

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОПРОВОДНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЛИНИИ С МИНИМАЛЬНЫМИ ДИССИПАТИВНЫМИ И ДИСПЕРСИОННЫМИ ЭФФЕКТАМИ

В. И. Пацюк, В. П. Берзан, Г. А. Рыбакова

Институт энергетики Академии наук Молдовы

Аннотация. Приведена математическая модель многопроводной электрической линии с распределенными параметрами, дано обоснование численного метода расчета в фазной системе координат, разработана модифицированная расчетная схема, получены условия минимизации диссипативных и дисперсионных членов и минимизации погрешности численного решения. Приведены результаты расчета волнового процесса в фазе воздушной многопроводной линии напряжением 110 кВ.

Ключевые слова: математическая модель, разностная схема, инварианты Римана, первое дифференциальное приближение, минимизации диссипативных и дисперсионных членов.

Введение

Как отмечено в [1], при расчете режима электрической цепи можно использовать два подхода для их представления. Первый подход базируется на представлении цепи как объект, который состоит из отдельных физических элементов связанных между собой электромагнитными полями. Второй подход имеет в основе представление электрической цепи в виде совокупности элементов со сосредоточенными параметрами, в которых происходит локализованный процесс диссипации и накопления/отдачи энергии поля. Степень приближения этих двух трактовок зависит от скорости изменения поля во времени, характеристик и физической протяженности среды в которой происходят эти изменения параметров поля во времени.

Примером такой физической среды в электроэнергетике на частоте промышленного тока являются электрические сети [2,3]. Вдоль проводов электрической линии имеет место распространение потока передаваемой электрической энергии. Этот поток результатом является (суммой) взаимодействий отдельных магнитных и электрических полей электрической линии. В этом контексте электрические линии следует рассматривать как цепи с элементами связанными между собой электромагнитными полями.

Следует отметить, что одновременно с распространением энергии вдоль линии будет происходить взаимный обмен энергии между проводами многопроводной линии через электрические и магнитные составляющие электромагнит-

ного поля. Такие явления можно исследовать в фазной системе координат используя для описания процессов в многопроводной линии систему дифференциальных уравнений в частных производных [4-6], часто называемых телеграфными уравнениями.

В случае длиной линии для получения решения применяют численные методы [6-8], но в данном случае, в численном решении могут появиться осцилляции, которые не являются отражением физической сущности процессов в линии [8-10].

В данной работе, рассматривается задача расчета режима в длинной многопроводной линии численным методом и обоснование способа минимизации паразитных осцилляций в численном решении телеграфных уравнений.

1. Модель многопроводной линии

Математическая модель распространения электромагнитной энергии по многопроводной трехфазной высоковольтной линии электропередач представляет собой систему дифференциальных уравнений для векторов напряжения $\mathbf{u}(x,t)$ и тока $\mathbf{i}(x,t)$:

$$\begin{aligned} L \frac{\partial \mathbf{i}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}(x,t)}{\partial x} + R\mathbf{i}(x,t) &= 0; \\ C \frac{\partial \mathbf{u}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{i}(x,t)}{\partial x} + G\mathbf{u}(x,t) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Областью решения задачи и областью определения неизвестных вектор-функций тока и напряжения является прямоугольник $D = \{(x,t) : x \in (0,l), t \in (0, T_{\max})\}$, где l – длина линии, T_{\max} – максимальное время расчета вектор-функций $\mathbf{u}(x,t)$ и $\mathbf{i}(x,t)$. В n -проводной ли-

нии вектор-функции $\mathbf{u}(x,t)$ и $\mathbf{i}(x,t)$ имеют по n компонент, а в (1) символами L , C , R и G обозначены симметричные матрицы размерности $n \times n$ погонных индуктивностей, емкостей, сопротивления проводов и проводимости изоляции (жирным шрифтом обозначены векторные объекты), представленные матрицами:

$$\mathbf{u}(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \\ \dots \\ u_n(x,t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i}(x,t) = \begin{pmatrix} i_1(x,t) \\ i_2(x,t) \\ \dots \\ i_n(x,t) \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{12} & L_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{1n} & L_{2n} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{12} & C_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & R_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & G_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix};$$

Для получения единственного решения к уравнениям (1) следует добавить начальные при $t = 0$ и граничные при $x = 0$ и $x = l$ условия. Будем полагать считать, что в начальный момент $t = 0$ в линии отсутствуют напряжения и токи

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{i}(x,t) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

на входе линии при $x = 0$ заданы напряжения, а на выходе линии при $x = l$ имеем нагрузку с сопротивлением R_S , следовательно, имеем:

$$\mathbf{u}(0,t) = \mathbf{U}_0(t), \quad \mathbf{u}(l,t) = \mathbf{R}_S \mathbf{i}(l,t). \quad (4)$$

При решении задачи будем предполагать, что у нас имеется 6-проводная линия $n = 6$ и величины уравнений (4) имеют вид:

$$\mathbf{U}_0(t) = \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \sin(\omega t + \varphi_a) \\ \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi_b) \\ \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3} + \varphi_c) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}_S = \begin{pmatrix} Z_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{66} \end{pmatrix},$$

где, $\omega = 2\pi f$ – круговая частота (1/сек); f – частота колебаний (1/сек); $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ – период колебаний (сек); $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$ – сдвиг фазы тока и напряжения в проводах;

$Z_{11} = \sqrt{\frac{L_{11}}{C_{11}}}, Z_{22} = \sqrt{\frac{L_{22}}{C_{22}}}, \dots, Z_{66} = \sqrt{\frac{L_{66}}{C_{66}}}$ – волновое или характеристическое сопротивление проводов линии.

