УДК 330.115

Журавка А. В.
к.е.н., доцент
доцент кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій
Харківський національний університет будівництва та архітектури
Тімофєєв В. О.
д.т.н., професор
завідувач кафедри економічної кібернетики
та управління економічною безпекою
Мудаширу Тайо Мусбао
аспірант кафедри економічної кібернетики
та управління економічною безпекою
Харківський національний університет радіоелектроніки
E-mail: Andy_Zhuravka@mail.ru
E-mail: kafedra_eim@kture.kharkov.ua
E-mail: mudashirutayo@gmail.com

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СПІЛЬНОЇ ДИНАМІКИ РОБОЧОЇ СИЛИ І ВІЛЬНИХ РОБОЧИХ МІСЦЬ НА РИНКУ ПРАЦІ

Однією з головних складової зайнятості, що формують попит на робочу силу, є система зайнятості і динаміка робочих місць. Зайнятість є наслідком наявності робочих місць і стимулів, що визначають масштаби і співвідношення попиту та пропозиції робочої сили. Структура зайнятості в економіці в цілому повторює структуру робочих місць. Але для досягнення повної зайнятості необхідна збалансованість між робочою силою і наявністю вільних робочих місць.

У статті побудовано модель взаємодії робочої сили і вільних робочих місць на ринку праці. Проироблено детальний якісний аналіз цієї моделі, цілком досліджені біфуркаційні особливості, що приводять до небезпечних (не стійких) режимів функціонування ринку праці. Знайдені умови існування стійкого стану динаміки безробітного населення і вільних робочих місць. Таким чином, розроблено інструментарій, що дозволяє прогнозувати рівноважні рівні безробітного населення і вільних робочих місць.

Ключові слова: ринок праці, динаміка безробітного населення, динаміка вільних робочих місць, стійкий вузол, біфуркації типу «сідло-вузол».

Постановка проблеми. Однією з головних складової зайнятості, що формують попит на робочу силу, є система зайнятості і динаміка робочих місць. Зайнятість є наслідком наявності робочих місць і стимулів, що визначають масштаби і співвідношення попиту та пропозиції робочої сили. Структура зайнятості в економіці в цілому повторює структуру робочих місць. Можна сказати, що наявність вільних робочих місць є основною умовою існування попиту на робочу силу. Перехід до ринкової економіки висуває нові вимоги до політики зайнятості. По-перше, вплив держави не повинний перешкоджати реалізації вимог економічної ефективності, що припускає мобільність робочої сили, вивільнення зайвих працівників. Досить висока зайнятість повинна забезпечуватися не збереженням зайвої чисельності працівників, а створенням нових робочих місць, зниженням потреби населення в робочих місцях. По-друге, повинні створюватися умови для наближення оплати праці до необхідних витрат на відтворення робочої сили. Досягнення оптимально високої, економічно ефективної і соціально обґрунтованої зайнятості є невід'ємною і найважливішою складовою частиною процесу відновлення і подальшого підйому української економіки. Так, при економічному підйомі інтенсифікуються процеси створення нових робочих місць і підготовки нових кваліфікованих кадрів, поліпшуються умови оплати праці, зменшується рівень безробіття і збільшується зайнятість населення, що веде до росту чисельності робочої сили й інтенсивності її відтворення. У системі зайнятості велику роль грає приховане безробіття. Тому потенціал розширення зайнятості можна розглядати тільки при відсутності прихованого безробіття. Регіональні центри зайнятості при розробці програм сприяння зайнятості часто роблять оцінку вартості підтримки робочого місця і створення нового. Відомо, що витрати на створення нового робочого місця в десятки разів перевищують витрати на підтримку вже існуючого. Однак звідси не слід робити висновок про те, що не потрібно створювати нові робочі місця, а досить лише підтримувати на належному рівні вже існуючі. Політика в області розвитку системи робочих місць повинна бути досить гнучкої і враховувати специфіку окремих галузей і виробництв. Необхідно створювати нові робочі місця в перспективних галузях. У цьому випадку, крім пошуку необхідних інвестицій, проблема доповнюється задачею перепідготовки кадрів, тому що рівень професійної підготовки робочих масових професій часто не відповідає перспективним вимогам. Як уже було сказано, зайнятість є наслідком наявності робочих місць. Щоб стимулювати зайнятість, необхідно збільшувати кількість робочих місць за рахунок створення нових і підтримки вже існуючих, але з урахуванням відтворення робочої сили. Таким чином, для визначення умов досягнення повної зайнятості необхідно визначити умови збалансованості між робочою силою і наявністю вільних робочих місць. З'являється задача розробки інструментарію, щоб дозволив прогнозувати рівноважні рівні кількості безробітного населення і кількості вільних робочих місць.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблеми прогнозування рівноважних рівнів макроекономічних показників останнім часом приділяється велика увага [1]. Важливим аспектом моделювання є сучасні концепції конкуренції та кооперації [2, 3]. Ці погляди сучасної економічної теорії є джерелом [4, 5] та розвитком [6] формування постнеокласичної синергетичнаої парадигми, який випливає з праць вітчизняних та зарубіжних вчених [7-24].

Формування цілей статті. Основною метою роботи є розробка інструментарію (динамічної математичної моделі), що дозволить прогнозувати рівноважні рівні безробітного населення і вільних робочих місць, здійснювати пошук умов існування стійкого стану динаміки безробітного населення і вільних робочих місць, досліджувати умови існування біфуркаційних особливостей, що приводять до небезпечних (не стійких) режимів функціонування ринку праці.

Виклад основного матеріалу. У нашій моделі припустимо, що ріст робочої сили приведе до недовикористання трудових ресурсів, тобто з ростом робочої сили буде зменшуватися кількість вільних робочих місць, а отже, збільшиться навантаження на одне вільне робоче місце, і навпаки – при збільшенні вільних робочих місць буде зменшуватися кількість фахівців, що конкурують за ці робочі місця. Тому для досягнення повної зайнятості необхідна збалансованість між робочою силою і наявністю вільних робочих місць.

Взаємодію між чисельністю робочої сили, що конкурує за вільні робочі місця (L), і кількістю вільних робочих місць (P) відповідно до вищесказаного можна представити у вигляді системи двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \beta L(L\text{ст} - L) - \alpha P \\ \dfrac{dP}{dt} = \gamma P(P\text{ст} - P) - \delta L \end{cases} \qquad (1)$$

де *Lcm, Pcm* – стаціонарні рівні робочої сили, що конкурують за вільні робочі місця (при $P = 0$) і вільних робочих місць (при $L = 0$); α – коефіцієнт убування робочої сили, що конкурує за вільні робочі місця з появою нових робочих місць; δ – коефіцієнт убування вільних робочих місць при тиску на них робочої сили; β, γ – коефіцієнти стримування росту робочої сили, що конкурують за вільні робочі місця, і росту вільних робочих місць.

