УДК 334.716:658.155.011.7

Е.Н. ГОНЧАРЕНКО

Одесский государственный экономический университет, Украина

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ПОДХОД В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПЕРЕХОДНЫХ УСЛОВИЯХ

В статье рассматривается детерминированный подход в исследовании устойчивости экономических систем в переходных условиях. Описана система управления экономической системой, условия полной управляемости и наблюдаемости системы. Предлагается модель, учитывающая динамику состояния, управляемость, а также наблюдаемость, что открывает широкие возможности формализированного описания экономических систем и применения к ним критериев устойчивости, позволяющих отслеживать устойчивость функционирования экономической системы в динамике, в режиме реального времени.

Ключевые слова: *устойчивость экономической системы, устойчивость по Ляпунову, асимптотически устойчивая система, линейная стационарная система.*

Исследование проблемы устойчивости экономической системы в условиях изменяющейся внутренней и внешней среды приобретает особую актуальность в настоящий период. Для ее решения необходимы глубокие экономические исследования, разработка новых механизмов и методических подходов к управлению и диагностике.

При рассмотрении экономической системы как объекта исследования или проектирования целесообразно распределить все переменные, характеризующие систему или имеющие к ней какое-либо отношение, на три множества:

– входные переменные $v_1, v_2, \ldots, v_m$, характеризующие внешние воздействия на входы экономической системы;

– переменные состояния $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – внутренние (промежуточные) переменные, совокупность которых полностью характеризует свойства экономической системы;

– выходные переменные $y_1, y_2, \ldots, y_r$,, представляющие те реакции на внешние воздействия и те состояния системы, которые интересны для исследователя экономической системы.

После упорядочения (нумерации) элементов этих множеств получаем соответственно три вектора:

входной (задающий) вектор $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$,

вектор состояний $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

выходной вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_r)$ (рис. 1).

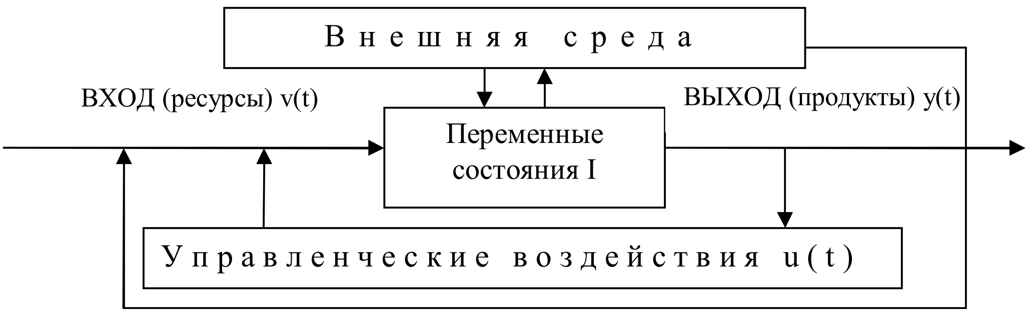

Рис. 1. Система управления экономической системой

Сама экономическая система в общем виде представляется «черным ящиком» с m входами и r выходами, с каждым из которых связана соответствующая переменная. Можно рассматривать совокупность входов как один обобщенный вход, на который воздействует входной вектор *v,* а совокупность выходов – как обобщенный выход, который характеризуется выходным вектором y. Переменные состояния связаны с внутренними свойствами системы и поэтому указываются внутри «черного ящика».

Собственно система, ее входы и выходы – это три взаимосвязанных объекта, которые в каждой конкретной ситуации определяются соответственно описанием системы (структура и свойства компонент или математическая модель системы), а также заданием множеств входных и выходных переменных. Решение любой из этих задач непосредственно связано с исследованием состояний экономической системы, множество которых образует пространство состояний.

Непрерывные детерминированные системы в каждый момент времени t можно описать парой матричных уравнений:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F\left[x(t), v(t), u(t)\right]; \tag{1}$$

$$y(t) = \varphi\left[x(t), v(t), u(t)\right]. \tag{2}$$

Первое из них является уравнением состояния системы, решение которого, удовлетворяющее начальному условию $x_0 = x(t_0)$, дает вектор состояния $x(t) = \varphi\left[x(t), v(t), u(t)\right]$.

Второе уравнение определяет выходные переменные в зависимости от x(t), v(t), u(t) и потому оно называется выходным уравнением. Здесь u(t) – управляющее воздействие на экономическую систему, поступающее на вход системы и реализующее целевую функцию (устойчивое развитие экономической системы).

В частных случаях эти уравнения принимают специфическую форму в соответствии со свойствами системы. Для линейных систем имеем:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)\left[v(t) + u(t)\right]; \tag{3}$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)\left[v(t) + u(t)\right]. \tag{4}$$

где A – матрица системы (квадратная п-го порядка);

B(t) – матрица управления размера (п × m);

C(t) – матрица выхода размера r × п ;

D(t) – матрица входа размера r × т.

Если элементы этих матриц зависят от времени t, то система называется линейной нестационарной (или параметрической). Для линейных стационарных систем (часто их называют просто линейными системами) элементы матриц A, B, C, D выражаются постоянными числами, которые являются функциями параметров компонент системы.

