

УДК 517.977

А.В. УСОВ<sup>1</sup>, Е.Н. ГОНЧАРЕНКО<sup>2</sup><sup>1</sup>*Одесский национальный политехнический университет*<sup>2</sup>*Одесский государственный экономический университет*

## РОБАСТНЫЕ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Определено понятие экономической устойчивости предприятия, рассмотрены свойства устойчивых экономических систем, решена задача устойчивости квазиполиномов с одним или двумя запаздываниями в экономической системе в явном виде. Предлагается метод робастных оценок доминирующих параметров системы, который малочувствителен к отклонениям параметров экономической системы от прогнозируемых показателей. Приводится решение задач робастной устойчивости экономических систем с параметрической, непараметрической или комбинированной неопределенностью.*

**Ключевые слова:** *робастные оценки, квазиполином, устойчивость экономических систем, критерий Гурвица, ряд Маклорена.*

Принципы максимума [1], динамического программирования и оптимального управления [2, 3] в исследовании устойчивости экономических систем оказались малоэффективными в условиях переходных рыночных процессов. Это связано с тем, что отклонения параметров экономической системы от прогнозируемых показателей приводят систему в неустойчивое положение. Поэтому предлагается метод робастных оценок [4] доминирующих параметров системы, который малочувствителен к указанным отклонениям.

Материал статьи посвящен решению задач робастной устойчивости экономических систем с параметрической, непараметрической или комбинированной неопределенностью.

Исследование проблемы экономической устойчивости предприятия как экономической системы в условиях изменяющейся внутренней и

внешней среды приобретает особую актуальность в настоящий период. Для ее решения необходимы глубокие экономические исследования и разработка новых механизмов управления, методических подходов по лучшему использованию основных факторов производства на всех направлениях производственно-хозяйственной и финансовой деятельности предприятий.

В литературных источниках [5, 7 – 9] экономическая устойчивость рассматривается в весьма различных значениях. Проведенный анализ существующих определений этого понятия показал, что они являются достаточно обоснованными и бесспорными, хотя и требуют некоторых уточнений: экономическая устойчивость – это комплексная характеристика субъекта хозяйствования на определенный период времени, отражающая способность поддерживать ключевые финансовые, маркетинговые, производственные и кадровые показатели на нормативно заданном с высокой степенью вероятности уровне под воздействием возмущений внешней и внутренней среды.

Таким образом, экономическая устойчивость предприятия как экономической системы предполагает сбалансированное состояние экономических ресурсов, которое обеспечивает стабильную прибыльность и нормальные условия для расширенного воспроизводства на основе роста прибыли и капитала в длительной перспективе с учетом внешних и внутренних факторов в условиях допустимого уровня риска.

Научное направление, которое изучает экономическую устойчивость предприятий, является достаточно молодым. Исследование вопросов проявления сущности устойчивости сложных систем, в том числе экономической устойчивости предприятий, показало отсутствие на сегодняшний день единого общего мнения по определению данной категории.

Рассмотрим основные подходы к определению устойчивости экономических систем, которые приводятся в отечественной и зарубежной литературе. Ряд экономистов считают, что объектом управления устойчивым развитием предприятия является общая устойчивость предприятия, которая состоит из устойчивости хозяйственной деятельности предприятия и устойчивости финансовой деятельности предприятия [5].

Существует большое количество методик анализа финансового состояния предприятия с использованием определенных систем показателей и коэффициентов. Они характеризуют участок устойчивости экономиче-

ской системы, переход за границы которой будет оцениваться как проявление нестабильности, неустойчивости. Но для целей управления необходимо иметь систему частичных показателей и коэффициентов устойчивости финансовой деятельности в связи с необходимостью принятия решений в любой момент времени.

Кроме того, для оценки уровня устойчивости предприятия, выбора финансовой стратегии в западной экономической литературе используются аддитивная пятифакторная модель Э. Альтмана [6], применение которой в условиях отечественной экономики невозможно без предварительной корректировки.

Для комплексной оценки устойчивого развития предприятия, по мнению экономистов, необходимо учитывать его производственную, хозяйственную и финансовую деятельность, при этом предлагается рассчитывать некоторый интегральный показатель устойчивости [7]. Он характеризует положение предприятия во всех сферах его деятельности и отображает самый разносторонний его потенциал: финансово-экономическую устойчивость; производственно-сбытовую деятельность; степень удовлетворения потребительского спроса; рыночную среду конкурентов; рыночную среду потребителей; рыночную среду поставщиков; изменения рыночного состояния и т.д. [8] Тем не менее, такой подход не всегда оправдан, поскольку включает показатели, которые не имеют, на первый взгляд, к устойчивости никакого отношения.

