УДК 338:658:[519.7]

Демиденко М.А.

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЕВОЛЮЦІЙНИХ АЛГОРИТМІВ

Проаналізовано та обгрунтовано підхід до розв'язання задач управління підприємством з урахуванням багатьох критеріїв, що суперечать один одному із застосуванням економіко-математичного моделювання на базі еволюційних алгоритмів.

An approach to solving the tasks of plant management has been analyzed and substantiated taking into account numerous criteria which contradict each other with the use of economic-and-mathematical modeling on the basis of evolutionary algorithms.

Ефективне управління гірничими і металургійними підприємствами вимагає одночасної оптимізації діяльності за декількома критеріями. Так, підприємству практично завжди необхідно забезпечити максимальний прибуток при мінімальній собівартості і високій якості продукції. На рис.1 представлений графік залежності прибутку, собівартості і якості залізорудного концентрату для металургійного заводу. Критерії “прибуток”, “собівартість” і “якість” суперечать один одному і конкурують між собою. У цьому випадку оптимальний розв’язок передбачає множину компромісних рішень. Тому виникає задача розробки моделей і алгоритмів пошуку оптимальних рішень.

Розглянемо економіко-математичну модель багатокритеріальної оптимізації яка використовує апарат еволюційних алгоритмів.

Задача багатокритеріальної оптимізації включає множину розв’язків n, множину цільових функцій f_i $i = 1,\ldots k$ і множину m обмежень. Цільові функції й обмеження є функціями змінних розв’язку. Метою оптимізації є знаходження максимуму

$$\bar{y} = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x) \to \max$$

при обмеженнях $e(x) = (e_1(x), e_2(x), \ldots, e_m(x)) < 0$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in X$$

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, e_k) \in Y$$

$\bar{x}$ – вектор розв’язків, $\bar{y}$ – вектор цільових функцій, X – простір припустимих розв`язків, Y – простір цільових функцій.

Обмеження $e(x) < 0$, визначають множину можливих розв’язків. Множина припустимих рішень X_f визначається як множина векторів розв’язків x, що задовольняють обмеженням.

$$X_f = \{x \in X \mid e(x) \le 0\}$$

Область допустимості в просторі цільових функцій має вигляд

$$Y_f = f(X_f) = \bigcup\nolimits_{x \in X_f} \{f(x)$$

Сформулюємо особливості багатокритеріальної оптимізації на прикладі задачі оптимального управління підприємством за двома критеріями: якість готової продукції – f_1 і показник, що є величиною, зворотною до величини вартості – f_2. Обидва критерії повинні максимізуватися з урахуванням обмеження e_1 на сировинні ресурси. Критерії f_1 і f_2 є конкуруючими критеріями.