Проведемо якісний аналіз динамічної системи (1), за допомогою перетворень $x=\frac{L}{L_{cm}},\ y=\frac{P}{P_{cm}},\ \ldots$ динамічна система (1) приводиться до виду.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1) - a_1(y-1) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 y(y-1) - a_3(x-1) \end{cases} \qquad (2)$$

де $a_1 = \frac{\delta P_{cm}}{A B_{cm}^{3}},\ a_2 = \frac{\gamma P_{cm}}{A B_{cm}^{3}},\ a_3 = \frac{\varepsilon}{A \ldots}$ – безрозмірні позитивні параметри.

Із динамічної системи (2) відразу ж випливає наявність одиничної особливої точки (x_*, y_*) = (1,1). Інші три особливі точки знаходяться із рішення кубічного рівняння

$$x^3 - x^2 + a_1 x - \frac{a_3 a_1^2}{a_2} = 0 \qquad (3)$$

Матриця лінеаризованої системи (2) в довільної особливої точки (x_*, y_*) має вид

$$A = \begin{bmatrix} 2x_* - 1 & -a_1 \\ -a_3 & a_2(2y_* - 1) \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Детермінант і слід цієї матриці відповідно має вид

$$\det A = a_2(2x_* - 1)(2y_* - 1) - a_1 a_3 \qquad (5)$$

$$trA = 2x_* - 1 + a_2(2y_* - 1) \qquad (6)$$

При trA=0, $\det A = -a_2^2(2y_* - 1)^2 - a_1 a_3 < 0$ звідки витікає відсутність біфуркації народження циклу в системі, що розглядається (відсутність автоколивальних режимів). Біфуркація сідлового типу (типу вузол-сідло) відбувається у випадку, коли детермінант (5) дорівнює нулю.

Характеристичне рівняння в одиничній особливій точці

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -a_1 \\ -a_3 & a_2 - \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(a_2-\lambda) - a_1 a_3, \qquad (7)$$

де I – одинична матриця, λ – власні числа матриці A, зводиться до квадратного рівняння

$$\lambda^2 - (1 + a_2)\lambda + a_2 - a_1 a_3 = 0, \qquad (8)$$

рішення якого має вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(1 + a_2) \pm \sqrt{(a_2 - 1)^2 + 4a_1 a_3}\right]. \qquad (9)$$

Тут при a_1 a_3 >a_2 (detA<0) маємо λ_1<0, λ_2>0 і приходимо до нестійкої особливої точки типу сідло, при a_1 a_3 $\leq$ a_2 (detA $\geq$ 0) приходимо до нестійкого вузла.

Таким чином, одинична особлива точка при будь-яких параметрах нашої системи являється нестійкою. Вона відповідає нульовим значенням чисельності робочої сили (L_*=0) та кількості вільних робочих місць (P_*=0).

Для більш детального аналізу біфуркацій динамічної системи (2) скористуємося параметричним методом побудови біфуркаційних (граничних) кривих. Для цього, як і раніше, позначимо довільну особливу точку системи (2) через (x_*,y_*), тоді будемо мати наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_*(x_* - 1) - a_1(y_* - 1) = 0 \\ a_2 y_*(y_* - 1) - a_3(x_* - 1) = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Виразимо параметр a_1 через y_*

$$a_1 = \frac{a_2}{a_3}\left[1 + \frac{a_2}{a_3} y_*(y_* - 1)\right] y_*. \qquad (11)$$

Гранична крива області параметрів, при яких існують три різних стани рівноваги, крім одиничне, визначається із умови $\frac{da_1(y_*)}{dy_*} = 0$, відкіля шукана крива має наступний параметричний вид

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{a_2}{a_3}\left[1 + \dfrac{a_2}{a_3} y_*(y_* - 1)\right] y_* \\ a_2 = \dfrac{a_3}{y_*(2 - 3y_*)} \end{cases} \qquad (12)$$

При виключені з (12) параметру $\frac{a_2}{a_3}$, прийдемо до остаточного виразу

$$a_1 = \frac{1 - 2y_*}{(3y_* - 2)^2}, \quad a_2 = \frac{a_3}{y_*(2 - 3y_*)}. \qquad (13)$$

Можна показати, що ця крива збігається з параметричним представленням границі сідел (detA=0).

Виключаючи параметр y_* з виразу (13), прийдемо до не параметричного завдання цієї кривої

$$a_1=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\left[1\mp 2\sqrt{1-\frac{3a_3}{a_2}}\right]}{\left[-1\pm\sqrt{1-\frac{3a_3}{a_2}}\right]^2} \qquad (14)$$

Можна показати, що вираз (14) еквівалентно виразу, яке одержано при прирівнюванні до нуля дискримінанта кубічного рівняння (10). Щоб показати це, приведемо рівняння (10) за допомогою заміни $x=y+\frac{1}{3}$ до виду

$$y^3 + py + q = 0,\ \ p = a_1-1/3,\ q = 1/3a_1-\frac{a_3a_1^2}{a_2}-\frac{2}{27}. \qquad (15)$$

Дискримінант одержаного кубічного рівняння має вид $Q=\left(\frac{p}{3}\right)^2+\left(\frac{q}{2}\right)^2$. Після прирівнювання його до нуля, одержимо

$$\frac{1}{27}\left(a_1-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}a_1-\frac{a_3a_1^2}{a_2}-\frac{2}{27}\right)^2=0 \qquad (16)$$

Ми не будемо строго доводити тотожності виразів (15) і (16), а перевіримо їх при деяких характерних значеннях параметрів, наприклад, при $a_2=3a_3$, $a_1=1/3$; $a_3=5/3$, $a_2=9$, $a_1=7/25$. Така перевірка вказує на тотожність вищевказаних виразів. Вони говорять про збіг двох дійсних коренів кубічного рівняння (10). В залежності від знаку у виразі (14) для трьох дійсних коренів можливі два варіанти попарного їх збігу (виродження).