Таким образом, устойчивость определяется как способность системы сохранить свое качество в условиях изменяющейся среды и внутренних трансформаций (случайных или преднамеренных). При этом качество измеряется с позиций целей системы. Поддержание устойчивости составляет внутреннюю цель системы в отличие от внешней, характеризующей взаимоотношения со средой. Следовательно, система должна быть организована так, чтобы обеспечить собственное выживание, стабильность в динамичной среде и одновременно развитие, приближение к определенной цели.

Устойчивость системы зависит от большой группы факторов. Потеря устойчивости в общем случае может произойти вследствие изменения параметров системы (бифуркации), из-за наличия внешних воздействий (в частности, слишком значительных или качественно несовместимых с

системой), либо при нарушении связей в системе, когда меняется ее структура (структурная неустойчивость).

Под устойчивостью следует понимать способность системы возвращаться в равновесное состояние в случае, если она была выведена из него. В таком случае состояние равновесия называется устойчивым. Второму варианту отвечает неустойчивость состояния экономических систем. Здесь под равновесием понимается состояние, которое сохраняется как угодно долго при отсутствии внешних возмущений.

Понятие устойчивости нередко применяется относительно движения системы, а именно как свойство системы мало отклоняться от заданной траектории движения в фазовом пространстве при малых влияниях со стороны внешней среды. Об этом можно говорить как о динамической устойчивости.

Рассмотрим общие свойства устойчивых экономических систем: формы описания, критерии устойчивости, методы идентификации. основоположник учения об устойчивости движения русский ученый А.М. Ляпунов в 1892 г. сформулировал точное математическое определение устойчивости движения: «Возмущенное движение системы будет устойчивым по отношению к постоянному состоянию, если для любого положительного числа  $\varepsilon$ , каким бы малым оно не было, можно подобрать другое положительное число  $\eta(\varepsilon)$ , при котором для всех возмущенных движений в начальный момент времени  $t_0$ :

$$|\Delta x_k(t_0)| < \eta(\varepsilon), k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

а при всех  $t > t_0$

$$|\Delta x_k(t)| < \varepsilon, k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

где  $\Delta x_k(t)$  – отклонение от устойчивого состояния».

Интересным также является определение устойчивости траектории по Ляпунову, где поведение динамической системы описывается системой обычных дифференциальных уравнений [1, 4]:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $x_i$  – переменные, характеризующие состояние системы.

Рассмотрим некоторое частичное решение системы  $x_i = \xi_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , определенное на интервале  $[t_0, \infty)$ , который отвечает невозмущенному движению системы, причем  $\xi_i(t_0) = x_{i0}$ . Решение  $x_i = \xi_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , называется устойчивым по Ляпунову, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , зависящее от  $\varepsilon$  и  $t_0$ , что любое решение  $x_i = \phi_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , (отвечающее возмущенному движению), для которого при  $t = t_0$  выполняется неравенство  $|\phi_i(t_0) - \xi_i(t_0)| < \delta$ , удовлетворяет неравенству  $|\phi_i(t) - \xi_i(t)| < \varepsilon$ , при  $t \in [t_0, \infty)$  для всех  $i = \overline{1, n}$ . Т.е., если в ходе реализации расчетного решения вследствие каких-нибудь причин траектория развития системы отклонилась на некоторую небольшую величину, то новая траектория системы окажется довольно близкая к расчетной на всем протяжении расчетного периода и при этом никаких качественных изменений в ее поведении не предполагается.

Для использования указанного аппарата, возникает необходимость определения передаточной функции экономической системы. Определив передаточную функцию предприятия и ее коэффициенты, можно провести исследования на предмет устойчивости экономической системы одним из известных методов [4]:

алгебраический критерий Гурвица, предложенный в 1895 г., который может использоваться для оценки устойчивости уравнений выше третьего порядка;

графоаналитический критерий устойчивости Михайлова, предложенный в 1938 г., который может использоваться для оценки степени устойчивости и установления влияния каждого звена системы на устойчивость процесса в ней.

Согласно критерию Гурвица, система автоматического регулирования (промышленная система) будет устойчивой, если корни характеристического уравнения полученного из выражения передаточной функции

$$a_6 p^6 + a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \quad (2)$$

будут иметь отрицательные действительные части [4]. Это условие выполняется, если определитель Гурвица и все диагональные миноры положительные. Например, определитель Гурвица 6-го порядка имеет вид:

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Таким образом, условия устойчивости будут следующие:

$$\Delta_6 > 0; \Delta_5 > 0; \Delta_4 > 0; \Delta_3 > 0; \Delta_2 > 0; \Delta_1 > 0. \quad (4)$$

Здесь необходимо указать, что основное достоинство алгебраического критерия Гурвица, заключается в том, что он разрешает определить знак корней характеристического уравнения, не решая самого уравнения. Тем не менее, алгебраические критерии позволяют получить только качественные суждения о характере протекания процессов регулирования, т.е. установить, устойчива система или нет. Может оказаться, что система устойчива, но процессы затухают чрезвычайно медленно, и на практике, функционирование такой системы является неэффективным.

