электродов ДСП для

одной из трех фаз изображена на рис. 1. Механизм состоит из колонны перемещения 1, электрододержателя 2, электрода 3, противовеса 4, реечной передачи 5, барабана 6, редуктора 7, электродвигателя 8, направляющих роликов 9.

Общеизвестное уравнение Лагранжа в векторно-матричной форме имеет вид:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{D}(\mathbf{q}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathbf{C}(\mathbf{q}(t)), \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}(t) = [\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t)]^T$  – вектор обобщенных сил (моментов), которые создаются силовыми приводами в сочленениях;  $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  – вектор присоединенных переменных и их производные;  $\mathbf{D}(\mathbf{q}(t))$  – симметричная матрица размерностью  $n \times n$ ;  $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T$  – вектор кориолисовых и центробежных сил;  $\mathbf{C}(\mathbf{q}(t)) = [C_1, C_2, \dots, C_n]^T$  – вектор гравитационных сил (моментов).

Найдем элементы этих векторов и матриц для механизма перемещения электрода ДСП.

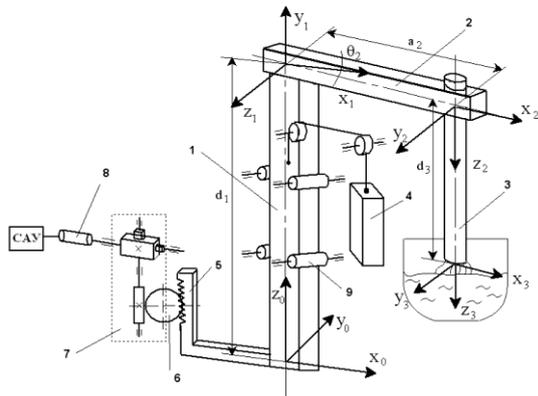


Рис. 1. Обобщенная кинематическая схема механизма перемещения электрода ДСП для одной фазы

Считаем, что колонна – это первое звено, электрододержатель – второе звено, электрод – третье звено. Приведем колебания электрододержателя к концу колонны и представим их с помощью вращающего движения жесткого элемента. В результате такой процедуры электрододержатель и электрод будет поворачиваться на некоторый угол  $\pm\theta$ . Таким образом, будем рассматривать такие движения: первое движение – это поступательное движение всего механизма под воздействием электропривода (1 сочленение);

второе движение – это поворотное (вращательное) движение жесткого электрододержателя и электрода (2 сочленения); третье движение – фиктивное поступательное движение электрода (3 сочленения). Третье движение введено для того, чтобы сформировать систему координат согласно алгоритму, приведенному в [2, 3]. Кроме того, это упрощает выражения моментов инерции и центра веса второго и третьего звена.

Согласно представления Денавита-Хартенберга сформируем систему координат в соответствии с этим алгоритмом. При этом принято следующие обозначения:  $d_i$ ,  $\theta_i$  – присоединенные переменные. Здесь:  $d_i$  – расстояние от начала  $(i-1)$ -й системы координат до пересечения оси  $z_{i-1}$  с осью  $x_i$ , вдоль оси  $z_{i-1}$ ;  $\theta_i$  – угол, на который нужно повернуть ось  $x_{i-1}$  вокруг оси  $z_{i-1}$ , чтобы она оказалась направленной совместно с осью  $x_i$ . Кроме того, в дальнейшем изложении приняты обозначения:  $\alpha_i$  – угол, на который нужно повернуть ось  $z_{i-1}$  вокруг оси  $x_i$ , чтобы она оказалась направленной совместно с осью  $z_i$ ;  $a_i$  – расстояние между пересечением оси  $z_{i-1}$  с осью  $x_i$  и началом  $i$ -й системы координат вдоль оси  $x_i$ ;  $b_1$  – высота колонны перемещения;  $b_2 \approx a_2$  – длина электрододержателя,  $b_3$  – длина электрода,  $m_1, m_2, m_3, m_4$  – массы колонны перемещения, электрододержателя, электрода и противовеса соответственно. Параметры системы координат звеньев механизма перемещения электрода, с учетом этих обозначений, приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Параметры системы координат.

