УДК 336.71

Дрозд А. О.
Капустян В.О.
доктор ф.-м. наук, професор
Національний технічний університет України «КПІ»

ОПТИМАЛЬНІ КРЕДИТНІ ТА ДЕПОЗИТНІ СТАВКИ БАГАТОПРОДУКТОВОГО КОМЕРЦІЙНОГО БАНКУ

OPTIMAL LOAN AND DEPOSIT RATES OF MULTIPRODUCT COMMERCIAL BANK

Ціноутворення в банківській діяльності актуальна і складна для вирішення проблема через наявність великої кількості кредитних та депозитних продуктів банку із різними термінами та умовами. Одним із підходів до вирішення цієї задачі є використання математичних моделей банку, зокрема, розробленої авторами потокової моделі банку. На основі потокової моделі банку, описано багатопродуктову потокову модель банку в матричному вигляді для довільної кількості депозитних та кредитних продуктів банку. Поставлено та вирішено задачу керування кредитними та депозитними ставками з метою максимізації капіталу банку на кінець періоду керування. Отримано оптимальні значення кредитних та депозитних ставок з точки зору максимізації капіталу банку на кінець періоду керування для довільного числа продуктів банку за умови відсутності залежності попиту одного продукту від ставки іншого. Відповідно до отриманих оптимальних кредитної та депозитної ставок, отримано оптимальні обсяги виданих кредитів різної строковості та залучених депозитів різної строковості, а також отримано максимальне значення капіталу банку на кінець періоду керування.

Ценообразование в банковской деятельности это актуальная и сложная для решения проблема из-за наличия огромного количества кредитных и депозитных продуктов банка с разными сроками и условиями. Один из подходов к решению этой задачи – использование математических моделей банка, в частности, разработанной авторами потоковой модели банка. На основе потоковой модели банка, была описана многопродуктовую потоковую модель банка в матричном виде для произвольного количества депозитных и кредитных продуктов банка. Была поставлена и решена задача управления кредитными и депозитными ставками с целью максимизации капитала банка на конец периода управления. Были получены оптимальные значения кредитных и депозитных ставок для произвольного числа продуктов банка при условии отсутствия зависимости спроса одного продукта от ставки другого. Соответственно к полученным оптимальным кредитным и депозитным ставкам, были получены оптимальные объемы выданных кредитов разных сроков и аккумулированных депозитов разных сроков, а также было получено оптимальное значение капитала банка на конец периода управления.

Pricing in banking is actual and sophisticated problem. It is hard to find a solution to this problem, because of existence of great number of credit and deposit bank’s products with different maturity and terms. One of approaches to solve this problem is to use mathematical models of bank. We consider using flow model of bank that was developed by authors. On basis of bank flow model, *multiproduct bank model in matrix form was presented. Problem of control by credit rates and deposit rates with goal to maximize bank's equity capital on the end of controlling period was presented and solved. Optimal loan rates and deposit rates for custom number of bank products were achieved under the situation, when demand of one product doesn't depend on rate of other one. According to found optimal credit rates and deposit rates, optimal volumes of output credits and accumulated deposits with different maturities were received. Also optimal bank's equity capital on the end of controlling period was achieved.*

Ключові слова: багатопродуктовий банк, потокова модель банку, кредитна ставка, депозитна ставка, оптимальне керування.

Вступ. Відповідно до Закону України «Про банки і банківську діяльність» від 07.12.00, банк – це юридична особа, яка має виключне право на підставі ліцензії Національного банку України здійснювати у сукупності такі операції:

- залучати як вклади грошові кошти фізичних та юридичних осіб;
- розміщувати вказані кошти від свого імені, на власних умовах та на власний ризик;
- відкривати і вести банківські рахунки фізичних та юридичних осіб.[15]

Одним з підходів до моделювання банківської діяльності є використання потокової моделі банку, де фінансовий потік являє собою певний об'єм коштів за одиницю часу.