Если определены функции напряжения $\mathbf{u}(x,t)$ и тока $\mathbf{i}(x,t)$ в линии можно вычислить активную P и реактивную Q мощности линии используя соотношения для мгновенного значения $p(x,t) = \mathbf{u}(x,t)\mathbf{i}(x,t)$:

$$P(x,t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \mathbf{u}(x,\tau)\mathbf{i}(x,\tau)d\tau,$$

$$Q(x,t) = \frac{1}{\omega T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \mathbf{u}(x,\tau) \frac{d\mathbf{i}(x,\tau)}{d\tau} d\tau = \quad (5)$$

$$= -\frac{1}{\omega T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \mathbf{i}(x,\tau) \frac{d\mathbf{u}(x,\tau)}{d\tau} d\tau.$$

В формулах (5) используется покомпонентное умножение векторов, т.е. $p_k = u_k i_k, \quad k = \overline{1, k}.$

2. Построение численного метода

Задачу предлагается решать методом конечных разностей. Для построения разностной схемы модифицируем исходную систему уравнений (1) и приведем ее к диагональной форме, используя инварианты Римана.

2.1. Вывод системы уравнений для инвариантов Римана

На первом шаге приведем матрицы L и C к диагональной форме. Так как в линии электропередачи электромагнитная волна распространяется с одинаковой скоростью $a \leq c_0$, где c_0 – ско-

рость света, то должно выполняться условие, что $LC = CL = \frac{1}{a^2}E$, где E – единичная матрица [4, 5]. Это означает, что симметричные матрицы L и C приводятся к диагональной форме одной и той же ортогональной матрицей Q :

$$L = Q\Lambda_L^2 Q'; \quad C = Q\Lambda_C^2 Q', \quad (6)$$

где Λ_L и Λ_C – диагональные матрицы, по диагонали которых расположены величины $\lambda_{L,k}, \lambda_{C,k}$ и $k = \overline{1, n}$, которые равны корням квадратным от собственных значений матриц L и C . Величины $\lambda_{L,k}, \lambda_{C,k}$, располагаются в матрицах Λ_L и Λ_C таким образом, что их произведение с одинаковым номером k равняется скорости распространения электромагнитной волны, т.е.

$$\frac{1}{\lambda_L \lambda_C} = a, \quad k = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Вместо токов и напряжений вводим новые функции $w_1 = Q'i$, $w_2 = Q'u$, и преобразуем систему (1), приведя к виду

$$\begin{aligned} \Lambda_L^2 \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial x} + R w_1 &= 0, \quad \text{где } R = Q'RQ, \\ \Lambda_C^2 \frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial x} + G w_2 &= 0, \quad \text{где } G = Q'GQ. \end{aligned} \quad (8)$$

Вместо w_1, w_2 вводим функции v_1, v_2 по правилу

$$\begin{aligned} v_1 &= \Lambda_L w_1, v_2 = \Lambda_C w_2, \text{ или} \\ w_1 &= \Lambda_L^{-1} v_1, w_2 = \Lambda_C^{-1} v_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \Lambda_L^{-1} \Lambda_C^{-1} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \Lambda_L^{-1} R \Lambda_L^{-1} v_1 &= 0; \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \Lambda_C^{-1} \Lambda_L^{-1} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \Lambda_C^{-1} G \Lambda_C^{-1} v_2 &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \alpha \frac{\partial v_2}{\partial x} + \gamma_R v_1 &= 0; \quad \gamma_R = \Lambda_L^{-1} R \Lambda_L^{-1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \alpha \frac{\partial v_1}{\partial x} + \gamma_C v_2 &= 0; \quad \gamma_C = \Lambda_C^{-1} G \Lambda_C^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Вводим инварианты Римана r_1 и r_2 вида

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2); \quad r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2) \text{ и получаем}$$

уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial t} + \alpha \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{1}{2}(\lambda_R + \gamma_C) r_1 + \frac{1}{2}(\lambda_R - \gamma_C) r_2 &= 0; \\ \frac{\partial r_2}{\partial t} - \alpha \frac{\partial r_2}{\partial x} + \frac{1}{2}(\lambda_R - \gamma_C) r_1 + \frac{1}{2}(\lambda_R + \gamma_C) r_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, вместо исходной системы уравнений (1) для неизвестных функций $u(x, t), i(x, t)$ получаем систему (11) для неизвестных $r_1(x, t), r_2(x, t)$. Эти функции связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda_L Q' i + \Lambda_C Q' u); \quad r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda_L Q' i - \Lambda_C Q' u); \\ u &= \frac{1}{\sqrt{2}} Q \Lambda_C^{-1} (r_1 - r_2); \quad i = \frac{1}{\sqrt{2}} Q \Lambda_L^{-1} (r_1 + r_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Начальные и граничные условия (3) и (4) для r_1, r_2 принимают вид:

$$\begin{aligned} r_1(x, t) = r_2(x, t) = 0, \quad x \in [0, l] \\ r_1(0, t) = \sqrt{2} \Lambda_C Q' U_o(t) + r_2(0, t); \\ r_2(l, t) = A r_1(l, t), \\ A = (Q \Lambda_C^{-1} + R_S Q \Lambda_L^{-1})^{-1} (Q \Lambda_L^{-1} - R_S Q \Lambda_L^{-1}). \end{aligned} \quad (13)$$

2.2. Построение разностной схемы

В прямоугольнике $D = \{(x, t) : x \in (0, l)\}$ при $t \in (0, T_{\max})$ введем сетку $\bar{\omega}_{ht} = \{(x_p, t_q) : x_p = ph, t_q = q\tau, p = \overline{0, N}, q = \overline{0, M}\}$ с шагами h и τ : $h = l / N, \tau = T_{\max} / M$, где N и M , соответственно, количество шагов по координатам x и t . На этой сетке определим функции дискретного аргумента $r_{1,p}^q = r_1(x_p, t_q); r_{2,p}^q = r_2(x_p, t_q); u_p^q = u(x_p, t_q); i_p^q = i(x_p, t_q)$ и разностные производные вычисляются как:

$$\begin{aligned} (r_1)_t &= r_{1,t} = (r_{1,p}^{q+1} - r_{1,p}^q) / \tau; \\ (r_1)_{\bar{x}} &= r_{1,\bar{x}} = (r_{1,p}^q - r_{1,p-1}^q) / h; \\ (r_2)_x &= r_{2,x} = (r_{2,p+1}^q - r_{2,p-1}^q) / h. \end{aligned}$$

Разностная схема, которая аппроксимирует систему (11) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} r_{1,t} + \alpha r_{1,\bar{x}} + \frac{1}{2}(\lambda_R + \gamma_C) r_{1,p}^{q+1} + \frac{1}{2}(\lambda_R - \gamma_C) r_{2,p}^q &= 0; \\ r_{2,t} - \alpha r_{2,x} + \frac{1}{2}(\lambda_R - \gamma_C) r_{1,p}^q + \frac{1}{2}(\lambda_R + \gamma_C) r_{2,p}^{q+1} &= 0; \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) вычисляются последовательно значения инвариантов r_1, r_2 для значений номеров

временных слоев $q=1,2,\dots,M$, начиная с известных значений на нулевом слое: $r_{1,p}^0 = r_{2,p}^0 = 0, p = \overline{0, N}$. На каждом временном слое с номером q из уравнения системы (14) вычисляются значения $r_{1,p}^q, p = \overline{1, N}$ и $r_{2,p}^q, p = \overline{0, (n-1)}$. Недостающие значения инвариантов в начале и конце линии доопределяются из граничных условий (13).

$$r_{1,0}^q = \sqrt{2} \Lambda_C Q' U_\theta(t_q) + r_{2,N}^q; \quad r_{2,N}^q = A r_{1,N}^q. \quad (15)$$

2.3. Минимизация эффектов диссипации и дисперсии

Покажем, что построенная разностная схема (14), (15) обладает минимально возможными величинами диссипационных и дисперсионных членов. Для этого воспользуемся методом первого дифференциального приближения (ПДП) (the method of modified equation) [11]. Запишем уравнения системы (11) в виде одного уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \Gamma \mathbf{r} = 0, \quad (16)$$

где $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \gamma_- \\ \gamma_- & \gamma_+ \end{pmatrix}$,

$$\gamma_+ = \frac{1}{2}(\gamma_R + \gamma_C), \quad \gamma_- = \frac{1}{2}(\gamma_R - \gamma_C).$$

Запишем разностную схему с весовой матрицей α

$$\mathbf{r}_t + A \mathbf{r}_x \frac{h}{2} + \mathbf{r}_{xx} + \Gamma[\alpha \hat{\mathbf{r}} + (E - \alpha)\mathbf{r}] = 0 \quad (17)$$

и построим матрицу α исходя из условия минимизации диссипативных и дисперсионных эффектов. В (17) использовали обозначения:

$$\mathbf{r}_x = (\mathbf{r}_x + \mathbf{r}_{\bar{x}}) = \frac{\mathbf{r}_{p+1}^q - \mathbf{r}_{p-1}^q}{2h};$$

$$\mathbf{r}_{xx} = \frac{\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_{\bar{x}}}{h} = \frac{\mathbf{r}_{p+1}^q - 2\mathbf{r}_p^q + \mathbf{r}_{p-1}^q}{h^2};$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_p^q; \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_p^{q+1}; \quad A_+ = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha E; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \tau \mathbf{r}_t$ и $\alpha \hat{\mathbf{r}} + (E - \alpha)\mathbf{r} = \mathbf{r} + \tau \alpha \mathbf{r}_t$, то схему (17) можно записать в виде

$$(E + \tau \Gamma \alpha) \mathbf{r}_t + A \mathbf{r}_x \frac{h}{2} + \mathbf{r}_{xx} + \Gamma \mathbf{r} = 0. \quad (18)$$