Сочленение	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$
1.	0	$90^\circ$	0	$d_1$
2.	$\theta_2 =$	$90^\circ$	$a_2$	0
3.	0	0	0	$d_3$

Запишем однородную матрицу преобразования для вращательного движения [2, 3]:

$${}_{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{vmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

для поступательного движения:

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для принятых систем координат на основании табл. 1 найдем матрицы превращения:

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & b_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & b_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$${}^0\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & b_2 \cos \theta_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & b_2 \sin \theta_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$${}^0\mathbf{A}_3 = {}^0\mathbf{A}_1 \cdot {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & d_3 \sin \theta_2 + b_2 \cos \theta_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & -d_3 \cos \theta_2 + b_2 \sin \theta_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$${}^1\mathbf{A}_3 = {}^1\mathbf{A}_2 \cdot {}^2\mathbf{A}_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & d_3 \sin \theta_2 + b_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & -d_3 \cos \theta_2 + b_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Частные производные матрицы по присоединенным переменным можно найти согласно следующим выражением:

$$\mathbf{U}_{ij} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0\mathbf{A}_{j-1} \cdot \mathbf{Q}_i \cdot {}^{j-1}\mathbf{A}_i, & \text{если } j \leq i \\ 0, & \text{если } j > i. \end{cases}$$

Здесь  $\mathbf{U}_{ij}$  описывает изменение положения  $i$ -го звена, которое вызвано движением в  $j$ -ом сочленении [2-4]. Матрица  $\mathbf{Q}_i$  для вращательного и поступательного сочленений имеет вид:

$$\mathbf{Q}_{\text{юберт}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{\text{ипоступ}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим:

$$\mathbf{U}_{11} = \mathbf{U}_{21} = \mathbf{U}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}_{22} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 & -b_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & b_2 \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку движение электрода в третьем сочленении фиктивное, то  $d_3 \approx b_3$ , а потому  $\mathbf{U}_{32}$  и  $\mathbf{U}_{33}$  имеют вид:

$$\mathbf{U}_{32} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 & b_3 \cos \theta_2 - b_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & b_3 \sin \theta_2 + b_2 \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы  $\mathbf{D}$  в выражении (1) вычисляются [5] как

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n \text{Tr}(\mathbf{U}_{jk} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T), \quad (2)$$

где  $n$  – количество звеньев,  $\mathbf{J}_j$  – матрица инерционности  $i$ -го звена.

В свою очередь матрица инерционности  $i$ -го звена  $\mathbf{J}_i$  определяется согласно [5]

следующим образом:

$$\mathbf{J}_i = \begin{vmatrix} \frac{(-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})}{2} & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})}{2} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{vmatrix}.$$

Здесь  $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$  – однородные координаты центра масс  $i$ -го звена в  $i$ -й системе координат.

Элементы  $D_{ik}$  матрицы  $\mathbf{D}$  часто называют динамическими коэффициентами. Они определяют момент или силу, которые возникают в  $i$ -ом сочленении под воздействием ускорения в  $k$ -ом сочленении.

Элементы матрицы  $\mathbf{J}_i$  вычисляются за известными [3, 4] выражениями. Согласно принятым систем координат в механизме перемещения и геометрических размеров его элементов, найдем  $\mathbf{J}_i$  для каждого звена. Матрица инерционности для колонны перемещения, поперечное сечение которой имеет форму прямоугольника длиной  $v$  и шириной  $c$ , запишется в следующем виде:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{vmatrix} m_1' v^2 / 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1' b_1^2 / 3 & 0 & -m_1' b_1 / 2 \\ 0 & 0 & m_1' c^2 / 12 & 0 \\ 0 & -m_1' b_1 / 2 & 0 & m_1' \end{vmatrix}.$$

Здесь  $m_1' = m_1 + m_4 + m'$  – суммарная приведенная масса к колонне

Рассмотрим теперь электрододержатель в виде полого прямоугольного параллелепипеда с такими геометрическими размерами: длина –  $b_2$ , ширина –  $k_1$ , высота –  $f_1$ , ширина полости –  $k_2$ , высота полости –  $f_2$ . Его матрица инерционности запишется следующим образом:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{vmatrix} \frac{m_2 b_2^2}{3} & 0 & 0 & -\frac{m_2 b_2}{2} \\ 0 & \frac{m_2 k_1^3 f_1 - k_2^3 f_2}{12 f_1 k_1 - f_2 k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 f_1^3 k_1 - f_2^3 k_2}{12 f_1 k_1 - f_2 k_2} & 0 \\ -\frac{m_2 b_2}{2} & 0 & 0 & m_2 \end{vmatrix}.$$