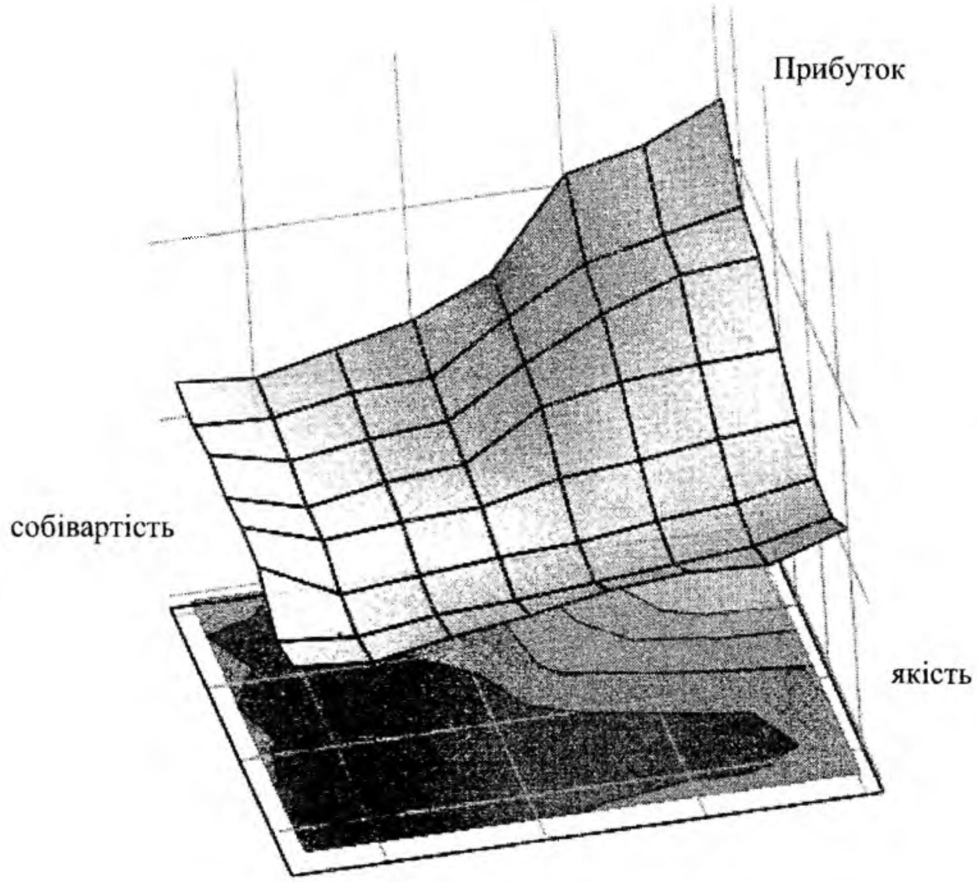

Рис.1. Взаємозв'язок критеріїв ефективності діяльності

У випадку оптимізації за багатьма критеріями множина X_f частково визначена. Розв'язок, представлений крапкою B (рис.2), кращий, ніж розв'язок для крапки C, а розв'язок, представлений крапкою C кращий за варіант рішення D для рівних вартостей. Тоді, якщо u і v два вектори цільових функцій, то

$$u = v \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,...,k\} : u_i = v_i$$

$$u \geq v \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,...,k\} : u_i \geq v_i$$

$$u > v \Leftrightarrow u \geq v \wedge u \neq v$$

Використовуючи ці визначення, виявляється , що $B > C$, $C > D$ й, отже, $B > D$. Порівнюючи B та E знаходимо, що ці рішення не перевищують один одного, т.ч. $B \neg > E$ і $E \neg > B$. У цьому випадку має місце домінування.

$$a \succ b (\ a \text{ домінує } b) \Leftrightarrow f(a) > f(b)$$

$$a \succeq b (a \text{ слабо домінує } b\} \Leftrightarrow f(b) \geq f(b)$$

$$a \sim b (a \text{ індеферент по відношенню до } b) \Leftrightarrow (f(a) \neg \geq f(b)) \wedge (f(b) \neg \geq f(a)$$

На рис. 2 зазначені домінуючі області, ті що домінуються й індиферентні області стосовно крапки B. На рис.2 існує одна крапка A, серед B,C,D,E для якої вектор розв'язків не домінується ні яким вектором рішень. Це означає, що *A* є оптимумом Парето. На рис.2 білі кружки позначають оптимальні розв'язки, які індиферентні один до одного. Ці рішення утворюють оптимальну множину Парето, а відповідний вектор цільових функцій – оптимальну межу Парето.

Таким чином, основною відмінністю багатокритеріальних задач є те, що в них немає єдиного оптимального рішення, а існує множина компромісних оптимальних рішень. Жодне з цих рішень не може бути визнано кращим без додаткового визначення переваги.

Тому алгоритм багатокритеріальної оптимізації повинний задовольняти наступним умовам:

1. Відстань від межі, що не домінується, до оптимальної Парето повинна мінімізуватися;
2. Рівномірний розподіл знайдених розв'язків є бажаним;
3. Для кожної цільової функції має бути визначений максимальний інтервал розв'язків, що не домінуються.