Потокова модель банку має ряд особливостей. Потоки в моделі неперервні. Кошти, які надійшли одним із вхідних потоків, можуть бути використані для формування вихідного потоку іншого типу. Тобто, увійшовши до банку, гроші уже не прив'язані до відповідного вхідного потоку та змішуються у єдину грошову масу, яка може бути використана для формування кожного із вихідних потоків у довільних пропорціях. Потокова модель банку зручна для розгляду різноманітних задач з точки зору теорії керування.

Моделюванням банківської діяльності з точки зору теорії керування та за допомогою потокових моделей займалися Гришин [1-2, 13], Іваненко [1,13], Козак [1], Куц [13], Осіпенко [14], Умрик [1]. Також цю проблематику досліджували автори в попередніх працях [3-12].

В роботі [1] було запропоновано розглядати банк з точки зору теорії керування, а в [2] було описано деякі вхідні та вихідні потоки банку. В роботі [14] було описано потокову модель з лінійними функціями кредитів та депозитів та розглянуто задачі оптимального керування кредитною та депозитною ставкою за умови, що всі залучені депозити видаються як кредити. В роботі [13] було описано потокову модель з лінійними функціями кредитів та депозитів, які враховували невизначеність в обсягах депозитів та кредитів. В роботі [3] було запропоновано використовувати програмну реалізацію потокової моделі для навчання працівників банку. В роботі [4] до потокової моделі банку були додані рекламні витрати та притік депозитів внаслідок реклами. В роботі [5] за допомогою чисельних методів отримані графіки розподілу обсягів повернених кредитів за умови, що термін повернення виданих кредитів був випадковою величиною. В роботі [6] аналітично були отримані оптимальна кредитна ставка банку, що максимізує власний капітал на кінець періоду керування, максимальний прибуток банку та власний капітал банку на кінець періоду, за умов, що банк має вдосталь власного капіталу для здійснення кредитної діяльності навіть без залучення депозитів (функціонує, як кредитна фірма). В роботі [7] була отримана оптимальна кредитна ставка для банку, що максимізує власний капітал на кінець періоду керування, максимальний прибуток банку та власний капітал банку на кінець періоду, за умов, що він не здійснює депозитну діяльність, і що його власний капітал може бути будь-яким, в тому числі і недостатнім для видачі обсягу кредитів, на який є попит. В роботі [9] були отримані оптимальна кредитна та депозитна ставки банку, що максимізує власний капітал на кінець періоду керування, максимальний прибуток банку та власний капітал банку на кінець періоду, за умов, що банк має вдосталь власного капіталу для здійснення кредитної діяльності навіть без залучення депозитів, але при цьому здійснює і депозитну діяльність. В роботі [8] були порівняні результати, отримані в [6] та [9], зроблено висновок про необхідність модифікації потокової моделі, щоб вона враховувала залежність між активами та пасивами банку. В роботі [10] було зазначено, що оптимальне керування відрізняється залежно від вигляду функції попиту на кредити. В роботі [11] на основі потокової моделі було розглянуто парадокс Бертрана та запропоновано можливе пояснення його виникнення, проведено паралелі із банківською діяльністю. В роботі [12] потокова модель побудована на основі експоненціальних функцій попиту на кредити та пропозиції депозитів.

Постановка завдання. Метою даного дослідження є визначення оптимальних ставок по довільному числу кредитів та депозитів різної строковості, при яких капітал банку на кінець планового періоду буде найбільшим з урахуванням диференціації кредитних та депозитних продуктів та відсутності залежності між попитом на продукти різної строковості.

Методологія. Для вирішення задачі було використано двоконтурну потокову модель банку, описану в [5].