Для якісного аналізу динамічної системи (2) необхідно мати уявлення про її ізокліни (лініях рівного нахилу дотичних). Щоб їх одержати, розділимо одне рівняння системи (2) на інше

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_2y(y-1)-a_3(x-1)}{x(x-1)-a_1(y-1)}. \qquad (17)$$

У фазовій площини (x, y) звичайно розглядають дві характерні ізокліни. У випадку $\frac{dy}{dx}=0$ розглядають ізокліну горизонтальних дотичних (нульову ізокліну)

$$y(x) \equiv G(x) = 1 - \frac{a_2}{a_3}(1-x)x \qquad (18)$$

У випадку $\frac{dy}{dx} = \infty$ розглядають ізокліну вертикальних дотичних

$$x(y) \equiv Q(y) = 1 - \frac{(1-y)y}{a_1}. \qquad (19)$$

Розглянемо найбільш загальний випадок двох симетричних ізоклін, які мають чотири точки перетину. Ці точки перетину є також особливими точками динамічної системи (2). Отже, візьмемо наступні значення параметрів нашої динамічної системи: $a_1=1/4$, $a_2/a_3=4$. У цьому випадку ізокліни (18, 19) мають вигляд x=1-4y(1-y), y=1-4x(1-x) (рис 1).

Раніше ми показали в загальному випадку, що одинична особлива точка $(x_*,y_*)=(1,1)$ являється нестійкою. Друга особлива точка, яка лежить на прямій y=x, має вид $(x_*,y_*)=(1/4,1/4)$. Дослідимо її на стійкість. Матриця (4) в даному випадку має вид

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{a_2}{4} & -\frac{a_2}{2} \end{bmatrix}, \qquad (20)$$

звідки характеристичне рівняння $|A - \lambda I| = 0$ приводить до наступних власних значень

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(1+a_2) \pm \sqrt{1-a_2+a_2^2}}{4}. \qquad (21)$$

Легко показати, що $\lambda_1 < 0$ і $\lambda_2 < 0$ і, отже, особлива точка (1/4,1/4) являється стійким вузлом. У вихідних перемінних $L_*=3/4L_{ст}$, $P_*=3/4P_{ст}$. Неважко показати, що дві інші, симетричні відносно прямої y=x, особливі точки: (0.655; 0.095) і (0,095; 0,655) являються сідлами, тобто нестійкими точками. Напрямок сепаратрис для сідлових точок задається власними векторами матриці A лінеаризованої системи. Дана ситуація ілюструється розрахунковим фазовим портретом динамічної системи (2) при $a_1=1/4$, $a_2=1$, $a_3=1/4$ (рис. 2). Фазова траєкторія y=x (діагональ квадранта) являється рішенням вихідної системи в фазовій площині (17). Ця траєкторія, а також сепаратриси на рис. 2 не показані.

A

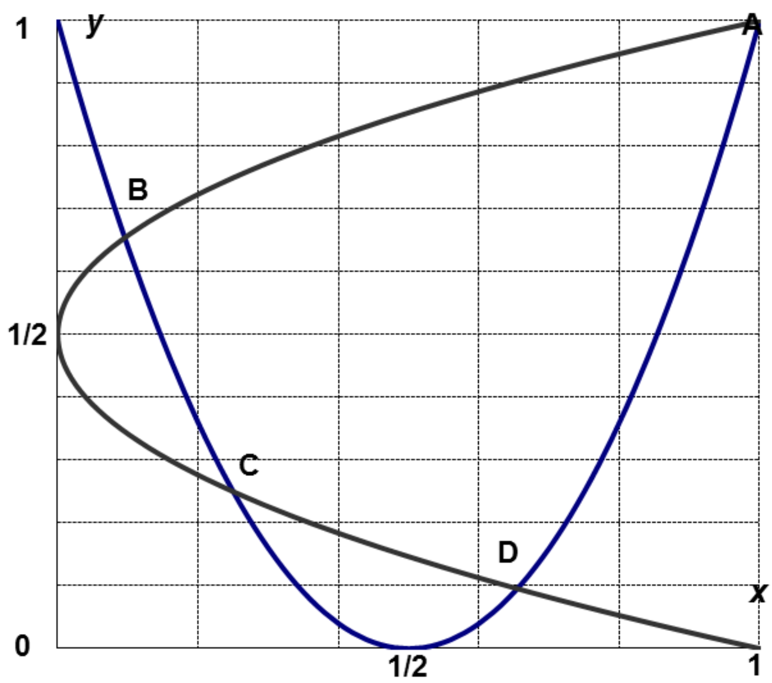


Рис. 1. Ізокліни (18) і (19) при $a_1 = \frac{1}{4}, \frac{a_2}{a_3} = 4$

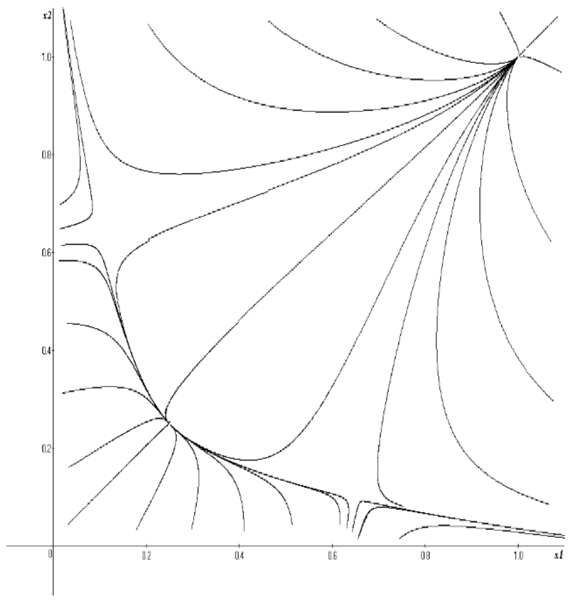


Рис. 2. Фазовий портрет динамічної системи (2)

при $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{4}$, $x_1 = x$, $x_2 = y$

Ці вироджения і відповідні скачки відбуваються на біфуркаційній множині ψ (a_1, a_2, a_3)=0, яка нами була отримана вище різними способами (14, 16). Фазовий портрет, показаний на рис. 2, являється перевернутим відображенням фазового портрету динамічної системи

$$\frac{dy}{dt} = \ldots \qquad \frac{dx}{dt} = \ldots \tag{22}$$

при $a_1 = a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = 1$.

Аналіз результатів числових експериментів показав (рис. 2), що область, обмежена двома симетричними сепаратрисами і сторонами одиничного квадрату являється аттрактором стійкої особливої точки (1/4,1/4). Діагональ квадрата, яка виходить з одиничної особливої точки, яка являєтья аттрактором і фазовий портрет симетричний відносно цієї діагоналі. При зближені стійкої і не стійкої (сідлової) точки область притягання (аттрактор) поступово зменшується і повністю зникає при виродженні стійкої точки. В нестійких областях (рис. 2), в околиці сідлових точок, відмічається швидкий вихід фазових кривих на границі одиничного квадранта (x=1, y=1) через 5-6 часових кроків. При досягненні траєкторією сторони квадрату x=1 поведінка динамічної системи визначається другим рівнянням системи (2), яке у випадку має стійку стаціонарну точку $y_*=0$. Ця ситуація відповідає $P_*=P_{ст}$, $L_*=0$. При досягненні траєкторією сторони квадранта y=1 поведінка динамічної системи визначається першим рівнянням системи (2), яке в цьому випадку має стійку стаціонарну точку $x_*=0$. Ця ситуація відповідає $P_*=0$, $L_*=L_{ст}$.