Разложение в ряд Тейлора в окрестности точки (x_p, t_q) получим следующие аппроксимации разностных производных:

$$\mathbf{r}_t = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + O(\tau^2); \quad \mathbf{r}_x = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + O(\tau^2);$$

$$\mathbf{r}_{xx} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2} + O(h^2).$$

Подставляя (19) в (18), и отбрасывая члены второго порядка точности по шагам τ и h , получим гиперболическую форму ПДП уравнения (18):

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \Gamma \mathbf{r} \right) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \tau \Gamma \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} - \frac{h}{2} A_+ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2} = 0. \quad (20)$$

Из формулы (20) видно, что это уравнение отличается от исходного уравнения (16), которое имеет первый порядок точности по τ и h и определяет диссипативные и дисперсионные члены. Это выражение называется первым дифференциальным приближением (ПДП) [11] и определяет порядок аппроксимации диссипативных и дисперсионных членов и качественные свойства построенной разностной схемы. Минимизация данного выражения позволит минимизировать эффекты диссипации и дисперсии.

Преобразуем часть уравнения (20), которая представлена членами:

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \tau \Gamma \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} - \frac{h}{2} A_+ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2}. \quad (21)$$

В качестве следствия из (16) можно получить следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} - A^2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2} - (A\Gamma + \Gamma A) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} - \Gamma^2 \mathbf{r} = 0. \quad (22)$$

Исключая при помощи (22) производную $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}$ в компонентах, представленных в (21), после некоторых преобразований, получим параболическую форму ПДП:

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \tau \Gamma \alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} - \frac{h}{2} A_+ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2} =$$

$$= \left(\frac{\tau}{2} A^2 - \frac{h}{2} A_+ \right) \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2} + \quad (23)$$

$$+ \tau \left[\frac{1}{2} (A\Gamma + \Gamma A) - \Gamma \alpha A \right] \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \frac{\tau}{2} (\Gamma - 2\Gamma \alpha) \Gamma \mathbf{r}.$$

Из выражения (23) видно, что если выбрать $\tau = h/a$, то первый член, определяющий дисси-

пацию разностной схемы становится равным нулю. Для обнуления второго члена, определяющего дисперсию схемы, выберем матрицу α из равенства нулю выражения в квадратных скобках:

$$\Gamma\alpha A = \frac{1}{2}(A\Gamma + \Gamma A) \text{ или } \alpha = \frac{1}{2}(E + \Gamma^{-1}A\Gamma A^{-1}). \quad (24)$$

Если подставить полученное выражение (24) для весовой матрицы α в разностную схему (17) и учесть, что

$$\Gamma\alpha = \frac{1}{2}(A\Gamma A^{-1} + \Gamma) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_+ & \gamma_- \\ \gamma_- & \gamma_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_+ & \gamma_- \\ \gamma_- & \gamma_+ \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} \gamma_+ & -\gamma_- \\ -\gamma_- & \gamma_+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_+ & \gamma_- \\ \gamma_- & \gamma_+ \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \gamma_+ & 0 \\ 0 & \gamma_+ \end{pmatrix},$$

$$\Gamma(E - \alpha) = \Gamma - \Gamma\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_- \\ \gamma_- & 0 \end{pmatrix},$$

то свободный член преобразуется к уравнениям вида, представленных в уравнение (14).

3. Результаты апробации схемы расчета волнового процесса численным методом

Предложенная разностная схема была реализована в виде комплекса программ в системе Матлаб. В качестве объекта исследования была выбрана двухцепная воздушная линия электропередач номинальным напряжением 110 кВ при расположении проводников фаз в горизонтально[3]. Математическая модель учитывает 6 проводников линии, а проводники фаз сближены. Геометрия расположения проводков компактной линии 110 кВ приведена в работе [7.]

При расчете волнового процесса использованы параметры линии с 6 проводами при следующих значениях погонных параметров: $L(\mu H / m)$; $C(pF / m)$; $R(Oh / m)$; $G(\mu Sm / m)$.

Погонное сопротивление проводов линии равно: $R = 0.0042 \text{ Ом} / \text{м}$, а компонента обозначенная как E , представляет единичную матрицу. Длина линии равна 150 км, количество шагов разностной сетки $N = 40$.