Відповідно до цієї потокової моделі, банк описують як об'єкт, в який входять і виходять певні потоки грошей. Враховуючи лише кредитно-депозитні потоки, рівняння капіталу банку приймає вигляд:

$$x_1(t) = x_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} (-K(t) + K(t-T_k) \cdot u_k(t-T_k) + D(t) - D(t-T_d) \cdot u_d(t-T_d))\mathrm{dt}$$

де

$x_1(t)$ - капітал банку на момент часу t;

$K(t)$ - об'єм виданих кредитів на момент часу t;

T_k - інтервал часу на який видаються кредити;

$u_k(t)$ - процентна ставка по кредиту на момент часу t;

$D(t)$ - об'єм залучених депозитів на момент часу t;

T_d - інтервал часу на який залучаються депозити;

$u_d(t)$ - процентна ставка по депозиту на момент часу t;

Автори зазначають, що з загальних міркувань цілком очевидно, що зі збільшенням кредитної процентної ставки кредитний потік зменшиться. Аналогічно, зі збільшенням депозитної процентної ставки депозитний потік збільшується.

Виходячи з цього пропонується такий вигляд функції попиту для кредитів:

$$K(t) = K_0 - b \cdot u_k(t) + \xi_k(t)$$

де K_0 – попит на кредит при нульовій ставці проценту; K_0 характеризує загальний потенціал ринку щодо цієї послуги ($K_0 > 0$); b– коефіцієнт, який показує, на скільки грошових одиниць зменшиться кредитний попит при збільшенні ставки відсотка на 1 % ($b \geq 0$); $\xi_k(t)$ – деяка випадкова величина;

Аналогічно функція пропозиції для депозитів:

$$D(t) = D_0 + a \cdot u_d(t) + \xi_d(t)$$

D_0 – попит на депозит при нульовій ставці проценту; коефіцієнт a показує, на скільки грошових одиниць збільшиться депозитний попит при збільшенні ставки відсотка на 1% ($a \geq 0$).$\cdot$ $\xi_d(t)$ – деяка випадкова величина.

$\xi_k(t), \xi_d(t), -c \leq \xi_i \leq c, i = (k,d)$ - випадкові величини, які відображають невизначеність у залежності попиту від процентної ставки.

Враховуючи вищеописане отримаємо рівняння стану комерційного банку в такому вигляді:

$$\dot{x}_1(t) = -(K_0 - b \cdot u_k(t) + \xi_k(t)) + (K_0 - b \cdot u_k(t-T_k) + \xi_k(t-T_k)) \cdot (1 + u_k(t-T_k))$$
$$+ (D_0 + a \cdot u_d(t) + \xi_d(t)) - (D_0 + a \cdot u_d(t-T_d) + \xi_d(t-T_d)) \cdot (1 + u_d(t-T_d))$$

$$x_1(t_0) = x_0$$

Процентний дохід як різниця отриманих процентів від кредитів і виплачених процентів за депозити отримаємо в такому вигляді:

$$x_2(t) = \int_{t_0}^{t} (K_0 - b \cdot u_k(\tau - T_k) + \xi_k(\tau - T_k)) \cdot u_k(\tau - T_k) -$$
$$-(D_0 + a \cdot u_d(\tau - T_d) + \xi_d(\tau - T_d)) \cdot u_d(\tau - T_d) \mathrm{d}\tau$$

На основі цієї моделі будемо проводити наше дослідження.

Результати дослідження. Розглянемо модель для N продуктів.

Вхідний депозитний потік в двопотоковій моделі банку має вигляд:

$$D_{in}(t) = D + a \cdot u_D(t),$$

де

$D_{in}(t) = diag\{D_{in\,i}(t)\}_{i=1}^{N}$ - матриця вхідного потоку від депозитів;

$D = diag\{D_i\}_{i=1}^{N}$ - матриця пропозиції депозитів при нульовій ставці процента;

$a = diag\{a_i\}_{i=1}^{N}$ - матриця еластичностей пропозиції депозитів для N депозитних продуктів;

$u_D(t) = diag\{u_{D\,i}(t)\}_{i=1}^{N}$ - матриця керуючих впливів — депозитних ставок для N депозитних продуктів.