В ситуації, показаній на рис. 2, особлива точка (1,1) являється нестійким вузлом. Числові експерименти показують, що в околиці обох вузлів спостерігається повільний ріст фазових перемінних x і y з максимальним значенням росту в центральній частині діагоналі (при розгляданні руху по фазовій траєкторії y=x), що приводить до увігнуто-опуклих кривих x(t) і y(t).

Якщо для вузлових точок рух в їх околиці достатньо повільне, то для сідлових точок відсувається короткочасне уповільнення швидкості руху в їх околиці з подальшим швидким видаленням від них. За 5-10 часових кроків траєкторії ідуть практично на нескінченність (у відсутності обмежень на фазові перемінні) при рішенні динамічної системи методом Рунге-Кутта, в той же час вихід в стійку вузлову точку відбувається приблизно через 15 часових кроків.

У випадку пересічення ізоклін (19) і (20), наведеному на рис. 3, чисельний фазовий портрет динамічної системи наведено на рис. 4. Тут бачимо, як фазові траєкторії попадають в поле впливу сідлової точки B, ідуть вузькими пучками на сторони y=1 і x=1 одиничного квадрата, який розглядається.

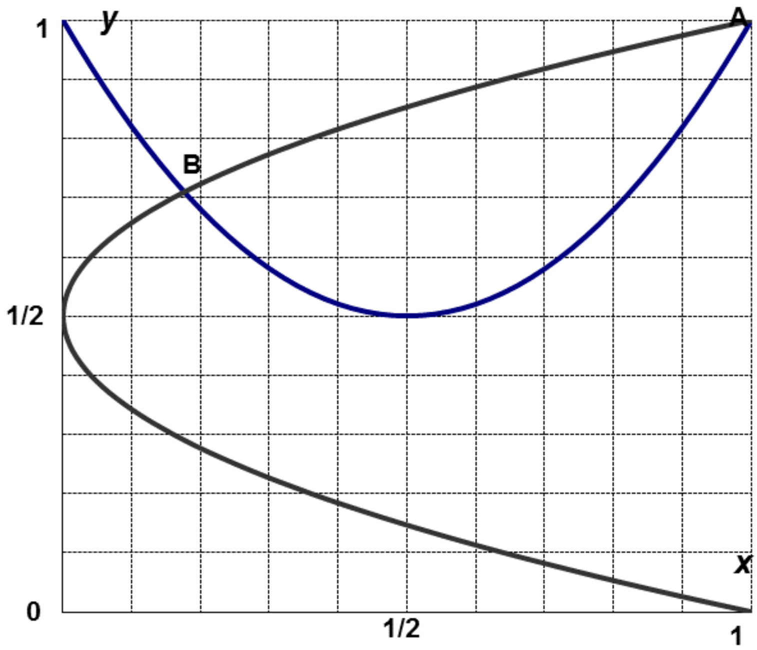


Рис. 3. Ізокліни (19) і (20) при $a_1=\frac{1}{2}, a_2=1, a_3=\frac{1}{4}$

У випадку виродження стійкої точки C (збіг її з сідлом D), показаним на рис. 5, фазовий портрет динамічної системи (2) приведено на рис. 6. Тут сідлові особливості, характерні для точок B і D (рис. 1, 2) зберігаються. На цьому рисунку добре видно рух по ізокліні (19).

Числові розрахунки біфуркаційних кривих (15) при різних значеннях a_3 показано на рис. 7, при цьому біфуркаційна крива при a_3=5/3 відповідає виродженню випадку, показаному на рис. 5 і 6.

Відмітимо, що великий теоретичний інтерес представляє пошук складних стохастичних режимів і динамічних нестійкостей в околиці лінії біфуркації динамічної системи при малих періодичних флуктуаціях параметрів цієї системи.

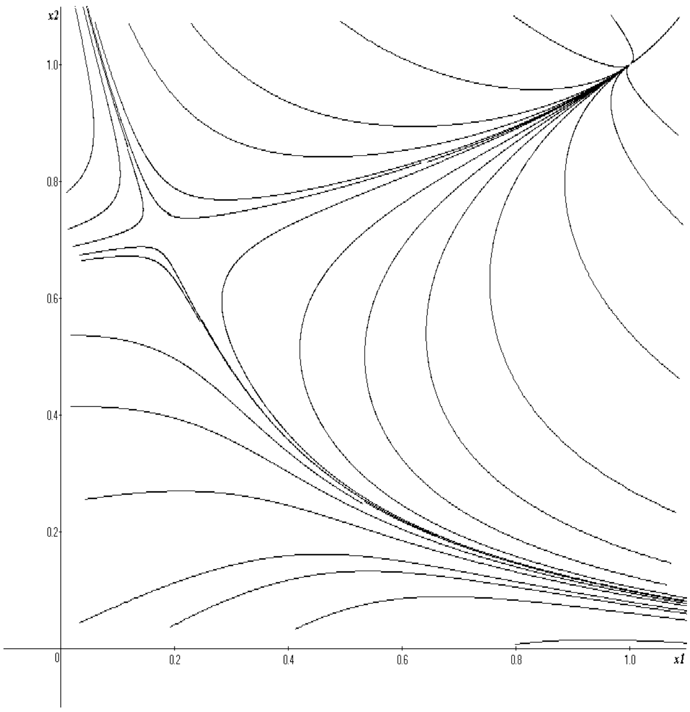


Рис. 4. Фазовий портрет динамічної системи (2)

при $a_1=\frac{1}{2}, a_2=1, a_3=1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$

У випадку системи (2), через відсутність в ній не грубих періодичних рухів (лінії петлі сепаратрис сідла та ін.) не відмічається появи гомоклінічних структур, що притягають, та відповідних їм стохастичних режимів при малих неавтономних періодичних обуреннях автономної динамічної системи. При таких збуреннях в числових експериментах на близькій динамічній системі (23) на лінії сідло-вузел було відмічено виникнення динамічних нестійкостей при деякій критичній амплітуді збурень (раптове виникнення дисциляційних рішень, що розходяться), причому ця амплітуда залежала від розташування початкової точки в стійкій області фазової площини (атракторне сідло-вузла).