В отличие от алгебраических критериев, графоаналитический критерий устойчивости Михайлова, позволяет оценивать устойчивость, судить о степени устойчивости и устанавливать, если необходимо, влияние каждого звена системы на устойчивость процесса в ней. В алгебраических критериях требование отрицательности действительных частей корней накладывает определенные ограничения на коэффициенты характеристического уравнения. В графоаналитических критериях это требование обуславливает особое размещение кривой в фазовом пространстве, которая характеризует динамические свойства системы.

В критерии Михайлова, в качестве определяющей используется кривая, которую описывает конец вектора полученного из уравнения системы после выполнения подстановки  $p = j\omega$ :

$$F(j\omega) = a_6 (j\omega)^6 + a_5 (j\omega)^5 + a_4 (j\omega)^4 + a_3 (j\omega)^3 + a_2 (j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0 \quad (5)$$

при изменении угловой частоты  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Именно поэтому этот критерий еще называют частотным [9].

Итак, линейное, стационарное, динамическое звено, в качестве которого можно рассматривать предприятие, можно полностью охарактеризовать либо передаточной функцией, либо одной из частотных характе-

ристик его экономического состояния. Если же линейное звено устойчиво, то его также можно охарактеризовать коэффициентами разложения передаточной функции в ряд Маклорена или связанными с ними степенными моментами импульсной переходной функции. При этом если передаточная функция является дробно-рациональной (и только в этом случае) для полной идентификации линейного звена достаточно ограничиться конечным числом коэффициентов ряда Маклорена (или степенных моментов) [3 – 5].

Следовательно, линейное звено (предприятие) с конечной памятью, являющееся всегда устойчивым, невозможно полностью идентифицировать конечным числом степенных моментов. Такие не полностью идентифицированные звенья по существу обладают неопределенностью непараметрического типа.

Классическим результатом для оценки устойчивости экономических систем с параметрической неопределенностью является применение теоремы В.Л. Харитонова [4], основанной на оценке инфимума фазовой скорости устойчивого полинома, характеризующего экономическую систему в условиях переходных процессов. Рассмотрим обобщение теоремы Харитонова на характеристические уравнения применительно к экономическим системам, содержащим сумму произведений фиксированных полиномов на интервальные полиномы, а также на случай принадлежности коэффициентов характеристического полинома произвольному выпуклому многограннику (реберная теорема) [4].

Использование обобщенного метода Д-разбиения к анализу устойчивости развития экономического пространства требует наличия информации о коэффициентах полиномов. Детерминированный подход в исследовании устойчивости экономических систем связан с точными оценками ее поведения, что в определенной степени затруднительно, так как любая система, в том числе экономическая система, подвержена воздействию не только регулярного, но и вероятностного происхождения. Переходом к мягким моделям, позволяющим решать проблемы устойчивости экономических систем, являются робастные оценки и их характеристики. В связи с этим, получены формулы радиуса робастности характеристического полинома, позволившие перенести известные результаты по исследованию устойчивости экономических систем на системы с неопределенными параметрами, влияющими на устойчивость экономической системы.

Проблемы устойчивости семейств квазиполиномов с коэффициентной неопределенностью экономической системы решаются с помощью реберных теорем и их развития на основе оценки фазовой скорости характеристического квазиполинома.

Исследования семейств характеристических квазиполиномов,  $f_0(\lambda) + \sum_{j=1}^k f_j(\lambda)e^{-\lambda\tau_j}$ , где  $f_j(\lambda)$  – полиномы или квазиполиномы запаздывающего типа; описывающих состояние экономической системы [4, 5, 7] с неопределенным запаздыванием реакции на управляющее воздействие (привлечение дополнительных инвестиций, изменение структуры финансирования, государственная поддержка, изменение организационной структуры предприятия и т.д.), позволили установить, что в основу большинства приемов по стабилизации экономической системы положена модель определения аргумента комплекснозначной функции  $f(i\omega)$ , описывающей реакцию системы на различного рода воздействия, нарушающие равновесие экономической системы [10]:

$$\text{Arg}\{f(i\omega)\} = 2\text{arctg} \frac{\text{Im}\{f(i\omega)\}}{|f(i\omega)| - \text{Re}\{f(i\omega)\}}, \quad (6)$$

где  $\text{Im}\{f(i\omega)\}$  – мнимая часть комплекснозначной функции;  $\text{Re}\{f(i\omega)\}$  – действительная часть функции  $f(i\omega)$ ;  $|f(i\omega)|$  – модуль комплекснозначной функции.

