

Використовуючи результати роботи в туристичній сфері, фірма зможе підвищити свою ефективність. В подальшому дослідження можливо продовжити, застосувавши методи когнітивного моделювання.

#### Література:

1. Авдєєва З.К., Коврига С.В., Макаренко Д.І. Когнітивне моделювання для вирішення завдань управління слабо структурованими системами (ситуаціями). Управління великими системами: збірник праць. 2005. С. 26-39.
2. Вендров А.М. Проектування програмного забезпечення економічних інформаційних систем: підручник. М. : Фінанси і статистика, 2006. 544 с.
3. Кулінич А.А. Когнітивна система підтримки прийняття рішень «Канва». *Програмні продукти і системи*. 2002. №3. С. 37-41.
4. Коврига С.В., Максимов В.І. Застосування структурно-цільового аналізу розвитку соціально-економічних ситуацій. *Проблеми управління*. 2005. №3. С. 39-43.
5. Карпова Г. А. Економіка сучасного туризму. СПб: Торговий дім Герда, 2002. 120 с.
6. Пашута М. Т., Калина А. В. Прогнозування та макроекономічне планування: навч. посібник. К.: МАУП, 1998. 192 с.
7. Таркуцяк А. О. Фінансовий аналіз та управлінські рішення: навчальний посібник. К.: В-во «Єропен» УПТУ, 2001. 201 с.

УДК 330.46

JEL classification: G31

**Цеслів О.В.**

кандидат технічних наук, доцент

ORCID: 0000-0002-8190-2502

**Гришко М.П.**

ORCID: 0000-0002-5071-4955

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

## СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ ПОСТАВОК ТОВАРУ

### STOCHASTIC MODELS OF GOODS SUPPLY MANAGEMENT

В цій роботі представлені стохастичні моделі управління запасами. Перша – неперервна модель поставок товару з обмеженнями тільки на масу і об'єм товару. Для цієї задачі всі задачі математичного програмування залежно від виду функції розподілу попиту й обмежень можуть бути розділені на множину класів, кожний з яких характеризується своїми методами розв'язання. Один з цих методів представлено в роботі. Розроблена стохастична модель управління запасами дозволить визначити ефективну стратегію ринкової діяльності з урахуванням фінансово-ресурсних обмежень. Також розроблені

практичні рекомендації для прийняття оптимальних рішень при плануванні поставок в умовах невизначеності попиту і часу поставки. Окремо в роботі розглядається ймовірнісна модель управління запасами, в якій попит є випадковою величиною з відомим законом розподілу. Визначена оптимальна стратегія замовлення продукції, при випадковому попиті. Проаналізовано, як зміняться отримані результати при різних законах розподілу випадкової величини, а саме при рівномірному, експоненціальному і нормальному законах. Для даної задачі знайдено оптимальний розподіл ресурсів для максимізації загального прибутку. Для розв'язання задачі використано метод динамічного програмування. Методологічною основою дослідження послужили праці вітчизняних і зарубіжних фахівців, які займалися проблемами логістики, управління запасами, управління ризиками та дослідження операцій. Матеріал статті може бути рекомендований для подальшого використання при створенні ймовірнісних моделей управління запасами, в яких попит є випадковою величиною з відомим розподілом ймовірностей.

**Ключові слова:** інвестиції, оптимальний розподіл інвестицій, динамічне стохастичне програмування, принцип оптимальності Белмана.

*This paper presents stochastic inventory management models. The first is a continuous model of goods supply with mass and volume of goods restrictions. For this task, all the mathematical programming tasks, depending on the type of the distribution function of demand and constraints, can be divided into a number of classes, each of them is characterized by its own solution methods, one of them is presented in this paper. The developed stochastic model of the organization's inventory management will allow determining an effective market activity strategy, taking into account financial and resource constraints. Practical recommendations have been made for optimal decisions making when planning deliveries under conditions of the uncertainty of demand and delivery time. The paper also considers a probabilistic model of inventory management, in which demand is a random variable with a known probability distribution law. The optimal strategy for ordering products, with random demand is defined. It is analyzed how the obtained results will change with different laws of the distribution of a random variable, namely with a uniform distribution, exponential, normal. For this task, the optimal resources allocation to maximize the total profit was found. To solve the problem, the dynamic programming method was used. The methodological basis of the study was the works of local and foreign experts who dealt with problems of logistics, inventory management, risk management, operations research. Article material can be recommended for further use when creating probabilistic models of inventory management, with random demand variable with a known probability distribution law.*

**Key words:** investment, optimal promotion, investment, dynamic stochastic programming, Bellmann's principle of optimality.