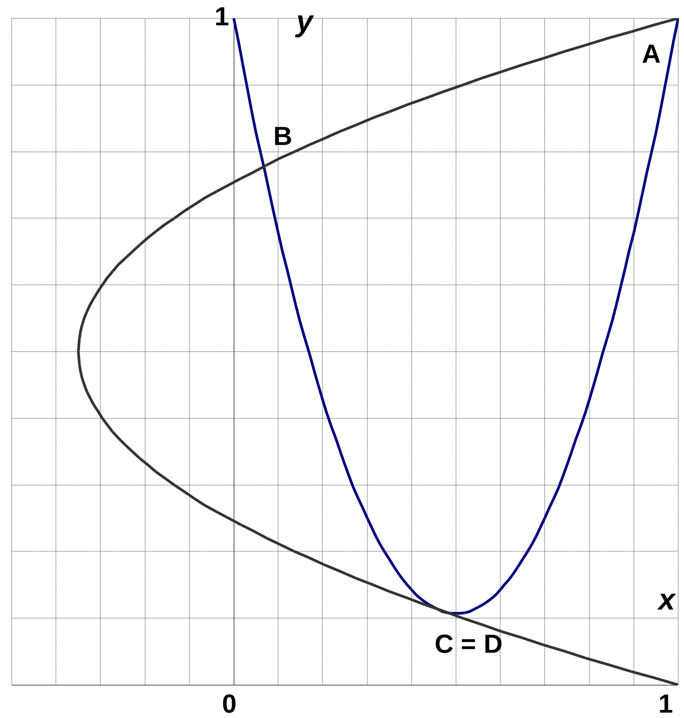


Рис. 5. Ізокліни (19) і (20) при $a_1 = \frac{7}{25}, a_2 = 9, a_3 = \frac{5}{3}$.

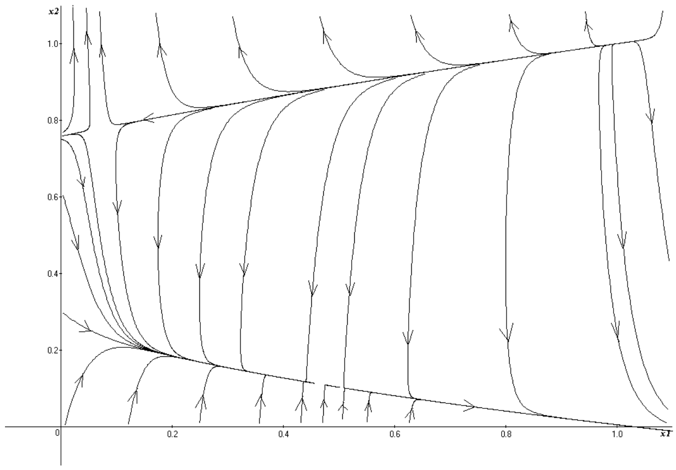
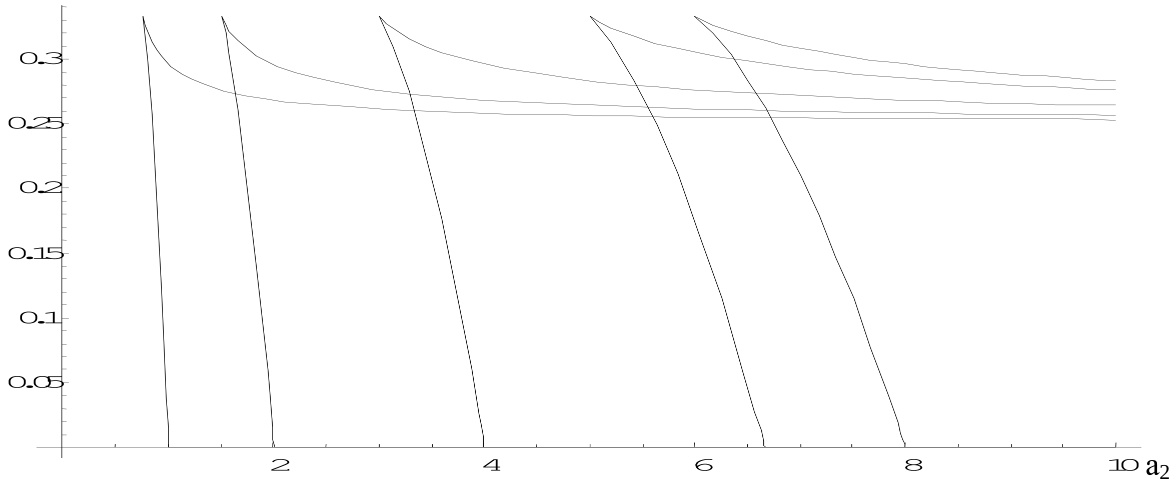


Рис. 6. Фазовий портрет динамічної системи (2)

при $a_1 = \frac{7}{25}, a_2 = 9, a_3 = \frac{5}{3}$, $x_1 = x$, $x_2 = y$



a_1 ¼ ½ 1 5/3 2

Рис. 7. Біфуркаційні криві (15) при різних значеннях параметра a_3

Чим ближче була початкова точка до складної особливої точки, тим менше була критична амплітуда. З іншого боку, чим далі була віддалена початкова точка від особливої точки (в області її атрактору), яка відповідала біфуркаційному незбуреному параметру, тим вона була більш стійкою до збурення цього параметру (у значенні більш пізнього виникнення зривів траєкторій).

Природно, що аналогічна ситуація буде спостерігатися і для нашої системи при розгляданні біфуркаційної кривої, заданої одним із виразів (15, 17), і задані осциляційного параметра, наприклад, параметра a_2 (t), у вигляді: $a_2(t) = a_2\,(1+\tilde{A}\sin\frac{2\pi}{T}t)$, де $\tilde{A}$ і T – амплітуда і період коливань, $a_2 = \overline{a_2(t)}$ – усереднений за періодом коливань T параметр, який лежить на біфуркаційній кривій (як відмічалося раніше, на цій кривій, наприклад, лежать значення параметрів a_i : a_1=7/25, a_2=9, a_3 =5/3).

Показано, що з чотирьох особливих точок динамічної системи (2) тільки одна є стійкої, і отже, реальна економічна система при своєму розвитку прагне до динамічної рівноваги, визначеній координатами цієї стійкої точки, що відповідає стабілізації робочої сили і вільних робочих місць на деяких стаціонарних (постійних) рівнях, що залежать від параметрів вихідної системи. При зміні цих параметрів може відбуватися виродження особливої стійкої точки (зближення і збіг з однією із сідлових точок, що відповідає біфуркації типу "вузол-сідло" і приводить до раптового стрибка зі стійкої точки в нескінченність), що відповідає відомим у літературі математичним катастрофам.