В расчетную программу были введены два весовых параметра α_1 и α_2 таким образом, чтобы при значениях $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0$ вычисления производились по построенной схеме с матрицей α представленной соотношениями (24). При других значениях α_1 и α_2 вычисления проводятся

по расчетным схемам с большими значениями дисперсионного члена.

$$L = \begin{pmatrix} 1.619 & 0.648 & 0.319 & 0.286 & 0.192 & 0.177 \\ 0.648 & 1.619 & 0.360 & 0.319 & 0.209 & 0.192 \\ 0.319 & 0.360 & 1.619 & 0.648 & 0.319 & 0.286 \\ 0.286 & 0.319 & 0.648 & 1.619 & 0.360 & 0.319 \\ 0.192 & 0.209 & 0.319 & 0.360 & 1.619 & 0.648 \\ 0.177 & 0.192 & 0.286 & 0.319 & 0.648 & 1.619 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 8.367 & -3.035 & -0.681 & -0.504 & -0.262 & -0.229 \\ -3.035 & 8.491 & -0.922 & -0.648 & -0.307 & -0.262 \\ -0.681 & -0.922 & 8.585 & -2.888 & -0.648 & -0.504 \\ -0.504 & -0.648 & -2.888 & 8.585 & -0.922 & -0.681 \\ -0.262 & -0.307 & -0.649 & -0.922 & 8.491 & -3.035 \\ -0.229 & -0.262 & -0.504 & -0.681 & -3.035 & 8.367 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 0.0303 & -0.019 & -0.0027 & -0.0027 & -0.0016 & -0.0006 \\ -0.019 & 0.0314 & -0.0044 & -0.0024 & -0.0009 & -0.0007 \\ -0.0027 & -0.0044 & 0.0319 & -0.0181 & -0.0024 & -0.0016 \\ -0.0027 & -0.0024 & -0.0181 & 0.0319 & -0.0044 & -0.0027 \\ -0.0016 & -0.0009 & -0.0024 & -0.0044 & 0.0314 & -0.0019 \\ -0.0006 & -0.0007 & -0.0016 & -0.0027 & -0.0019 & 0.0303 \end{pmatrix};$$

С целью получения наглядных результатов влияния предложенного подхода минимизации дисперсионных и диссипативных эффектов принято в качестве тестового сигнала использовать единичный скачок напряжения. Такие сигналы являются тестовыми при исследовании динамических свойств различных объектов. При выполнении тестового расчета волнового процесса принято, что начальные значения токов и напряжений являются, а форма входного напряжения $U_0(t)$ из (4) имеет вид ступеньки.

На рис. 1,а,б,в представлены результаты расчетов при $\tau = h/a$ для различных значений параметров α_1 и α_2 . Для сравнения, на рис. 1,г приведены результаты вычислений для случая $\tau = 0.9h/a$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$. Результаты расчета волнового процесса даны на момент времени когда волны напряжения и тока прошли половину длины линии для разных значений параметров α_1 и α_2 .

Из графика на рис. 1(а) видно, что при значениях весовых параметров $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0$, определенных согласно соотношениям (24), входной импульс распространяется по линии без дисперсионных искажений (затухание вызвано наличием в линии ненулевого продольного сопротивления R и поперечной активной проводимости G). Если вычисления проводятся со значениями мат-

рицы α , отличными от оптимальных $\alpha_1 = 0; \alpha_2 = 1$ (рис.1б) или $\alpha_1 = 0.5; \alpha_2 = 0.5$ (рис.1в), что следует из (24), то на фронте волны появляются нефизические искажения. Эти искажения являются ошибкой численного метода расчета волнового процесса в линии с распределенными параметрами. В данном исследовании показано, что при оптимальном выборе весовых коэффициентов α_1 и α_2 имеется возможность значительно снизить дисперсионный и диссипативные эффекты, а следовательно повысить точность численного решения задач распространения волн в цепях с распределенными параметрами.

Для сравнения, на рис. 1,г приведены результаты расчетов со значением шага по времени равным $\tau = 0.9h/a$ и значениями весовых коэффициентов $\alpha_1 = 0.5; \alpha_2 = 0.5$. Видно, что в этом случае на результаты численного решения оказывает существенное влияние диссипативный член, представленный в соотношении (23).

В случаях рис 1б, рис 1в временной шаг вычисляется как $t=h/a$. При этом диссипативный член меньше дисперсионного и как следствие диссипации не видно, а дисперсия явно проявляется, когда α_1 и α_2 не равны 1 и 0.