**Вступ.** Метою роботи є розробка стохастичної моделі управління запасами. Оптимальне управління запасами дозволяє знизити потреби в складських площах, зменшуючи витрати підприємства.

Різним аспектам досліджуваної проблематики у своїх працях приділяють значну увагу вітчизняні та зарубіжні вчені, а саме: Белман Р. [1], Вітлінський В.В. [2], Зайченко Ю.П. [3], Кігель В.Р. [4], Таха Х.А. [5], Геец В.М. [6].

Ринкові умови, що швидко змінюються, недосконалість законодавчої бази, інфляційні процеси та економічна криза вимагають гнучкого підходу до формування інвестиційної стратегії компанії.

Процеси управління виробництвом супроводжуються випадковими перешкодами, тому для їх моделювання використовуються стохастичні моделі.

Особливості аналізу моделей управління запасами в цілому обумовлюються такими факторами: попит носить випадковий характер; тривалість процедур поповнення запасів є випадковою величиною.

*Об'єктом дослідження* є системи управління запасами торгових підприємств. *Предметом дослідження* є моделі і методи оптимізації управління запасами підприємства з урахуванням різних умов і параметрів діяльності.

**Постановка завдання.** Група компаній "Бест Лайн" – один з найбільших постачальників керамічної плитки, сантехніки, змішувачів, меблів для ванних кімнат на ринку України, оптимізує поставки товару.

Компанія надала відповідні статистичні дані продажів відповідного товару за попередні місяці. Необхідно розробити стохастичну модель визначення оптимальних обсягів поставок.

**Методологія.** Методологічною основою дослідження послужили праці вітчизняних і зарубіжних фахівців, які займалися проблемами логістики, управління запасами, управління ризиками та дослідження операцій. В роботі використовувалися методи математичного аналізу, фінансового аналізу, прийняття рішень, теорії оптимізації, математичного програмування, теорії ймовірностей, динамічного програмування.

**Результати дослідження.** Особливість моделі управління запасами, яка описана в цій роботі, можна представити таким чином:

1. кількість видів товару довільна  $m(i = 1, \dots, m)$ , по кожному з них плануються свої запаси;
2. на весь період  $[0; T]$  є певна кількість  $k$  виділених фур, з заданими характеристиками (об'єм, гранична маса вантажу, що перевозиться, граничний обсяг вантажу, що перевозиться, вартість прогону);
3. попит представлений неперервною випадковою величиною з заданим законом розподілу на період часу  $[0; T]$ ;
4. цільова функція включає потік платежів, які враховують надходження від продажу товарів, витрати на закупівлю товарів і транспортні витрати.

Розглянемо неперервну модель без урахування тимчасової вартості грошей з обмеженнями тільки на масу і об'єм товару, що перевозиться в одній фурі. Введемо наступні позначення:

$T$  – тривалість часового періоду,

$m$  – кількість видів товарів;

$k$  – кількість виділених фур;

- $\rho$  – інтенсивність попиту на товар  $i$ ;  
 $V$  – граничний обсяг вантажу, що перевозиться однієї фурую;  
 $M$  – гранична маса вантажу, що перевозиться однієї фурую;  
 $v_i$  – обсяг одиниці  $i$ -го товару;  
 $m_i$  – маса одиниці  $i$ -го товару;  
 $c_i$  – виручка від продажу одиниці товару;  
 $x_i(t)$  – запаси товару  $i$  в момент часу  $t$ ;  
 $H$  – вартість прогону фури;  
 $h_i$  – ціна закупівлі одиниці товару  $i$ ;  
 $r_i^j$  – кількість товару в момент поставки.