В області притягання до стійкої особливої точки виділяються два важливих режими поводження розглянутої динамічної системи, що мають наступну економічну інтерпретацію, якщо звернутися до вихідних розмірних перемінних:

1. Ліворуч від особливої точки (рис. 2) відбувається спад чисельності робочої сили, що конкурує за вільні робочі місця, і відповідний йому спочатку спад вільних робочих місць, а потім їхній ріст;

2. Праворуч від особливої точки (рис. 2) відбувається ріст чисельності робочої сили, що конкурує за вільні робочі місця, і відповідний йому спочатку ріст вільних робочих місць, а потім їхній спад.

Зробимо висновок і визначимо перспективи подальшого дослідження у цьому напрямку.

Висновки. Побудовано модель взаємодії робочої сили і вільних робочих місць на ринку праці. Пророблено детальний якісний аналіз цієї моделі, цілком досліджені біфуркаційні особливості цієї моделі, що приводять до небезпечних (не стійких) режимів функціонування ринку праці. Знайдені умови існування стійкого стану динаміки безробітного населення і вільних робочих місць. Наступним кроком дослідження є чисельне моделювання, що включає ідентифікацію параметрів моделі на основі даних офіційної статистики і каліброваної процедури. Таким чином, розроблено інструментарій, що дозволяє прогнозувати рівноважні рівні безробітного населення і вільних робочих місць.

Список використаної літератури

1. Журавка А. В., Тімофєєв В. О., Океме Елеоджо. Моделювання спільної динаміки ВВП та робочих місць [Електронний ресурс] // Економіка. Управління. Інновації. Житомир: 2015. – Випуск №1 (13). Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/eui_2015_1_14
2. Журавка А. В., Московкін В. М., Елеоджо О. Сутність процесів кооперації в соціально-економічних системах [Електронний ресурс] // Економіка. Управління. Інновації. Житомир: 2014. – Випуск №1(11). Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/eui_2014_1_39
3. Журавка А. В., Московкін В. М., Елеоджо О. Сутність процесів конкуренції в соціально-економічних системах [Електронний ресурс] // Економіка. Управління. Інновації. Житомир: 2013. – Випуск №1(9). Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/eui_2013_1_22
4. Московкин В. М, Журавка А. В. Пьер – Франсуа Верхульст – забытый первооткрыватель закона логистического роста и один из основателей

экономической динамики // Наука та наукознавство. – К., 2003. – № 2. – С. 75-84.

5. Кондратьев Н. Д. Проблемы экономической динамики. – М.: Экономика, 1989. – 528 с.

6. Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999. – 336 с.

7. Журавка А. В. Концепция моделирования конкурентных взаимодействий в теории экономической динамики // Радиоэлектроника и информатика. – Х., 2001. – № 4. – С. 82-88.

8. Журавка А. В. Математическое моделирование взаимодействий на общем рынке труда и капитала // Економіка: проблеми теорії та практики. – Дніпропетровськ, 2002. – Вип. 131. – С. 50-53.

9. Журавка А. В. Моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий (Социально-экономические системы) // Бизнес Информ. – Х., 2002. – № 1-2. – С. 49-51.

10. Журавка А. В. Численный анализ трехмерной модели конкурентно-кооперационных взаимодействий (Социально-экономические системы) // Бизнес Информ. – Х., 2002. – № 7-8. – С. 35-37.

11. Журавка А. В., Московкин В. М. Математическая модель роста количества инновационно-ориентированных фирм // Науковий вісник будівництва. – Х., 2001. – № 15. – С. 286-289.

12. Журавка А. В., Московкин В. М. Нелинейная модель динамики занятого населения и анализ устойчивости ее равновесных состояний // Вестник Международного Славянского университета. – Серия "Экономика. Социология". – Х., 2002. – Том 5, № 3. – С. 32-34.

13. Журавка А. В., Московкин В. М. Математическое моделирование потоков рабочей силы на общем рынке труда двух территориальных образований // Вестник Национального технического университета "ХПИ".– Выпуск № 1 (12). – 2002. – С. 31-35.

14. Журавка А. В., Московкин В. М. Трехмерная модель когерентных кооперационных взаимодействий в социально-экономических системах // Економіка: проблеми теорії та практики. – Дніпропетровськ, 2002. – Вип. 145. – С. 50-53.

15. Журавка А. В., Шевченко Л. П. Концептуальные проблемы экономической

динамики // Тези доповідей VII Всеукраїнської науково-методичної конференції 11-13 вересня 2002 р. – Запоріжжя. НАН України, Міністерство науки і освіти України, Запорізький державний університет, 2002. – С. 66-67.

16. Журавка А. В., Московкин В. М., Брук В. В. Двумерная модель конкурентных взаимодействий в экономике: теория и численные эксперименты // Автоматические системы управления и приборы автоматики. – Х., 2001. – №115. – С. 98-103.

17. Журавка А. В., Московкин В. М., Брук В. В. Двумерная модель кооперационных взаимодействий в экономике // Радиоэлектроника и информатика. – Х., 2002. – № 1. – С. 138-140.

18. Журавка А. В., Московкин В. М., Шепелев А. Г., Пантеенко Л. В. Наукометрический анализ эколого-экономических публикаций по конкурентно-кооперационной проблематике, представленных в базе данных МАГАТЭ "INIS" // Проблемы науки. – К., 2002. – № 4. – С. 33-36.

19. Московкин В. М., Журавка А. В. Математическое моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий в общественных науках // Экономическая кибернетика. – Донецк, 2001. – № 3-4. – С. 46-51.

20. Московкин В. М., Журавка А. В. Моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий (Контекст уравнений популяционной динамики в социально-экономических системах) // Бизнес Информ. – Х., 2002. – № 5-6. – С. 27-34.

21. Московкин В. М., Журавка А. В. Периодические решения в динамической системе третьего порядка, описывающей конкуренцию между социальными группами // Экономическая кибернетика. – Донецк, 2002. – № 3-4.– С. 57-66.

22. Московкин В. М., Журавка А. В. Концептуальные проблемы социально-экономической динамики // Экономическая кибернетика. – Донецк, 2003. – № 1-2. – С. 4-7.

23. Московкин В. М., Журавка А. В., Брук В. В. Самоорганизация в бизнес системах в рамках закона конкурентного распределения // Бизнес Информ. – Х., 2002. – № 9-10. – С. 52-54.

24. Lu Z, Takeuchi Y. Qualitative Stability and Global Stability for Lotka-Volterra Systems // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1994. – V. 182. – № 1. – P. 260-268.

References

1. Zhuravka, A.V., Timofieiev, V.O. & Okeme Eleodzho (2015). Modeliuvannia spilnoi dynamiky VVP ta robochyx mists [Modelling of coherent dynamics GDP and the employed population]. Ekonomika. Upravlinnia. Innovatsii. Zhytomyr, issue 1(13). *nbuv.gov.ua* Retrieved from http://nbuv.gov.ua/UJRN/eui_2015_1_14 [in Ukrainian].