Аналогічно для вихідних депозитних потоків із фіксованим запізненням формула залежності вихідного депозитного потоку від депозитної ставки має вигляд:

$$D_{out}(t) = D_{in}(t - t_D) \cdot (1 + u_D(t - t_D)),$$

де

$D_{out}(t) = diag\{D_{out\,i}(t)\}_{i=1}^{N}$ - матриця вихідного потоку від депозитів — обсяги повернених депозитів для N депозитних продуктів;

Аналогічно, вихідні кредитні потоки мають вигляд:

$$K_{out}(t) = K - b \cdot u_K(t),$$

де

$K_{out}(t) = diag\{K_{out\,i}(t)\}_{i=1}^{N}$ - матриця вихідного потоку від кредитів — обсяги виданих кредитів для N кредитних продуктів;

$K = diag\{K_i\}_{i=1}^{N}$ - матриця попиту на кредити при нульовій ставці процента;

$b = diag\{b_i\}_{i=1}^{N}$ - матриця еластичностей попиту на кредити для N депозитних продуктів;

$u_K(t) = diag\{u_{K\,i}(t)\}_{i=1}^{N}$ - матриця керуючих впливів — кредитних ставок для N кредитних продуктів.

Формула кредитного вхідного потоку при одній ставці процента за кредитами має вигляд:

$$K_{in}(t) = K_{out}(t - t_K)\cdot(1 + u_K(t - t_K))$$

де

$K_{in}(t) = diag\{K_{in\,i}(t)\}_{i=1}^{N}$ - матриця вхідного потоку від кредитів — обсяги повернених кредитів для N кредитних продуктів;

Виведемо рівняння приросту капіталу банку:

$$\begin{gathered}
\dot{x}(t) = K_{in}(t) — K_{out}(t) + D_{in}(t) - D_{out}(t) = \\
= (K - b\cdot u_K(t - t_K))\cdot(1 + u_K(t - t_K)) - (K - b\cdot u_K(t)) + (D + a\cdot u_D(t)) - \\
-(D + a\cdot u_D(t - t_D))\cdot(1 + u_D(t - t_D)) = \\
= K + K\cdot u_K(t - t_K) - b\cdot u_K(t - t_K) - b\cdot u_K^2(t - t_K) - K + b\cdot u_K(t) + \\
+ D + a\cdot u_D(t) - D - D\cdot u_D(t - t_D) - a\cdot u_D(t - t_D) - a\cdot u_D^2(t - t_D) = \\
= (K - b)\cdot u_K(t - t_K) - b\cdot u_K^2(t - t_K) + b\cdot u_K(t) + \\
+ a\cdot u_D(t) - (a + D)\cdot u_D(t - t_D) - a\cdot u_D^2(t - t_D)
\end{gathered}$$

Рівняння приросту капіталу банку матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = (K - b)\cdot u_K(t - t_K) - b\cdot u_K^2(t - t_K) + b\cdot u_K(t) + \\
+ a\cdot u_D(t) - (a + D)\cdot u_D(t - t_D) - a\cdot u_D^2(t - t_D),
\end{aligned}$$

де

$\dot{x}(t) = diag\{\dot{x}_i(t)\}_{i=1}^{N}$ - матриця процентних доходів банку від різних кредитних та депозитних продуктів, при цьому слід вважати, що i кредитний та депозитний продукти мають однаковий строк вкладу;

Таким чином, задача оптимального керування кредитною та депозитною ставками комерційного банку з метою максимізації його капіталу на кінець періоду керування формулюється так:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i(T) \to \max_{u_K(t), u_D(t)},$$

$$\dot{x}(t) = (K - b)\cdot u_K(t - t_K) - b\cdot u_K^2(t - t_K) + b\cdot u_K(t) + a\cdot u_D(t) - (a + D)\cdot u_D(t - t_D) - a\cdot u_D^2(t - t_D),$$

$$x(0) = x_0,$$

$$u_{K\,i}(t) \ge 0,$$

$$u_K(t) = u_{K0}(t) \quad при \quad -t_K \le t \le 0$$

$$u_{D\,i}(t) \geq max\left(0; -\frac{D}{a}\right),$$
$$u_D(t) = u_{D0}(t) \quad при \quad -t_D \leq t \leq 0$$
$$0 \leq t \leq T.$$

Ця задача розв’язується шляхом імітаційного моделювання або за допомогою чисельних методів.