Кількість проданого  $i$ -го товару на інтервалі часу  $[t_j, t_{j+1}]$ , знаходимо за допомогою формул (1-2):

$$p_i^j = \min(x_i(t_j), \int_{t_j}^{t_{j+1}} \rho_i(t) dt), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k \quad (1)$$

$$x_i(t_j) = \max(x_i(t_{j-1}) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \rho_i(t) dt, 0) \quad (2)$$

Тоді сумарний потік вхідних платежів від реалізації всіх видів товарів обчислюється за формулою (3):

$$P = \sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=0}^k p_i^j, \quad (3)$$

сумарні витрати на покупку всіх видів товарів, згідно з формулою (4), складуть:

$$R_1 = \sum_{i=1}^m h_i \sum_{j=1}^k r_i^j, \quad (4)$$

сумарні транспортні витрати, відповідно до формули (5), складуть:

$$R_2 = Hk. \quad (5)$$

Максимізується сумарна величина потоку платежів, що враховує надходження грошових коштів від продажу товарів і витрати на придбання та доставку товарів, відповідно до виразу (6):

$$P \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow \max_{i,r} \quad (6)$$

при обмеженнях (7) на граничний обсяг вантажу, що перевозиться однієї фурую:

$$\sum_{i=1}^m v_i r_i^j \leq V, \quad j = 1, \dots, k, \quad (7)$$

обмеженнях (8) на граничну масу вантажу, що перевозиться однієї фурую:

$$\sum_{i=1}^m m_i r_i^j \leq M, \quad j = 1, \dots, k \quad (8)$$

Розглянемо наступні значення параметрів:  $m = 3$ ;  $V = 7000$ ,  
 $M = 4000$ ,  $v_i = (10, 20, 50)$ ,  $m_i = (20, 30, 50)$ ,  $c_i = (30, 30, 100)$ ,  $H = 1000 \text{ грн}$ ,  
 $h_i = (10, 81, 202)$ .

Запаси товару в момент часу та кількість товару в момент поставки показані в таблиці 1.

Таблиця 1 - Запаси товару в момент часу та кількість товару в момент поставки

$t$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$
1	20	10	40	20	10	20	1200	1100	1000
2	25	15	40	31	20	30	1500	1200	1000
3	30	10	40	52	40	40	2000	1500	900

Розв'язуючи задачу, за допомогою формул (1-8) отримуємо розв'язок –  $k = 20$  фур.

Досліджуємо можливий стан системи при ймовірнісному попиті та миттєвих поставках товару підприємством з метою визначення оптимального об'єму виробництва продукції по кожному проекту. Розглянемо випадок, коли товар має різний попит.

Таблиця 2 - Статистичні дані

№	1 товар (плитка AZTECA)		2 товар (плитка COLORKER)		3 товар (плитка CERACASA)	
	Попит, $M^2$	Частота	Попит, $M^2$	Частота	Попит, $M^2$	Частота
1	2200–2350	16	1550–1675	12	1360–1480	6
2	2350–2500	18	1675–1800	19	1480–1600	12
3	2500–2650	19	1800–1925	16	1600–1720	13
4	2650–2800	24	1925–2050	21	1720–1840	19
5	2800–2950	38	2050–2175	35	1840–1960	33
6	2950–3100	56	2175–2300	53	1960–2080	51
7	3100–3250	59	2300–2425	56	2080–2200	54
8	3250–3400	61	2425–2550	57	2200–2320	56
9	3400–3550	63	2550–2675	59	2320–2440	58
10	3550–3700	69	2675–2800	65	2440–2560	64

Ціна плитки Azteca - 919 грн., плитки Colorker - 2253 грн., плитки Ceracasa - 1538 грн.

Для вибору обсягів інвестицій, у виробництво кожного товару необхідно враховувати оптимальний рівень виробництва та запасів, що дозволить зекономити на ресурсах і збільшити прибуток. Це визначить обсяги інвестицій, які будуть основними параметрами моделі. Нехай:

$C(y - z)$  – витрати на виробництво  $i$ -тої продукту;

$z$  – наявний запас продукції до початку виробництва;

$y$  – об’єм замовлення продукції ( $y \geq z$ );

$x$  – величина випадкового попиту за певний період  $t$ ;

$f(x)$  – щільність розподілу попиту за певний період  $t$ ;

$S(y - x)$  – питомі затрати на зберігання одиниці продукції протягом певного періоду  $t$ , коли залишається частина невикористаного запасу;

$P(x - y)$  – питомі затрати від незадоволеного попиту (штраф за дефіцит) на одиницю продукції протягом часу  $t$ .