2. Zhuravka, A.V., Moskovkin, V.M. & Eleodzho, O. (2014). Sutnist procesiv kooperaciyi v socialno-ekonomichnykh systemakh [Essence of cooperation in social and economic systems]. Ekonomika. Upravlinnia. Innovatsii. Zhytomyr, issue 1(11). *nbuv.gov.ua* Retrieved from http://nbuv.gov.ua/UJRN /eui_2014_1_39 [in Ukrainian].

3. Zhuravka, A.V., Moskovkin, V.M. & Eleodzho, O. (2013). Sutnist protsesiv konkurentsii v socialno-ekonomichnykh systemax [The essence of the process of competition in the socio-economic system]. Ekonomika. Upravlinnia. Innovatsii. Zhytomyr, issue 1(9). *nbuv.gov.ua* Retrieved from http://nbuv.gov.ua/UJRN/eui_2013_1_22 [in Ukrainian].

4. Moskovkyn, V.M, Zhuravka, A.V. (2003). Per – Fransua Verkhulst – zabytyi pervootkryvatel zakona lohisticheskoho rosta i odin iz osnovatelei ekonomicheskoi dinamiki [Pierre - François Verhulst - a forgotten pioneer of the law of logistic growth and one of the founders of economic dynamics]. *Nauka ta naukoznavstvo – Science and science of science* . Kiev, 2, pp. 75-84 [in Ukrainian].

5. Kondratev, N.D. (1989). *Problemy ekonomicheskoi dinamiki [The problems of economic dynamics]*. Moskva: Ekonomika [in Russian].

6. Zanh, V.B. (1999). *Sinerheticheskaia ekonomika. Vremia i peremeny v nelineinoi ekonomicheskoi teorii [The synergetic economics. Time and changes in the economic theory of nonlinear]*. Moskva: Mir [in Russian].

7. Zhuravka, A.V. (2001). *Kontseptsiia modelirovaniia konkurentnykh vzaimodeistvii v teorii ekonomicheskoi dinamiki* [Concept modeling of competitive interactions in the theory of economic dynamics]. *Radioelektronika i informatika – Radionics and computer science.* Kharkiv, 4, pp. 82-88 [in Ukrainian].

8. Zhuravka, A.V. (2002). Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeistviia na obshchem rynke truda i kapitala [Mathematical modeling of the interactions on the general labor market and capital]. *Ekonomika: problemy teorii ta praktyky – Economy: problems of theory and practice.* Dnipropetrovsk, issue 131, pp. 50-53 [in Ukrainian].

9. Zhuravka, A.V. (2002). Modelirovanie konkurentno-kooperatsionnykh

vzaimodeistvii (Sotsialno-ekonomicheskie sistemy) [Modeling competition-cooperation interactions (Socio-economic systems)]. *Biznes Inform – Business Inform*. Kharkiv, 1-2, pp. 49-51 [in Ukrainian].

10. Zhuravka, A.V. (2002). Chislennyi analiz trexmernoi modeli konkurentno-kooperatsionnykh vzaimodeistvii (Sotsialno-ekonomicheskie sistemy) [Numerical analysis of three-dimensional model of a competitive cooperative interactions (Socio-economic systems)]. *Biznes Inform – Business Inform*. Kharkiv, 7-8, pp. 35-37 [in Ukrainian].

11. Zhuravka, A.V. & Moskovkin, V.M. (2001). Matematicheskaia model rosta kolichestva innovatsionno-orientirovannykh firm [Mathematical model of growth in the number of innovation-oriented firms]. *Naukovyi visnyk budivnytstva – Scientific Bulletin construction.* Kharkiv, 15, pp. 286-289 [in Ukrainian].

12. Zhuravka, A.V. & Moskovkin, V.M. (2002). Nelineinaia model dinamiki zaniatoho naseleniia i analiz ustoichivosti ee ravnovesnykh sostoianii [A nonlinear dynamics model of the employed population and the analysis of the stability of its equilibrium states]. Vestnik Mezhdunarodnoho Slavianskoho universiteta – Bulletin of the International Slavic University. Seriia "Ekonomika. Sotsiolohiia" – Series of "Economics. Sociology ". X., Vol 5, 3, pp. 32-34 [in.. Ukrainian].

13. Zhuravka, A.V. & Moskovkin, V.M. (2002). Matematicheskoe modelirovanie potokov rabochei sily na obshchem rynke truda dvukh territorialnykh obrazovanii [Mathematical modeling of labor flows on the general labor market, the two territorial entities]. *Vestnik Natsionalnoho tekhnicheskoho universiteta "KhPI" – Scientific Journal of the National Technical University "KhPI"*, issue 11'2, pp. 31-35 [in Ukrainian].

14. Zhuravka, A.V. & Moskovkin, V.M. (2002). Trekhmernaia model koherentnykh kooperatsionnykh vzaimodeistvii v sotsialno-ekonomicheskikh sistemax [Three-dimensional model of coherent cooperative interactions in the socio-economic systems]. *Ekonomika: problemy teorii ta praktyky – Economy: problems of theory and practice.* Dnipropetrovsk, issue 145, pp. 50-53 [in Ukrainian].

15. Zhuravka, A.V. & Shevchenko, L.P. (2002). Kontseptualnye problemy ekonomicheskoi dinamiki [Conceptual problems of economic dynamics]. *Tezy dopovidei VII Vseukrainskoi naukovo-metodychnoi konferentsii 11-13 veresnia 2002 r. – Proceedings of VIII All-Ukrainian scientific-technical conference of 11-13 September 2002.* Zaporizhzhia. NAN Ukrainy, Ministerstvo nauky i osvity Ukrainy,

Zaporizkyi derzhavnyi universytet, pp. 66-67 [in Ukrainian].

16. Zhuravka, A.V., Moskovkin, V.M. & Bruk, V.V. (2001). Dvumernaia model konkurentnykh vzaimodeistvii v ekonomike: teoriia i chislennye eksperimenty [Two-dimensional model of competitive interactions in the economy: theory and numerical experiments]. *Avtomaticheskie sistemy upravleniia i pribory avtomatiki – Automatic control systems and automation equipment.* X., 115, pp. 98-103 [in Ukrainian].

17. Zhuravka, A.V., Moskovkin V.M. & Bruk, V.V. Dvumernaia model kooperatsionnykh vzaimodeistvii v ekonomike [Two-dimensional model of cooperative interactions in the economy]. *Radioelektronika i informatika – Electronics and Informatics.* Kharkiv, 1, pp. 138-140 [in Ukrainian].