Покажемо її аналітичний розв’язок для часткового випадку, що не враховує запізнення ($t_D = t_K = 0$).

Вважатимемо, що строк вкладання депозитів рівний нулю $t_D = 0$ та строк, на який видаються кредити рівний нулю $t_K = 0$, при цьому диференціація двох продуктів полягатиме лише в різних розмірах кредитної та депозитної ставок та різних коефіцієнтах функцій попиту на кредити та пропозиції депозитів.

Тоді задача приймає вигляд:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i(T) \to \max_{u_K(t), u_D(t)},$$
$$\dot{x}(t) = K \cdot u_K(t) - b \cdot u_K(t)^2 - D \cdot u_D(t) - a \cdot u_D(t)^2,$$
$$x(0) = x_0,$$
$$u_{K\,i}(t) \geq 0,$$
$$u_{D\,i}(t) \geq max\left(0; -\frac{D}{a}\right),$$
$$0 \leq t \leq T.$$

За припущення, що кредитні та депозитні продукти незалежні, можемо знайти оптимальні кредитні та депозитні ставки кожного з продуктів незалежно один від одного. Для такої задачі в [9] були отримані оптимальна кредитна та депозитна ставки, із врахуванням двох кредитних та депозитних продуктів вони мають вигляд:

$$u_{Ki}(t) = \frac{K_i}{2 \cdot b_i}, \quad i = \overline{1, N},$$
$$u_{Di}(t) = max\left(0; -\frac{D_i}{a_i}\right), \quad i = \overline{1, N}.$$

За таких оптимальних кредитних та депозитних ставок оптимальні обсяги залучених депозитів та виданих кредитів становитимуть:

$$K_{outi}(t) = \frac{K_i}{2,} \quad i = \overline{1, \mathrm{N}},$$

$$D_{in\ i}(t) = max(0, D_i), \quad i = \overline{1, \mathrm{N}}.$$

Максимальний процентний дохід, що перевкладається у капітал:

$$\dot{x}_i(t) = \frac{K_i^2}{4 \cdot b_i}, \quad i = \overline{1, N}$$

Тоді максимальний капітал банку на кінець періоду керування становитиме:

$$x(T) = x_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i^2}{4 \cdot b_i} \cdot T$$

Висновки. Було запропоновано потокову модель комерційного банку, що враховує наявність диференціації депозитних та кредитних продуктів. Для випадку відсутності запізнення їх повернення було отримано оптимальні кредитну та депозитну ставки, максимальний прибуток банку та максимальний капітал на кінець періоду керування.

Наукова новизна дослідження полягає в отриманні оптимальних ставок для довільного числа кредитних та депозитних продуктів за наведених умов в потоковій моделі банку, що з точки зору теорії розширює коло задач, для яких можна використовувати потокову модель банку, а з практичної – надає можливість отримувати оптимальні ставки за різними банківськими продуктами та оцінити загальний прибуток від основної діяльності для багато продуктового банку. Цю модель рекомендується використовувати у випадку, якщо відомі функції попиту на різні продукти окремого банку та відомо, що немає впливу ставок одних продуктів на обсяги попиту інших продуктів.

Подальші наукові розробки доцільно робити у напрямку дослідження залежності між функціями попиту на різні банківські продукти та врахування окрім основної діяльності комерційного банку і інших напрямів його діяльності.