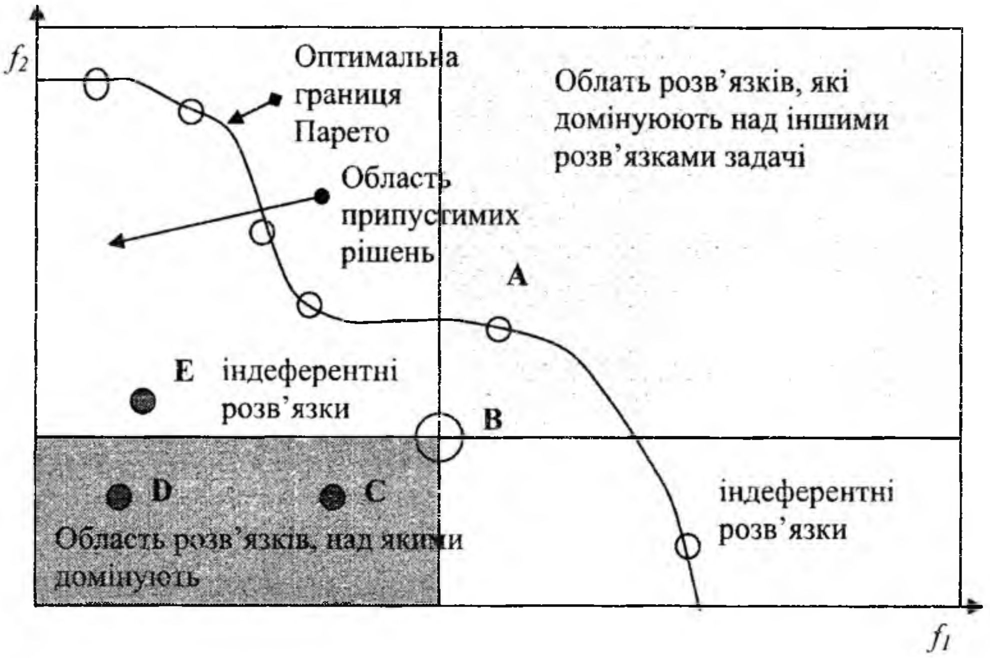

Рис.2. Оптимальність Парето в просторі цільових функцій і відносини між розв'язками

Відомо [1, 2], що багатокритеріальна оптимізація, яка використовує еволюційні алгоритми має перевагу над традиційними методами. Розглянемо її сутність та можливість застосування при вирішені економічних задач.

Еволюційні алгоритми побудовані на принципах еволюції – селекції і варіації. Селекція означає змагання між індивідуумами за володіння засобами існування. Деякі з них здібніші, можуть вижити і передати свій генетичний матеріал. В еволюційному моделюванні природний добір моделюється за допомогою стохастичних процесів. Кожне рішення має шанс відтворитися визначену кількість разів залежно від їх якості (придатності, відповідності). Таким чином, якість індивідуумів оцінюється за допомогою величини придатності. Варіація імітує природну здатність створювати нових індивідуумів за допомогою схрещування і мутації.

У цілому еволюційні алгоритми реалізуються в три етапи:

- підбирається множина розв'язків кандидатів (популяція);
- популяція піддається процесові селекції;
- множина розв'язків кандидатів обробляється за допомогою генетичних операторів мутації і схрещування.

Окремий розв'язок - індивідуум репрезентує можливий вектор рішень задачі. Популяція – це множина таких векторів.

Процес селекції індивідуумів може бути як стохастичним, так і детермінованим. Індивідууми з низькою якістю усуваються, а індивідууми з високою якістю відтворюються. Метою моделювання є підвищення якості всієї популяції в цілому. Кожному індивідуумові відповідає числове значення придатності. Нехай індивідуум $i \in I$. Тоді вектор рішень обчислюється за допомогою функції відображення $x = m(i)$. Застосовуючи функцію цілі f до вектора x, одержимо вектори значень цільових функцій, використовуючи які знайдемо значення придатності для окремих індивідуумів.

Еволюційне моделювання становить ітеративний процес. На початку випадковим чином створюється відправна популяція. З цієї популяції починається процес еволюції. Далі виконуються циклічно етапи оцінки (визначення придатності індивідуумів), селекція, схрещування і їх мутація. Процес закінчується тоді, коли найкращі індивідууми будуть знайдені. Пропонується наступна реалізація еволюційного алгоритму.

Позначимо Pt популяцію визначеної генерації.

Нехай:

N – розмір популяції;

T – максимальна кількість генерацій;

pc – імовірність схрещування;

pm – імовірність мутації.

Тоді: A – множина, що не переважає.

Крок 1: ***Початок процесу моделювання :*** Нехай $P_o = \{\}$ і $t = 0$.