Так как графитированный электрод имеет форму цилиндра радиусом  $R$  и длиной  $b_3$ , то

матрица  $\mathbf{J}_3$  будет такой:

$$\mathbf{J}_3 = \begin{vmatrix} m_3 R^2 / 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 R^2 / 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 b_3^2 / 3 & -m_3 b_3 / 2 \\ 0 & 0 & -m_3 b_3 / 2 & m_3 \end{vmatrix}.$$

Изменяя форму поперечного сечения элементов механизма перемещения, изменяются элементы матрицы инерционности. Вследствие этого можно исследовать поведение механизма перемещения электрода при разных конструкциях и геометрических размерах его элементов, например, сплошной электрододержатель, полый электрододержатель и т.д. Таким образом, имеется возможность выбрать наилучшую конструкцию исполнительного механизма с точки зрения демпфирования колебаний электрода в вертикальной плоскости.

Согласно выражению (2) элементы матрицы  $\mathbf{D}$  рассчитываются как:

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= m_1' + m_2 + m_3, \\ D_{12} = D_{21} &= \frac{1}{2} b_2 m_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} b_3 m_3 \sin \theta_2 + m_3 b_2 \cos \theta_2, \\ D_{22} &= \frac{1}{12} m_2 \frac{4b_2^2 f_1 k_1 - 4b_2^2 f_2 k_2 + f_1^3 k_1 - f_2^3 k_2}{f_1 k_1 - f_2 k_2} + \\ &+ \frac{1}{4} m_3 R^2 + m_3 b_2^2 + \frac{1}{3} m_3 b_3^2, \\ D_{13} = D_{31} &= 0, D_{23} = D_{32} = 0, D_{33} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Остальные элементы этой матрицы равны нулю.

Для определения составляющих, которые описывают центробежные и кориолисовы силы, используем соответствующее соотношение:

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где  $h_{ikm}$  – динамический коэффициент, который определяет связь момента (силы), который возникает в  $i$ -ом сочленении в результате движения в  $k$ -ом и  $m$ -ом сочленениях, со скоростями изменения  $k$ -й и  $m$ -й присоединенных переменных, причем:

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Tr}(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T), \quad (4)$$

где

$$U_{jkm} = \begin{cases} {}^0A_{k-1} \cdot Q_k \cdot {}^{k-1}A_{m-1} \cdot Q_m \cdot {}^{m-1}A_m, & \text{если } j \geq m \geq k \\ {}^0A_{m-1} \cdot Q_m \cdot {}^{m-1}A_{k-1} \cdot Q_k \cdot {}^{k-1}A_j, & \text{если } j \geq k \geq m \\ 0, & \text{если } j < k \text{ или } j < m. \end{cases}$$

Используя выражения (3) и (4), рассчитаем  $h_1, h_2, h_3$  с учетом того, что  $\dot{d}_3 = 0$ .

$$h_1 = h_{111} \dot{d}_1 \dot{d}_1 + h_{112} \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 + h_{121} \dot{\theta}_2 \dot{d}_1 + h_{122} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2;$$

$$h_2 = h_{211} \dot{d}_1 \dot{d}_1 + h_{212} \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 + h_{221} \dot{\theta}_2 \dot{d}_1 + h_{222} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2;$$

$$h_3 = h_{311} \dot{d}_1 \dot{d}_1 + h_{312} \dot{d}_1 \dot{\theta}_2 + h_{321} \dot{\theta}_2 \dot{d}_1 + h_{322} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2.$$

где  $h_{111} = 0; h_{121} = h_{112} = 0; h_{211} = 0; h_{212} = h_{121} = 0; h_{222} = 0; h_{311} = 0; h_{312} = h_{321} = 0; h_{322} = 0;$

$$h_{122} = Tr({}^0A_1 Q_2^{-1} A_1 Q_2^{-1} A_2 J_2 U_{21}^T) + Tr({}^0A_1 Q_2^{-1} A_1 Q_2^{-1} A_3 J_3 U_{31}^T) = \\ = \frac{-1}{2} b_2 m_2 \sin \theta + \frac{1}{2} b_3 m_3 \cos \theta - b_2 m_3 \sin \theta$$

Следовательно,

$$h_1 = \left( \frac{-b_2 m_2}{2} \sin \theta + \frac{b_3 m_3}{2} \cos \theta - b_2 m_3 \sin \theta \right) \dot{\theta}^2, \\ h_2 = 0, h_3 = 0.$$

Влияние гравитационных сил (моментов), которые воздействуют на механизм перемещения электрода, учитываются следующим образом:

$$C_i = \sum_{j=i}^n (-m_j \mathbf{g} U_{ji}^j \bar{\mathbf{r}}_j), \quad (5)$$

где  $\mathbf{g} = |0 \ 0 \ -g \ 0|$  – вектор строка, которая описывает гравитационное ускорение в базовой системе координат;  ${}^j\bar{\mathbf{r}}_j$  – радиус-вектор центра масс  $j$ -го звена.