Наиболее сложную структуру имеют уравнения нелинейных систем, компоненты которых характеризуются нелинейными зависимостями между переменными на их входах и выходах. В ряде практически важных случаев уравнения состояния нелинейной системы можно представить в виде [1, 2]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bv(t) + Fu(t);\; f\big[x(t), u(t), v(t)\big] = 0, \qquad (5)$$

где A, B и F – постоянные матрицы;

$f(x, u, v) = 0$ – нелинейное алгебраическое уравнение, решение которого относительно вектора *z* позволяет исключить этот вектор из дифференциального уравнения.

В более сложных случаях элементы матриц A, B и F могут зависеть от состояния экономической системы.

Матрица D(t) характеризует параметры системы в условиях переходных кризисных явлениях. Поэтому важными моментами при построении детерминированных моделей по исследованию устойчивости экономических систем являются такие важные характеристики как наблюдаемость и управляемость.

Линейное преобразование переменных состояния экономической системы $x = H\tilde{x}$ и $\tilde{x} = H^{-1}x$, где H – модальная матрица параметров системы, приводит уравнение состояния $\dot{x} = Ax + B(v+u)$ к виду

$$H\frac{d\tilde{x}}{dt} = AH\tilde{x} + B(v+u);\; \frac{d\tilde{x}}{dt} = \left(H^{-1}AH\right)\tilde{x} + \left(H^{-1}B\right)(v+u). \qquad (6)$$

В новых координатах матрица системы A преобразуется к диагональной или жордановой форме $\tilde{A} = H^{-1}AH$, а матрица B к $\tilde{B} = H^{-1}B$. Уравнение состояния и выходное уравнение запишем следующим образом:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}(v+u); \quad y = \tilde{C}\tilde{x} + D(v+u), \qquad (7)$$

где $\tilde{C} = CH$.

Если $\tilde{A}$ – диагональная матрица, соответствующая различным собственным значениям матрицы A, характеризующими устойчивость экономической системы, то уравнение состояния распадается на n скалярных уравнений

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \lambda_i \tilde{x}_i + \tilde{b}_{(i)}\left(v + u\right) \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right), \tag{8}$$

где $b_{(i)}$ – i-ая строка матрицы $\tilde{B}$.

Каждая из n преобразованных переменных $\tilde{x}_i$ связана только с одним собственным значением.

Система называется управляемой, если все переменные $\tilde{x}_i$ зависят от входных воздействий v. Это значит, что переменные состояния $x = H\tilde{x}$, не содержат свободных (неуправляемых) компонентов. Очевидным условием управляемости является отсутствие нулевой строки в матрице B, т. е. все $\tilde{b}_{(i)}$ $\left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ должны быть ненулевыми векторами-строками. В общем случае кратных собственных значений доказывается необходимое и достаточное условие полной управляемости системы: матрица $\left[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\right]$ должна иметь ранг n. Полная управляемость означает, что с помощью некоторого воздействия v(t), определенного на конечном интервале $0 \le t \le T$, , система может быть переведена из заданного начального состояния x(0) в конечное состояние x(T).

Система называется наблюдаемой, если каждая из переменных $\tilde{x}_i$ $\left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ связана хотя бы с одним выходом (элементом выходного вектора *y*). Так как

$$y_i = \left[\tilde{c}^{(1)}, \tilde{c}^{(2)}, \ldots, \tilde{c}^{(n)}\right] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \cdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{n} \tilde{c}^{(s)} \tilde{x}_s, \tag{9}$$

где $\tilde{c}^{(s)}$ – столбцы матрицы $\tilde{C}$, то очевидным условием наблюдаемости является отсутствие в матрице $\tilde{C}$ нулевого столбца.

В общем случае кратных собственных значений доказывается необходимое и достаточное условие полной наблюдаемости: матрица $\left[C^*, A^*C^*, A^{*2}C^*, \ldots, A^{*n-1}C^*\right]$должна иметь ранг п (А* и С* – сопряженные матрицы). Полная наблюдаемость означает, что существует такое воздействие v(t), что по реакциям на выходах y (t) на заданном интервале времени $0 \le t \le T$, можно определить начальное состояние x (0) системы.

Система называется устойчивой по Ляпунову при нулевом входе (v = 0), если для любого ε > 0 можно указать такое δ > 0, что при любых начальных значениях x_1 (0), x_2 (0), …, x_n (0), меньших по модулю числа δ, переменные состояния x_1 (t), x_2 (t), …, x_n (t) во все время движения $(t \ge 0)$ по модулю остаются меньше числа ε, т. е. если | x_i (0) | < δ, то $|x_i(t)| < \varepsilon (i = 1, 2, \ldots, n; t \ge 0)$. Если кроме этого $x_i(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то система называется асимптотически устойчивой. Линейная система при ограниченных воздействиях устойчива, если ее реакция также ограничена.