Визначимо оптимальний об’єм замовлення  $y^*$ , який мінімізує сумарні очікувані затрати, пов’язані із виробництвом, зберіганням і незадоволеним попитом. Розглянемо частковий випадок моделі при ймовірнісному попиті, коли функції затрат  $P(u)$ ,  $S(u)$ ,  $C(u)$  – лінійні. В цьому випадку величину  $y^*$  можна визначити аналітично (9):

$$S(y - x) = S \cdot (y - x), \quad P(x - y) = P \cdot (x - y), \quad C(y - z) = C \cdot (y - z). \quad (9)$$

Тоді математичне сподівання загальних витрат підприємства за період  $t$  становить:

$$L_t(y, z) = S \int_0^y (y - x) f(x) dx + P \int_y^\infty (x - y) f(x) dx + C(y - z),$$

$$\frac{\partial L_t(y, z)}{\partial y} = S \int_0^y f(x) dx - P \int_y^\infty f(x) dx + C = 0 = SF(y) - P(1 - F(y)) + C = 0.$$

Для знаходження оптимального рівня замовлення отримуємо рівняння:

$$F(y) = \frac{P - C}{P + S},$$

де  $F(y)$  – функція розподілу випадкового попиту.

Тому, для показникового розподілу попиту отримуємо такий оптимальний об’єм виробництва:

$$F(y^*) = 1 - e^{-\frac{y}{\mu T}} = \frac{P - C}{P + S}, \quad y^* = \mu T \ln \frac{P + S}{C + S}.$$

Для рівномірного розподілу (10):

$$F(y^*) = \frac{1}{b - a} = \frac{P - C}{P + S}, \quad y \in [a, b],$$

$$y^* = \frac{b(P - C) + a(C + S)}{P + S}. \quad (10)$$

Для нормального розподілу не можна аналітично виразити  $y^*$ , але використовуючи функцію Лапласа можна записати (11):

$$\begin{aligned}
 F(y^*) &= \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \Phi_0\left(\frac{y-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-a}{\sigma}\right) = \\
 &= \Phi_0\left(\frac{y-a}{\sigma}\right) + 0,5 = 0,5 + \Phi_0\left(\frac{y-a}{\sigma}\right); \\
 F(y^*) &= 0,5 + \Phi_0\left(\frac{y-a}{\sigma}\right) = \frac{P-C}{P+S}; \\
 \Phi_0\left(\frac{y-a}{\sigma}\right) &= \frac{0,5(P-S) - C}{P+S}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Для закону розподілу Релея отримаємо (12):

$$F(y^*) = 1 - e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{P-C}{P+S}, \quad y^* = \sigma\sqrt{2\ln\frac{P+S}{S+C}}. \quad (12)$$

Отже, для знаходження найкращого плану інвестування, враховуючи в проектах оптимальний об'єм виробництва одержимо наступне рекурентне співвідношення (13):

$$f_i^*(x_i) = \max_{y_i} \left\{ (P_i y_i + f_{i+1}^*(x_i - y_i C_i)) \right\}, \quad (i = \overline{1, n}), \quad y_i \leq x_i. \quad (13)$$

Знаючи, що  $y_i = y_i^*$  для показникового розподілу, остаточно одержимо модель вибору оптимального плану інвестування для різних видів продукції. Вона буде знаходити максимальний прибуток при різних комбінаціях інвестицій та доходів (табл. 2), враховуючи обмеження на загальний обсяг виділених коштів (14):

$$f_i^*(x_i) = \max_{y_i} \left\{ \left( P_i \mu T \ln \frac{P+S}{C+S} + f_{i+1}^*(x_i - C_i \mu T \ln \frac{P+S}{C+S}) \right) \right\}. \quad (14)$$

Для рівномірного розподілу:

$$f_i^*(x_i) = \max_{y_i} \left\{ \left( \frac{P_i b(P-C) + P_i a(C+S)}{P+S} + f_{i+1}^*(x_i - \frac{P_i b(P-C) + P_i a(C+S)}{P+S}) \right) \right\}.$$

Для розподілу Релея (15):

$$f_i^*(x_i) = \max_{y_i} \left\{ \left( P_i \sigma \sqrt{2\ln\frac{P+S}{S+C}} + f_{i+1}^*(x_i - C_i \sigma \sqrt{2\ln\frac{P+S}{S+C}}) \right) \right\}. \quad (15)$$

Розв'яжемо цю задачу, починаючи пошук умовно-оптимального управління з останнього кроку. Скористаємося методом динамічного програмування для знаходження оптимального розв'язку. Зв'язок між зазначеними кроками забезпечується обмеженням на загальний обсяг виділених коштів.