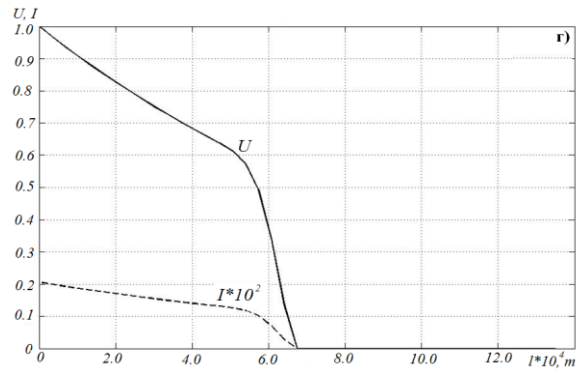
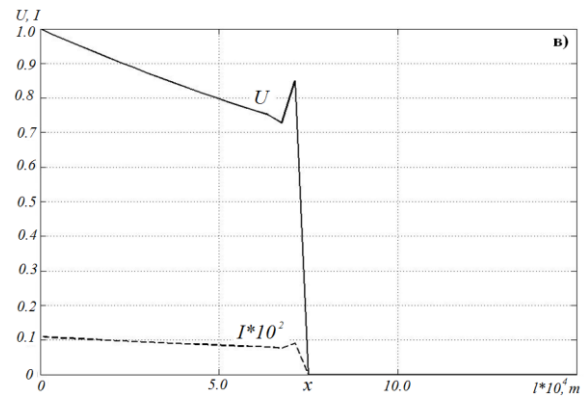
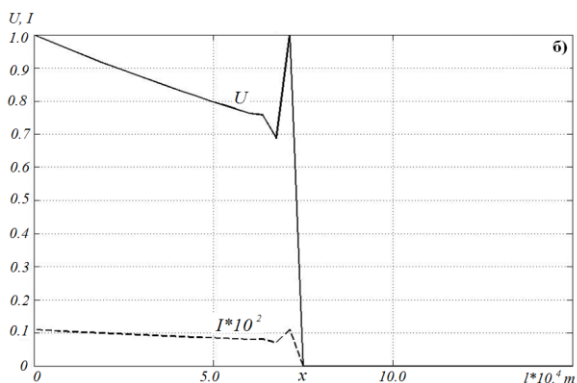
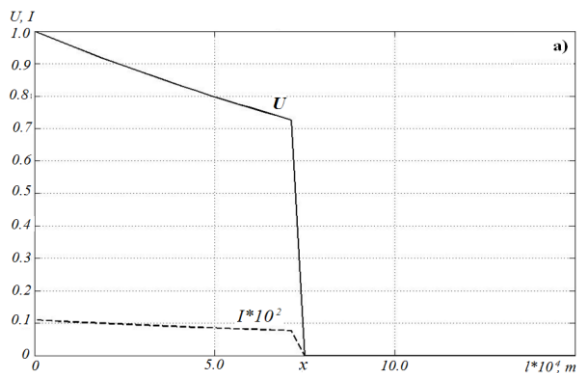


Рис. 1. Распределение тока I и напряжения U вдоль линии

Выводы

1. Разработана математическая модель многопроводной электрической линии с распределенными параметрами с потерями и получены соотношения для расчета токов и напряжений в фазной системе координат.

2. Дано обоснование численного метода расчета режима в линии с распределенными параметрами с учетом взаимовлияния фаз и нагрузки и сформулированы условия для минимизации диссипативных и дисперсионных эффектов численной схема расчета волновых процессов, построена и проверена разностная схема численного счета, обладающая минимальными значениями диссипативных и дисперсионных эффектов для двухфазной воздушной линии электропередач 110 кВ.

Список использованной литературы

1. Вебер, Э. Переходные процессы в линейных цепях [Текст]. Том I. Цепи с сосредоточенными параметрами, двухполюсники. Перевод с англ. Гуревич Е. И. и Слуцкий В. В. под ред. Теумина И. И. М.: Изд. «Советское радио», 1958. – 392 с.

2. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи [Текст]. Учеб. для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей.

стей вузов. –7-е изд., перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1978. –528с.

3. Постолатий, В. М. Компактные управляемые самокомпенсирующиеся высоковольтные линии электропередачи переменного тока [Текст]. (в трех частях), Кишинев: ТАИМ, 2017. - 732 с. ISBN 978-9975-62-404-6.

4. Berzan, V., Patsiuk, V., Rybakova, G. Numerical Method for Calculating Non-stationary Processes in the Nonhomogeneous Electric Circuit. Direct and Reverse Problem [Electronic resource]. Problemele Energeticii Regionale, Nr., 2(34)/ 2017, pp.23-35. ISSN 1857-0070. Access Mode: http://journal.ie.asm.md/assets/files/03_02_34_2017.pdf

5. Маевский, Д. А., Маевская, Е. Ю., Семенюг, А. Н., Савельев, А. А. Коэффициент полезного действия двухпроводного электрического кабеля с учетом взаимных влияний между его проводниками [Электронный ресурс]. Електротехнічні та комп'ютерні системи. № 24 (100)/2017. -с. 90-95. ISSN 2221-3805.

6. Маевский, Д. А., Семенюг, А. Н., Кучеренко, Г. Н. Влияние взаимных связей между проводниками кабеля на режим работы электрических сетей [Электронный ресурс]. Electrotechnic and computer systems, № 19 (95)/2015, pp. 142–145. ISSN 2221-3805.

7. Пацук, В. И., Берзан, В. П., Рыбакова, Г. А. Расчет магнитных полей линии электропередачи [Электронный ресурс]. Problemele Energeticii Regionale, Nr., 3(32)/ 2016, pp.15-26. ISSN 1857-0070. Access Mode: http://journal.ie.asm.md/assets/files/02_03_32_2016.pdf

8. Patsiuk, V., Ribacova, G. The solution of the cable equations by means of finite difference time domain method [Electronic resource]. Problemele Energeticii Regionale, Nr., 1(12)/ 2010, pp.16-21. ISSN 1857-0070. Access Mode: <http://journal.ie.asm.md/ro/contents/elektr-onnyij-zhurnal-n-112-2010>

9. Yee, K., S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. [Text]. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on. Vol. 14/1966, pp. 302–307.