18. Zhuravka, A.V., Moskovkin, V.M., Shepelev, A.H. & Panteenko, L.V. (2002). *Naukometricheskii analiz ekoloho-ekonomicheskikh publikatsii po konkurentno-kooperatsionnoi problematike, predstavlennykh v baze dannykh MAHATE "INIS" – Scientometric analysis of the environmental and economic publications on competitive cooperative issues submitted to the IAEA database "INIS".* Problemy nauki – Science problems. Kyiv, 4, pp. 33-36 [in Ukrainian].

19. Moskovkin, V.M. & Zhuravka, A.V. (2001). Matematicheskoe modelirovanie konkurentno-kooperatsionnykh vzaimodeistvii v obshchestvennykh naukakh [Mathematical modeling of competitively-cooperative interactions in the social sciences]. *Ekonomicheskaia kibernetika – Economic cybernetics.* Donetsk, 3-4, pp. 46-51 [in Ukrainian].

20. Moskovkin, V.M. & Zhuravka, A.V. Modelirovanie konkurentno-kooperatsionnykh vzaimodeistvii (Kontekst uravnenii populiatsionnoi dinamiki v sotsialno-ekonomicheskikh sistemakh) [Modeling competitive-cooperative interactions erating (Context equations of population dynamics in the socio-economic systems)]. *Biznes Inform – Business Inform.* Kharkiv, 5-6, pp. 27-34 [in Ukrainian].

21. Moskovkin, V.M. & Zhuravka, A.V. (2002). Periodicheskie resheniia v dinamicheskoi sisteme treteho poriadka, opisyvaiushchei konkurentsiiu mezhdu sotsialnymi hruppami [Periodic solutions to third-order dynamic system describing the competition between social groups]. *Ekonomicheskaia kibernetika – Economic cybernetics.* Donetsk, 3-4, pp. 57-66 [in Ukrainian].

22. Moskovkin, V.M. & Zhuravka, A.V. (2003). Kontseptualnye problemy sotsialno-ekonomicheskoi dinamiki [Conceptual problems of socio-economic dynamics]. *Ekonomicheskaia kibernetika – Economic cybernetics.* Donetsk, 1-2, pp. 4-7 [in

Ukrainian].

23. Moskovkin, V.M., Zhuravka, A.V. & Bruk, V.V. (2002). Samoorhanizatsiia v biznes sistemakh v ramkakh zakona konkurentnoho raspredeleniia [Self-organization of business systems within the law of competitive distribution]. *Biznes Inform – Business Inform.* Kharkiv, 9-10, pp. 52-54 [in Ukrainian].

24. Lu Z, Takeuchi Y. Qualitative Stability and Global Stability for Lotka-Volterra Systems // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1994. – V. 182. – № 1. – P. 260-268

ЖУРАВКА А. В., ТИМОФЕЕВ В. А., МУДАШИРУ ТАЙО МУСБАО. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВМЕСТНОЙ ДИНАМИКИ РАБОЧЕЙ СИЛЫ И СВОБОДНЫХ РАБОЧИХ МЕСТ НА РЫНКЕ ТРУДА

Одной из главных составляющих занятости, формирующих спрос на рабочую силу, является система занятости и динамика рабочих мест. Занятость является следствием наличия рабочих мест и стимулов, определяющих масштабы и соотношение спроса и предложения рабочей силы. Структура занятости в экономике в целом повторяет структуру рабочих мест. Но для достижения полной занятости необходимо сбалансированность между рабочей силой и наличием свободных рабочих мест.

В статье построена модель взаимодействия рабочей силы и свободных рабочих мест на рынке труда. Проделан детальный качественный анализ этой модели, исследованы бифуркационные особенности, приводящие к опасным (неустойчивым) режимам функционирования рынка труда. Найдены условия существования устойчивого состояния динамики безработного населения и свободных рабочих мест. Таким образом, разработан инструментарий, позволяющий прогнозировать равновесные уровни безработного населения и свободных рабочих мест.

Ключевые слова: рынок труда, динамика безработного населения, динамика свободных рабочих мест, устойчивый узел, бифуркации типа «седло-узел».

ZHURAVKA A., TIMOFEEV V., MUDASHIRU TAJO MUSBAO. MATHEMATICAL MODELING OF THE COHERENT DYNAMICS OF THE LABOR FORCE AND VACANCIES IN THE LABOR MARKET

A major component of employment that shape the demand for labor is a system of employment and the dynamics of jobs. Employment is the result of the availability of jobs and incentives that determine the scope and supply and demand of labor. The structure of employment in the economy as a whole follows the structure of jobs. But to achieve full employment necessary balance between labor and the availability of jobs.

In this article, the mathematical model of coherent dynamics of the labor force and vacancies in the labor market was built. The detailed qualitative analysis of this model was done. It is investigated bifurcation characteristics that lead to dangerous (not stable) modes of the labor market. The conditions of existence of steady state dynamics unemployed and available jobs were found. Thus, advanced tools to predict the equilibrium levels of the unemployed population and job vacancies were developed.

Keywords: labor market, dynamics of unemployed population, dynamics of vacancies, persistent node, bifurcation of "saddle-node".

Стаття надійшла до редакції 11.04.2016 р.

Авторська довідка

	Українською мовою	Англійською мовою
ПІБ/ Last name, first name	Журавка Андрій Вікторович	Zhuravka Andrew
Науковий ступінь/ Scientific degree	кандидат економічних наук	PhD, MSE
Вчене звання/ Scientific rank	Доцент	Assistant Professor
Посада/ Position	доцент кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій	Assistant of Professor of Depatment of Economic Cybernetics and Information Technologies
Установа/ Establishment	Харківський національний університет будівництва та архітектури	Kharkiv National University of Constraction and Architecture

	Українською мовою	Англійською мовою
ПІБ/ Last name, first name	Тімофєєв Володимир Олександрович	Timofeev Vladimir
Науковий ступінь/ Scientific degree	доктор технічних наук	DS
Вчене звання/ Scientific rank	професор	Professor
Посада/ Position	завідувач кафедри економічної кібернетики та управління економічною безпекою	Head of department of Economic Cybernetics and Security Management
Установа/ Establishment	Харківський національний університет радіо електроніки	Kharkiv National Radiotechnic University

	Українською мовою	Англійською мовою
ПІБ/ Last name, first name	Мудаширу Тайо Мусбао	Mudashiru Tajo Musbao
Науковий ступінь/ Scientific degree	-	-
Вчене звання/ Scientific rank	-	-
Посада/ Position	аспірант кафедри економічної кібернетикb та управління економічною безпекою	Post graduat student of department of Economic Cybernetics and Security Management
Установа/ Establishment	Харківський національний університет радіо електроніки	Kharkiv National Radiotechnic University