Для звеньев, которые создают данный механизм, можно записать:

$${}^1\bar{\mathbf{r}}_1 = \left| 0 \quad -\frac{b_1}{2} \quad 0 \quad 1 \right|^T; \quad {}^2\bar{\mathbf{r}}_2 = \left| -\frac{b_2}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right|^T; \\ {}^3\bar{\mathbf{r}}_3 = \left| 0 \quad 0 \quad -\frac{b_3}{2} \quad 1 \right|^T.$$

Отсюда

$$C_1 = -(m_1 \mathbf{g} U_{11} {}^1\bar{\mathbf{r}}_1 + m_2 \mathbf{g} U_{22} {}^2\bar{\mathbf{r}}_2 + m_3 \mathbf{g} U_{31} {}^3\bar{\mathbf{r}}_3) = \\ = gm_1 + gm_2 + gm_3; \\ C_2 = -(m_2 \mathbf{g} U_{22} {}^2\bar{\mathbf{r}}_2 + m_3 \mathbf{g} U_{32} {}^3\bar{\mathbf{r}}_3) = \\ = \frac{1}{2} gm_2 b_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} gm_3 b_3 \sin \theta_2 + gm_3 b_2 \cos \theta_2; \\ C_3 = -m_3 \mathbf{g} U_{33} {}^3\bar{\mathbf{r}}_3 = 0.$$

Вектор обобщенных сил (моментов), которые создаются внешними воздействиями в сочленениях, имеет вид:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = |F_1 + G_4 - F_{f1}, M - M_{f2}, 0|^T, \quad (6)$$

где  $F_1$  – сила, воздействия со стороны привода;  $G_4 = gm_4$  – вес противовеса;  $F_{f1} = a_1 V$  – сила внешнего вязкого трения в направляющих колонны;  $M$  – момент удержания электрододержателя и электрода;  $M_{f2} = a_2 \dot{\theta}_2$  – момент внешнего вязкого трения во втором сочленении.

Следовательно, на основании выражений (1), (2), (3), (5), (6) можно записать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} & (m_1' + m_2 + m_3) \ddot{d}_1 + \\ & + \left( \frac{1}{2} b_2 m_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} b_3 m_3 \sin \theta_2 + m_3 b_2 \cos \theta_2 \right) \ddot{\theta}_2 + \rightarrow \\ & \rightarrow + \left( -\frac{1}{2} b_2 m_2 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} b_3 m_3 \cos \theta_2 - b_2 m_3 \sin \theta_2 \right) \dot{\theta}_2^2 + \\ & + gm_1 + gm_2 + gm_3 = F_1 + G_4 - F_{f1}, \\ & \left( \frac{1}{2} b_2 m_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} b_3 m_3 \sin \theta_2 + m_3 b_2 \cos \theta_2 \right) \ddot{d}_1 + \rightarrow \\ & + \left( \frac{1}{12} m_2 \frac{4b_2^2 f_1 k_1 - 4b_2^2 f_2 k_2 + f_1^3 k_1 - f_2^3 k_2}{f_1 k_1 - f_2 k_2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} m_3 R^2 + m_3 b_2^2 + \frac{1}{3} m_3 b_3^2 \right) \ddot{\theta}_2 + \\ & + \frac{1}{2} gm_2 b_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} gm_3 b_3 \sin \theta_2 + gm_3 b_2 \cos \theta_2 = \\ & = M - M_{f2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Перемещение электрода  $l_3$  запишется:

$$l_3 = d_1 + b_3(\cos(\theta_2) - 1) + b_2\sin(\theta_2) \quad (8)$$

На рис. 2 показана структурная схема

механизма перемещения электрода, которая построена на основе системы уравнений (7), дополненных выражением (8).