10. Taflove, A. and Brodwin, M. E. Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations [Text]. Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on. Vol. 23/1975. p. 623–630.

11. Шокин, Ю. И., Яненко, Н. Н. Метод дифференциального приближения. Применение

к газовой динамике [Текст]. - Новосибирск: Наука, 1979, 221 с.

References

1. Weber, Ernst (1958). “Linear transient analysis” [Perehodnie protessi v lineinih tepeh]. Volume I. Lumped-Parameter two-Terminal Networks. M.: Sovetskoe radio, 392p.

2. Bessonov, L. A. (1978). “Theoretical fundamentals of electrical engineering: Electric circuits [Teoreticheskie osnovy electrotehniki. Electricieskie tepi]./Uceb. dlea studentov electrotehniceskih, energeticeskih i priborostroitelinih spetialinostei VU-Zov.-7-e izd., pererab.i dop.-M.: Vissh. sk. -528s..

3. Postolatii, V. M. (2017). “Compact Controlled Self-compensating High Voltage Alternating Current Electrical Lines. (in three parts)” [Compactnie upravleaemie samocompensi-ruiusciesea visokovolitnie linii electropredaci peremenogo toca], Ki-shinau: TASM, 732 p. ISBN 978-9975-62-404-6.

4. Berzan, V., Patsiuk, V., Rybakova, G. (2017). “Numerical Method for Calculating Non-stationary Processes in the Nonhomogeneous Electric Circuit. Direct and Reverse Problem”. Problemele Energeticii Regionale, Nr., 2(34), pp.23-35. ISSN 1857-0070, available at: http://journal.ie.asm.md/assets/files/03_02_34_2017.pdf

5. Maevsky, D. A., Maevskaya, E. J., Semenyug, A. N.; Savelev, A. (2017). “Efficiency of two-wire electric cables in view of mutual influence between its wiring”. [Koeffitient poleznogo deistvia dvuhprovodnogo electriceskogo cabelya s ucetom vzaimnogo vlianiya mejdu egoprovodnikamy], Electrotechnic and computer systems, № 24 (100), pp.90-95. ISSN 2221-3805.

6. Maevsky, D. A., Semenyug, A. N., Kucherenko, G. N. (2015). “Influence of the coupling between the cables conductors on the operation mode of electric networks” [Vliyanie vzaimnyih svyazey mezhdu provodnikami kabelya na rezhim raboty elektricheskikh setey]. Electrotechnic and computer systems, № 19 (95), pp. 142–145. ISSN 2221-3805.

7. Patsiuk, V., Berzan, V., Rybacova, G. (2016). “Calculation of the Magnetic Fields of the Electric Power Line” [Rascet magnitnih polei linii electropredaci], Problemele Energeticii Regionale, Nr., 3(32), pp.15-26. ISSN 1857-0070. available at: http://journal.ie.asm.md/assets/files/02_03_32_2016.pdf

8. Patsiuk, V., Ribacova, G. (2010). “The solution of the cable equations by means of finite difference time domain method”. Problemele Energeticii Regionale, Nr., 1(12), pp.16-21. ISSN 1857-0070. available at: <http://journal.ie.asm.md/ro/contents/elektr-onnyij-zhurnal-n-112-2010>

9. Yee, K. S. (1966). "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media". *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*. Vol. 14, pp. 302–307.

10. Taflov, A. and Brodwin, M. E. (1975). "Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations". *Microwave Theory*

and Techniques, *IEEE Transactions on*. Vol. 23, 1975, pp. 623–630.

11. Shokin, Iu. I., Ianenko N. N. (1979) "The method of differential approximation. Application to gas dynamics". [Metod differentsialinogo priblijenia. Primeneie k gazovoi dinamike].- Novosibirsk: Nauka, 221 p.

MATHEMATICAL MODEL OF A MULTIWIRE TRANSMISSION LINE WITH MINIMAL DISSIPATIVE AND DISPERSIVE EFFECTS

V. I. Patsyuk, V. P. Berzan, G. A. Rybakova

Institute of Power Engineering of the Academy of Sciences of Moldova

Abstract. *In this paper, we consider the problem of calculating the regime in a long multiwire line by a numerical method and the justification of the method for minimizing parasitic oscillations in the numerical solution of telegraph equations. A mathematical model of a multiwire electric line with distributed parameters with losses is given. Relations are obtained for the calculation of currents and voltages in the phase coordinate system. The justification of the numerical method for calculating the regime in such a line is given, taking into account the mutual influence of the phases and the load of the line. For this, the method of the first differential approximation was used. A difference modified calculated scheme for telegraph equations in a diagonal form is constructed using Riemann invariants, with dissipative and dispersion terms in these relations. This expression is called the first differential approximation and determines the order of approximation of the dissipative and dispersion terms and the qualitative properties of the constructed difference scheme. Minimizing this expression will minimize the effects of dissipation and dispersion. The conditions for minimizing the dissipative and dispersion terms in the calculated numerical scheme and minimizing the error in the numerical solution are obtained. The results of the calculation of the wave process in the phase of an air multiwire line with a voltage of 110 kV are presented. Two weight parameters were introduced into the calculation program in such a way as to take into account the limiting states of the calculated scheme—dispersion and dissipation effects. For values that correspond to the condition for minimizing the dispersion effect, the input pulse propagates along the line without distortion, the damping is caused by the presence in the line of non-zero longitudinal resistance and the transverse active conductivity of the line. If the calculations are performed with non-optimal values of the weight parameters, non-physical distortions appear at the wave front. The obtained results confirm the possibility of minimizing the dissipative and disperse effects of the numerical solution when using the proposed mathematical model of a multiwire line and the calculation scheme.*