Змінні задачі оберемо так, щоб можна було послідовно керувати процесом розподілу коштів:



$x_1$  – обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 1–4;

$x_2$  – обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 2–4;

$x_3$  – обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 3 і 4;

$x_4$  – обсяг капіталовкладень, виділених на 4–му кроці;

$y_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – обсяг інвестицій в  $i$ -тий вид продукції;

$y_i^*$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – оптимальний обсяг інвестицій в  $i$ -тий вид продукції;

Рекурентне співвідношення (16), що описує зв'язок між етапами управління від 4–го кроку до 1–го кроку подається у вигляді:

$$f_i^*(x_i) = \max_{y_i} \{ (P_i y_i + f_{i+1}^*(x_i - y_i C_i)) \}, \quad (i = \overline{1, n}), \quad y_i \leq x_i. \quad (16)$$

Використовуючи дані підприємства «Бест Лайн», побудуємо таблицю 3.

Таблиця 3 - Залежність прибутку від капіталовкладень

Витрати $C$ та доходи $D$ на товари, тис. грн.						Загальна сума, тис. грн.		Прибуток, тис. грн.
Товар №1		Товар №2		Товар №3		$\sum C$	$\sum D$	
$C_1$	$D_1$	$C_2$	$D_2$	$C_3$	$D_3$			$P$
20	74	50	18600	62	123	18797	132	18665
15	50	69	23400	86	230	23680	170	23510
41	186	65	25600	83	250	26036	189	25847
50	206	64	26000	73	400	26606	187	26419

Необхідно визначити оптимальний розподіл коштів між товарами для максимізації загального прибутку. Для розв'язку задачі використовуємо метод динамічного програмування. В даному випадку етапами задачі буде не час, а розподіл коштів між товарами.

Таблиця 4 - Оптимальний розподіл ресурсів

Витрати $C$ та доходи $D$ на товари, тис. грн.						Загальна сума, тис. грн.		Прибуток тис. грн.
Товар №1		Товар №2		Товар №3		$\sum C$	$\sum D$	
$C_1$	$D_1$	$C_2$	$D_2$	$C_3$	$D_3$			$P$
11	150	25	55	17	95	53	300	247

**Висновки.** Наукова новизна даної роботи полягає в створенні стохастичної неперервної моделі поставок товару з обмеженнями тільки на масу і об'єм товару. Результатом розв'язку задачі є оптимальна кількість фур для перевезення товару.

Розроблена стохастична модель дозволить організації мінімізувати витрати підприємства. Наведені практичні рекомендації для прийняття оптимальних рішень при плануванні поставок в умовах невизначеності.



Розглянута імовірнісна модель управління запасами, в якій попит є випадковою величиною з відомим розподілом ймовірностей, дає можливість оптимізувати розподіл ресурсів. Проаналізовано, як зміняться отримані результати при різних законах розподілу випадкової величини, а саме при рівномірному розподілі, експоненціальному, нормальному. Для даної задачі знайдено оптимальний розподіл ресурсів для максимізації загального прибутку. Для розв'язку задачі використаний метод динамічного програмування.

**Література:**

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Москва, 1976.
2. Вітлінський В.В., Наконечний С.І. Ризик у менеджменті. Київ: ТОВ «Бори сфен-М», 1996. 336 с.
3. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: підручн. для вищ. навч. закл., що навч. за напр. "Прикладна математика" та "Комп'ютерні науки". 5-е вид. перероб. і доп. Київ: ЗАТ "ВПОЛ", 2001. 688 с.
4. Кігель В. Р. Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці: монографія. Київ: ЦУЛ, 2003. 202 с.
5. Таха Х. А. Введение в исследование операций. Вильямс, 2005. 912 с.
6. Совершенствование управления отраслью / В. И. Голиков, А. П. Калашников, В. М. Геец и др. / за ред. В. И. Голиков. Киев: Наук. думка, 1989. 141 с.