Література:

1. Гришин А.Г. Постановка задачи оптимизации управления коммерческим банком / Гришин А.Г., Козак Д.В., Умрик А.В., Иваненко В.И. // Вестник Национального технического университета “Харьковский политехнический институт”. – Х.: 2001. – ч.2, С. 154–157.
2. Гришин О.Г. Стратегічне планування та керування діяльністю банківської установи на основі математичної моделі комерційного банку // Економіка та підприємництво. КНЕУ. – К.: 2004. – Випуск 12, С. 261–266.
3. Дрозд А.О. Моделювання кредитного ризику в потоковій моделі банку / Дрозд А.О., Капустян В.О. // Збірник наукових праць «Сучасні проблеми економіки і підприємництва», випуск 5, ч.2. – Київ.: ВПК «Політехніка», 2010. – С. 103–105.

4. Дрозд А.О. Ефективне керування рекламними витратами банку / Дрозд А.О., Капустян В.О. // Міжнародний науково-практичний журнал «Економіка та держава». – Київ.: ТОВ «Редакція журналу «Економіка та держава», 2010. – № 6. – С. 65-67.
5. Дрозд А.О. До впливу невизначеності у термінах повернених кредитів на грошовий потік банку / Дрозд А.О., Капустян В.О. // Матеріали ІІ міжнародної науково-методичної конференції «Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці». – Чернівці: «ДрукАрт», 2011. – С. 109-110.
6. Дрозд А.О. До питання керування кредитною діяльністю банку. / Дрозд А.О., Капустян В.О. // Матеріали XVI всеукраїнської науково-методичної конференції «Проблеми економічної кібернетики». Том 2. – Одеса: ОНПУ, 2011. – С. 105–106.
7. Дрозд А.О. Керування кредитною ставкою комерційного банку з метою максимізації прибутку. // Збірник матеріалів міжнародної науково-практичної конференції «Економіко-соціальні аспекти реформування та розвитку України». – Київ: КЕНЦ, 2011. – С. 80–82.
8. Дрозд А.О. Порівняння керування кредитною та кредитно-депозитною діяльністю банку з капіталом, достатнім для задоволення максимального попиту на кредити. // Збірник тез V міжнародної науково-практичної конференції «Теорія і практика економічного аналізу: сучасний стан, актуальні проблеми та перспективи розвитку». – Тернопіль: СМП «Тайп», 2011. – С. 96–98.
9. Дрозд А.О. Керування основною діяльністю банку із власним капіталом, достатнім для задоволення максимального попиту на кредити. // Матеріали ІІ Міжнародної конференції молодих вчених ЕМ-2011. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. – с. 244–245.
10. Дрозд А.О. До аналізу оптимального керування кредитною ставкою комерційного банку за різних функцій попиту на кредити. // Збірник тез доповідей XIV Всеукраїнської науково-практичної конференції. – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ», 2011. – с. 111–112.
11. Дрозд А.О. Парадокс Бертрана в потоковій моделі банку. // Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції «Моделювання та прогнозування економічних процесів». – Київ: НТУУ «КПІ», 2011. – С. 7.
12. Дрозд А.О. Огляд питання невизначеності в термінах погашення кредитів. // Матеріали VII Міжнародної конференції «Науково-технічний розвиток: економіка, технології, управління». – Київ: НТУУ «КПІ», 2008. – С. 238.
13. Іваненко В.І. До управління фінансами в комерційних банках / Іваненко В.І., Куц О.В., Гришин О.Г. // Моделювання та інформаційні системи в економіці. Випуск 84. - К.: КНЕУ, 2011. – С. 220–230.
14. Осипенко Д.В. Динамічна модель комерційного банку // Фінанси України. – 2005. – №11. – С. 87–92.
15. Закон України «Про банки і банківську діяльність»: за станом на 7 груд. 2000 р. / Верховна Рада України. — Офіц. вид. — К. : Відомості Верховної Ради України, 2009. — №15, 190 с. — (Бібліотека офіційних видань).