Keywords: *mathematical model, difference scheme, Riemann invariants, first differential approximation, minimization of dissipative and dispersion terms.*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МНОГОПРОВОДНОЇ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ЛІНІЇ З МІНІМІАЛЬНИМИ ДИСИПАТИВНИМИ І ДИСПЕРСІОНАЛЬНИМИ ЕФФЕКТАМИ

В. І. Пацюк, В. П. Берзан, Г. А. Рибаківа

Інститут енергетики Академії наук Молдови

Анотація. *У даній роботі розглядається задача розрахунку режиму в довгій многопровідній лінії чисельним методом і обґрунтування способу мінімізації паразитних осциляцій в чисельному рішенні телеграфних рівнянь. Наведено математичну модель многопровідної електричної лінії з розподіленими параметрами з втратами. Отримано співвідношення для розрахунку струмів і напруг в фазній системі координат. Дано обґрунтування чисельного методу розрахунку режиму в такій лінії з урахуванням взаємовпливу фаз і навантаження лінії. Для цього був використаний метод пер-*

шого диференціального наближення. Побудована різностная модифікована розрахункова схема для телеграфних рівнянь в діагональній формі з використанням інваріантів Рімана з виділенням в цих соотношеніе дисипативних і дисперсійних членів. Цей вислів називається першим диференціальним наближенням і визначає порядок апроксимації дисипативних і дисперсійних членів і якісні властивості побудованої різницевої схеми. Мінімізація цього виразу дозволяє мінімізувати ефекти дисипації і дисперсії. Отримано умови мінімізації дисипативних і дисперсійних членів в розрахунковій чисельній схемі і мінімізації похибки чисельного рішення. Приведены результати расчета волнового процесса в фазе воздушной многопроводной линии напряжением 110 кВ. У розрахункову програму були введені два вагових параметра таким чином, щоб врахувати граничні стани розрахункової схеми - ефекти дисперсії і дисипації. При значеннях, які відповідають умові мінімізації ефекту дисперсії, вхідний імпульс поширюється по лінії без дисперсійних спотворень, загасання викликано наявністю в лінії ненульового поздовжнього опору і поперечної активної провідності лінії. Якщо обчислення проводяться з неоптимальними значеннями вагових параметрів, то на фронті хвилі з'являються нефізичні спотворення. Отримані результати підтверджують можливість мінімізації дисипативних і дисперсійних ефектів чисельного рішення при використанні запропонованої математичної моделі многопроводной лінії і схеми розрахунку.

Ключові слова: математична модель, різницева схема, інваріанти Рімана, перше диференціальне наближення, мінімізації дисипативних і дисперсійних членів.

Получено 14.03.2018



Пацюк Владимир Ильич, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института энергетики Академии наук Молдовы, доцент Молдавского Государственного Университета. Ул. Академическая, 5, МД2028, Кишинэу, Республика Молдова, E-mail: patsiuk@mail.ru, тел. +373 22 735384

Vladimir Patsyuk, Dr., Assistant Professor, leading researcher of the Institute of Power Engineering of the Academy of Sciences of Moldova, assistant professor at the Moldavian State University. 5, Academy str, MD2028, Chisinau, Republic of Moldova, E-mail: patsiuk@mail.ru, тел. +373 22 735384

ORCID ID: 0000-0002-7520-2868



Берзан Владимир Петрович, доктор хабилитат технических наук, зам.директора по науке Института энергетики Академии наук Молдовы. Ул. Академическая, 5, МД2028, Кишинэу, Республика Молдова, E-mail: berzan@ie.asm.md, тел. +373 22 735384

Vladimir Berzan, Dr. of Science, Deputy Director for Science of the institute of Power Engineering of the Academy of Sciences of Moldova. 5, Academy str, MD2028, Chisinau, Republic of Moldova, E-mail: berzan@ie.asm.md, тел. +373 22 735384

ORCID ID: 0000-0001-7645-7304



Рыбакова Галина Алексеевна, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института энергетики Академии наук Молдовы, доцент Молдавского Государственного Университета. Ул. Академическая, 5, МД2028, Кишинэу, Республика Молдова, E-mail: gal_rib@mail.ru, тел. +373 22 735384

Galina Rybacova, Dr., Assistant Professor, leading researcher of the Institute of Power Engineering of the Academy of Sciences of Moldova, assistant professor at the Moldavian State University. 5, Academy str, MD2028, Chisinau, Republic of Moldova, E-mail: gal_rib@mail.ru, тел. +373 22 735384

ORCID ID: 0000-0001-7262-0629