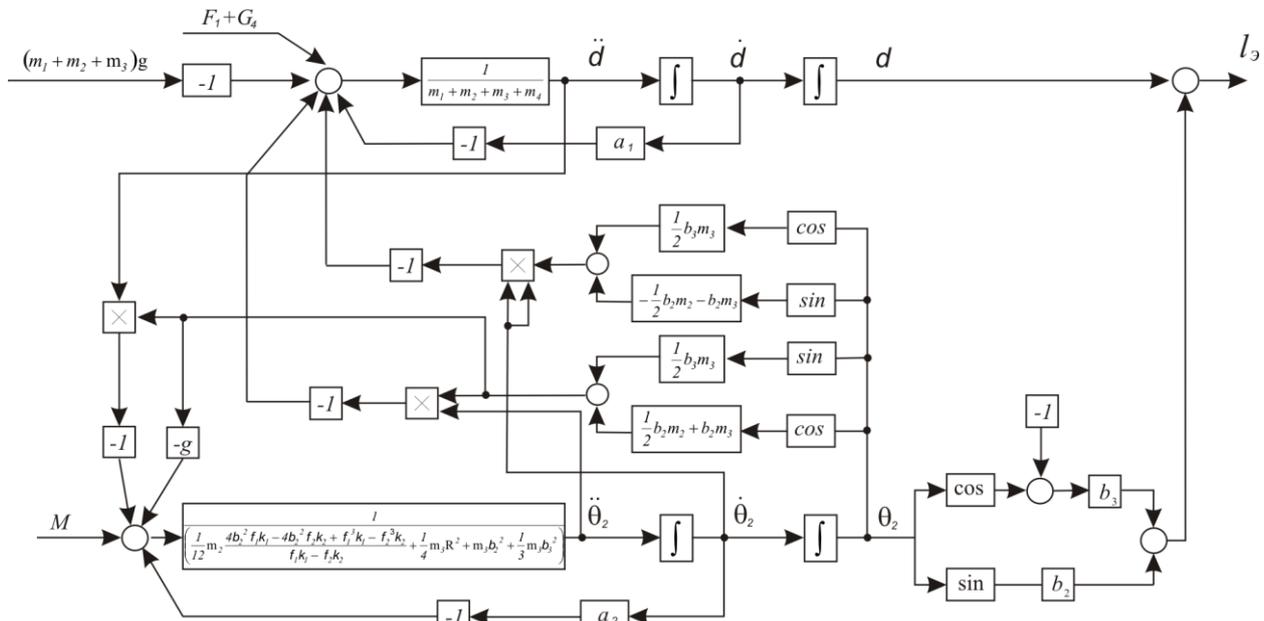


Рис. 2. Структурная схема, отображающая систему дифференциальных уравнений, которые описывают механизм перемещения электродов

Такую структурную схему легко реализовать в пакете прикладных программ, например, MATLAB+Simulink и исследовать динамические процессы на цифровой модели.

Для ДСП-200 были исследованы динамические процессы  $l_3(t)$ , представленные на рис. 3. Здесь кривой 1 соответствует случай, когда конструкция электрододержателя имеет форму полого прямоугольного параллелепипеда, а кривая 2 - форму сплошного прямоугольного параллелепипеда.