Для $c = 1,\dots,N$ виконати:

a) Вибрати $i \in I$ випадковим чином.

b) $P_0 = P_0 + \{i\}$

Крок 2: ***Визначення значення придатності.*** Для кожного індивідууму $i \in Pt$, визначити вектор рішень $x = m(i)$ також як і вектор цілей $y = f(x)$ і підрахувати значення придатності $F(i)$.

Крок 3: ***Селекція.*** Нехай $P' = \{\}$. Для $c = 1,\dots,N$ виконати :

a) Вибрати індивідуум $i \in Pt$ відповідно до методики визначення придатності $F(i)$.

b) $P' = P' + \{i\}$.

Проміжна популяція P' називається групою відтворення.

Крок 4: ***Схрещування.*** Нехай $P'' = \{\}$. Для $c = 1,\dots,N/2$ виконати :

a) Вибрати два індивідууми i та $j \in P'$ і видалити їх з P'.

b) Схрестити i та j. Їх нащадки будуть k та l, такі що $k, l \in I$.

c) Додати k та l P'' з імовірністю p_c. Інакше, додати i et j в P''.

Крок 5: ***Мутація.*** Нехай $P''' = \{\}$. Для кожного індивідуума $j \in P''$ виконати :

a) Мутувати i з імовірністю мутації p_m. У результаті одержуємо індивідуум задовольняючий $j \in I$.

b) $P''' = P''' + \{j\}$.

Крок 6: ***Закінчення.*** Нехай $Pt + i = P'''$ і $t = t + 1$. Якщо $t > T$ або інший критерій закінчення моделювання вдоволений $A = p(m(Pt))$. Інакше – перейти до кроку 2.

Для визначення значення придатності індивідуума і правильної селекції застосуємо наступний підхід. Розглянемо множину індивідуумів і виділимо серед них індивідууми, що не переважають, привласнимо їм ранг рівня 1 і виключимо їх з множини. На наступній ітерації індивідууми, що не переважають одержують ранг 2, таким чином, придатність індивідуума визначає його ранг. Крім того, величина придатності стосується не до одного індивідуума, а їх підмножини. У результаті застосування цього алгоритму одержуємо оптимальні рішення Парето.

Диверсифікованість популяції досягається у такий спосіб. Передбачається, що чим ближче індивідууми розташовані один до одного, тим нижче в них значення функції придатності. Близькість індивідуумів визначається відстанню $d(i,j)$. Функція корисності обчислюється як

$$F(i)=\frac{F'(i)}{\sum_{j\in P} s(d(i,j))},$$

де $F'(i)$ обчислене раніше значення придатності, $s(d(i,y))$ – функція близькості придатностей окремих індивідуумів. Ця функція дорівнює $s(d(i,j))=1-\frac{d(i,j)}{\sigma_s}$ якщо $d(i,j)<\sigma_s$ інакше $s(d(i,j))=0$, де σ_s – припустиме середньоквадратичне відхилення для дистанцій між індивідуумами. На етапі схрещування і мутації два індивідууми можуть вибиратися для відтворення, якщо вони мають дистанцію між ними, обумовлену параметром σ_s. Ця дистанція визначається також на множинах рішень і цільових функцій.

Розглянута еволюційна модель може бути використана для моделювання функціонування гірничого підприємства з урахуванням багатьох критеріїв, які суперечать один одному. Практична реалізація моделі здійснюється із застосуванням апарату генетичних алгоритмів пакета Matlab [3]. Для реальних показників доцільно виконувати моделювання при складанні виробничих програм на місяць та рік.

Література

1. Fonseca, C. M. and P. J. Flemming An overview of evolutionary algorithms in multiobjective optimization : Evolutionary Computation 3(1), 1-16,1995
2. Valenzuela-Rendon, M., E. Uresti-Charre A non-generational genetic algorithms for multiobjective optimization In T. Back (Ed.), Proceedings of the Seventh International Conference on Genetic Algorithms, San Francisco, California, Morgan Kaufmann, 1997. - pp. 658-665.
3. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Нейронные сети Matlab 6. М., ДиалогМИФИ, 2002. – 489с.

Рекомендовано до публікації
д.е.н., проф. Ковальчуком К.Ф. 26.11.03

Надійшла до редакції
14.11.03