При этом  $\text{Arg}\{f(i\omega)\} \in (0; 2\pi)$  или

$$\text{Arg}\{f(i\omega)\} = 2\text{arctg} \frac{\text{Im}\{f(i\omega)\}}{|f(i\omega)| + \text{Re}\{f(i\omega)\}},$$

тогда  $\text{Arg}\{f(i\omega)\} \in (-\pi; \pi)$ .

На основе этой модели решена задача устойчивости квазиполиномов с одним или двумя запаздываниями в экономической системе в явном виде.

Результатом проведенных исследований устойчивости экономических систем является введение меры робастности экономических систем с неопределенными запаздываниями и коэффициентной неопределенностью. На основе этих моделей получены конечные алгоритмы решения задач робастной устойчивости экономических систем.



Основным результатом статьи является решение проблемы устойчивости экономических систем, включающих непараметрическую идентификацию по методу моментов для звеньев (предприятий) с конечной памятью (с определенной экономической наследственностью).

## Литература

1. *Зубов В.И. Проблема устойчивости процессов управления / В.И. Зубов. – СПб.: СПбГУ, 2001. – 354 с.*
2. *Красовский А.А. Проблема физической теории управления / А.А. Красовский // Автоматизация и телемеханика. – 1990. – № 5. – С. 3-26.*
3. *Основы оптимального управления / В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М. Лобанов, Н.И. Данилина и др. – М.: Высшая школа, 1990. – 430 с.*
4. *Усов А.В. Моделирование систем с распределенными параметрами: моногр. / А.В. Усов, А.Н. Дубов, Д.В. Дмитришин. – Одесса: Астропринт, 2002. – 664 с.*
5. *Горбунов А. Финансовая устойчивость социально-экономической системы / А. Горбунов, В. Кротов, Л. Мартыщико. – СПб.: МФИН, 2000. – 152 с.*
6. *Altaian E.I. Zeta Analysis: A Model to Identify Bankruptcy Risk of Corporation / E. I. Altaian, R. G.Haldeman, P. Narayanan // Journal of Banking and Finance. – June, 1997. – P. 123-136.*
7. *Омельченко И.Н. Интегральная оценка организационно-экономической устойчивости промышленного предприятия / И.Н. Омельченко // Вестник машиностроения. – 1997. – № 3. – С. 34-40.*
8. *Зубанов Н.В. Анализ устойчивости функционирования экономических систем относительно поставленных целей / Н.В. Зубанов, С.В. Пестриков. – Самара: Сам ГТУ, 2000. – 184 с.*
9. *Гамалій В.Ф. Дослідження стійкості функціонування промислово-економічних систем / В.Ф. Гамалій, І.В. Ніколаєв // Вісник економічної науки України – 2008. – № 1. – С. 14-17.*
10. *Дмитришин Д.В. Условия робастной устойчивости систем управления с запаздывающей обратной связью / Д.В. Дмитришин // Наукові праці УДАЗ: період. наук. зб. з радіотехніки, електроніки та економіки в галузі зв'язку. – Одеса, 2000. – № 3. – С. 71-78.*

**Рецензент:** д-р. екон. наук, проф., директор **А.Н. Кизим**, Научно-исследовательский центр индустриальных проблем развития НАН Украины, Харьков.

## РОБАСТНІ МЕТОДИ У ДОСЛІДЖЕННІ СТІЙКОСТІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

*А.В. Усов, О.М. Гончаренко*

Визначено поняття економічної стійкості підприємства, розглянуті властивості стійких економічних систем, вирішена проблема стійкості квазіполіномів з одним або двома запізненнями в економічній системі в явному вигляді. Запропоновано метод робастних оцінок домінуючих параметрів системи, який малочутливий до відхилення параметрів економічної системи від прогнозованих показників. Наводиться рішення задач робастної стійкості економічних систем з параметричною, непараметричною або комбінованою невизначеністю.

**Ключові слова:** робастні оцінки, квазіполіном, стійкість економічних систем, критерій Гурвіца, ряд Маклорена.

## ROBUST METHODS IN THE STUDY OF STABILITY OF ECONOMIC SYSTEMS

*A.V. Usov, E.N. Goncharenko*

The concept of economic sustainability of the enterprise was determined, the properties of stable economic systems were examined, the stability quasipolynomials problem with one or two delays in the economic system in explicit form is solved. The method of robust grades of dominated system parameters, which is low-sensitive to declination of the economic system parameters from the forecasted figures, is offered. The solution of problems of robust stability of economic systems with parametric, nonparametric or combined uncertainty is adduced.

**Keywords:** robust evaluation, quasipolynomial, sustainability of economic systems, the Hurwitz criterion, Maclaurin series.

**Усов Анатолий Васильевич** – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета, Лауреат государственной премии Украины в области науки и техники, Одесса, Украина, e-mail: usov-a-v@mbei.ori.ua.

**Гончаренко Елена Николаевна** – докторант кафедры менеджмента Одесского национального экономического университета, Одесса, Украина.