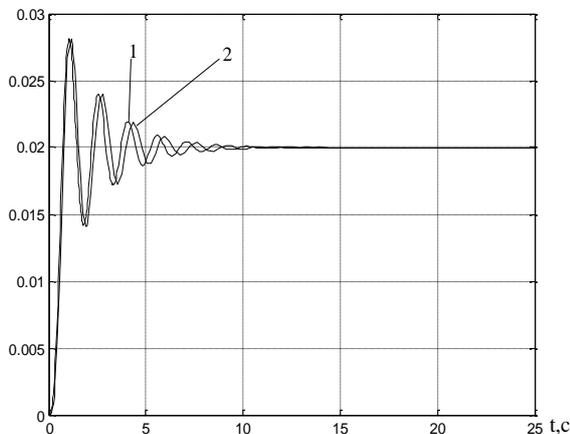


Рис. 3. Динамические процессы перемещения электрода

При исследованиях принято, что параметры конструкции механизма перемещения электрода ДСП -200 имеют [6] следующие значения:  $m_1 = 15000\text{кг}$ ,  $m_3 = 5750\text{кг}$ ,  $b_1 = 12\text{м}$ ,  $b_2 = 10\text{м}$ ,  $b_3 = 9\text{м}$ ,  $R = 0,305\text{м}$ ,  $m_2 = 4625\text{кг}$ ,  $m_4 = 25380\text{кг}$ ,  $f_1 = 1\text{м}$ ,  $f_2 = 0,5\text{м}$ ,  $k_1 = 0,8\text{м}$ ,  $k_2 = 0,4\text{м}$  – для полого электрододержателя;  $m_2 = 9250\text{кг}$ ,  $m_4 = 30000\text{кг}$ ,  $f = 1\text{м}$  – для сплошного сечения электрододержателя. Как видно из этого рисунка две различные конструкции электрододержателя имеют фактически одинаковые демпфирующие свойства, а колебания координаты  $l_3$  имеют практически одинаковую частоту собственных колебаний на уровне  $f_ч = 0,71$  Гц. Следовательно, нет надобности изготовления электрододержателя со сплошным сечением.

**Выводы:**

1. Создана математическая модель механизма перемещения электрода на основе представления Денавита-Хартенберга и метода Лагранжа, которая позволяет исследовать динамику движения электрода с учетом особенностей конструкции элементов его

механизма перемещения.

2. Проведенные исследования позволили выбрать форму сечения электрододержателя с наилучшими демпфирующими свойствами механизма перемещения электродов.

3. Установлена частота собственных колебаний механизма перемещения ДСП-200 которую трудно получить экспериментально.

#### Список использованной литературы

1. Сапко А.И. Исполнительные механизмы регуляторов мощности дуговых электропечей / Сапко А.И. – М. : Энергия, 1980. – 115с.

2. Denavit J. A Kinematic Notation for Lower pair Mechanisms Based on Matrices / Denavit J., Hartenberg R. S. // *Journal of Applied Mechanics*, in *Transactions of ASME*, vol.77, 1995.

3. Fu K. Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence / Fu K., Gonzalez R., Lec C. — McGraw-Hill, Inc, 1989.

4. Mohsen Shahinpoor. A robot engineering textbook / Mohsen Shahinpoor. – Harper & Row, 1987.

5. Мазепа С.С. Системи керування та динаміка роботів: навчальний посібник / Мазепа С.С., Лозинський А.О. – Львів: Видавництво ДУ "Львівська політехніка", 1998. – 117с.

6. Ведин А.Н. Экспериментальные исследования электромеханических колебаний в дуговых сталеплавильных электропечах / А.Н. Ведин, Н.Б. Тесля // Труды IV Международной конференции "Электротехника, электромеханика и электротехнологии". – Россия. Клязьма: МКЭЭ. – 2000. – С. 450-451.

Получено 25.04.2016

#### References

1. Sapko A.I. Ispolnitel'nye mehanizmy reguljatorov moshhnosti dugovyh jelektropechej [Executive mechanisms of power regulators of arc furnaces], (1980), Moscow, *Jenergija*, 115 p. (In Russian).

2. Denavit J., Hartenberg R. S. A Kinematic Notation for Lower pair Mechanisms Based

on Matrices. (1995), *Journal of Applied Mechanics*, in *Transactions of ASME*, vol.77. (In English).

3. Fu K., Gonzalez R., Lec C. Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence. (1989), McGraw-Hill, Inc. (In English).

4. Mohsen Shahinpoor. A robot engineering textbook/ (1987), Harper & Row. (In English).

5. Mazepa S.S. Lozynskyi A.O. Systemy keruvannia ta dynamika robotiv [Control systems and dynamics of robots], (1998), Lviv, Ukraine, *Publishing House of Lviv Polytechnic University*, 117 p. (In Ukrainian).

6. Vedin A.N., Teslja N.B. Jeksperimental'nye issledovanija jelektromehaničeskikh kolebanij v dugovyh staleplavil'nyh jelektropechah [Experimental studies of electromechanical vibrations in arc of steel-melting furnaces], (2000), Kljaz'ma, Rossija, *International Conference "Electrical Engineering, Electromechanics and Electrotechnology"*, pp. 450-451. (In Russian).



Марущак Ярослав Юрьевич, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры электротехники и основ информатики Жешовской политехники. Польша, м. Жешув, Жешувская Политехника, ул. Винсента Поля, 2. Тел. +0380679160466. E-mail: jamaru@prz.edu.pl



Кушнир Андрей Петрович, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры электротехники, промышленной и пожарной автоматики Львовского государственного университета безопасности жизнедеятельности. Украина, м. Львов, ул. Клепаровская, 35. Тел. +380673065876 E-mail: andrekushnir@ukr.net