Для линейных стационарных систем имеется непосредственная связь между ее устойчивостью и характером собственных значений матрицы системы А. В соответствии с теоремой Сильвестра переходная матрица состояния

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=1}^{q} \left(Z_{k1} + tZ_{k2} + \ldots t^{m_k - 1} Z_{km_k} \right) e^{\lambda_k t}, \tag{10}$$

где $Z_{ki} \quad (k = 1, 2, \ldots, q; \quad j = 1, 2, \ldots, m_k)$ – компоненты матрицы А.

Ясно, что при вещественных отрицательных собственных значениях ($\lambda_k < 0$) система асимптотически устойчива, так как в этом случае x (t) = Φ (t)·x (0) при $t \to \infty$ будет стремиться к нулевому вектору $(x(t) \to 0)$.

Если среди собственных значений имеются комплексные, то они при вещественной матрице А могут появляться только комплексносопряженными парами. Пусть $\lambda_k' = \alpha + i\omega$ и $\lambda_k'' = \alpha - i\omega$ – пара комплексно-сопряженных собственных значений кратности $т_k$. В выражении для Φ (t) им будут соответствовать слагаемые

$$t^{i-1} \left[Z_{kj} e^{(\alpha + i\omega)t} + \bar{Z}_{kj} e^{(\alpha - i\omega)t} \right] = t^{i-1} e^{\alpha t} \left[Z_{kj} e^{i\omega t} + \bar{Z}_{kj} e^{-i\omega t} \right], \tag{11}$$

где комплексно-сопряженные матрицы $Z_{kj} = Z_{kj}' + iZ_{kj}''$ и $\bar{Z}_{kj} = Z_{kj}' - iZ_{kj}''$. Элементарными преобразованиями это выражение приводится к виду

$$2t^{j-1}e^{\alpha t}\left(Z'_{kj}\cos\omega t - Z''_{kj}\sin\omega t\right), \quad \left(j=1,2,\dots m_k\right). \tag{12}$$

Если вещественная часть комплексно-сопряженных значений $\alpha < 0$, то система асимптотически устойчива. В случае чисто мнимых собственных значений $\alpha = 0$ система устойчива только при отсутствии множителя t^{j-1}, что означает, что $т_k = 1$, т.е. собственные значения должны быть простыми. При $\alpha > 0$ – система всегда неустойчива.

Для суждения об устойчивости системы вовсе не обязательно вычислять собственные значения. Разработано много различных критериев устойчивости, один из которых известен как алгебраический критерий Рауса-Гурвица, в соответствии с которым необходимое и достаточное условие устойчивости сводится к требованию положительности определителей $D_1, D_2, ..., D_n$, элементами которых являются коэффициенты характеристического многочлена $\Delta(\lambda) = \alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \dots \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$.

Использование для анализа устойчивости функционирования экономических систем моделей, учитывающих динамику состояния, управляемость, а также наблюдаемость, открывает широкие возможности формализированного описания таких систем и применения к ним критериев устойчивости. Учитывая относительную легкость реализации определенных критериев, можно отметить, что это позволит отслеживать устойчивость функционирования экономической системы в динамике, в режиме реального времени.

Литература

1. Основы оптимального управления / В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М. Лобанов, Н.И. Данилина и др. – М.: Высш. Шк., 1990. – 430 с.

2. Усов А.В. Моделирование систем с распределенными параметрами: моногр. / А.В. Усов, А.Н. Дубов, Д.В. Дмитришин. – Одесса: Астропринт, 2002. – 664 с.

Рецензент: д-р екон. наук, професор, завідувач кафедри системного аналізу та логістики **І.О. Лапкіна**, Одеський національний морський університет, Одеса, Україна.

ДЕТЕРМІНОВАНИЙ ПІДХІД В ДОСЛІДЖЕННІ СТІЙКОСТІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ У ПЕРЕХІДНИХ УМОВАХ

О.М. Гончаренко

У статті розглядається детермінований підхід у дослідженні стійкості економічних систем у перехідних умовах. Описана система управління економічною системою, умови повної керуємості та спостережливості системи. Пропонується модель, що враховує динаміку стану, керованість, а також спостережливість, що відкриває широкі можливості формалізованого опису економічних систем і застосування до них критеріїв стійкості, які дозволяють відстежувати стійкість функціонування економічної системи у динаміці, в режимі реального часу.

Ключові слова: стійкість економічної системи, стійкість за Ляпуновим, асимптотично стійка система, лінійна стаціонарна система.

DETERMINISTIC APPROACH TO THE STUDY OF SUSTAINABLE ECONOMIC SYSTEMS UNDER TRANSIENT CONDITIONS

E.N. Goncharenko

The article deals with a deterministic approach to the study of the stability of economic systems under transient conditions. A system for economic system management, the conditions of complete controllability and observability of the system are described. A model that takes into account the dynamics of state, controllability and observability, which opens up wide opportunities for formalized description of economic systems and for application to them sustainability criteria to track the sustainability of the economic system functioning in dynamics and real-time.

Keywords: stability of the economic system, Lyapunov stability, asymptotic stability system, linear time-invariant system.

Гончаренко Елена Николаевна - канд. экон. наук, доцент кафедры финансового менеджмента и фондового рынка, Одесский государственный экономический университет, Одесса, Украина.