позволяют представить особенности мезомасштабных структур в пределах типичных для образования сильных осадков синоптических процессов.

Ключевые слова: синоптические процессы, блокирующий антициклон, осадки, диагностические модели, термодинамические параметры, скорость конденсации, вертикальные движения, перенасыщения по отношению ко льду.

Надійшла до редколегії 05.05.2014

УДК 551.509.313

Прусов В. А., Безнощенко Б.
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ПІДВИЩЕННОЇ ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ МОДЕЛІ ЦИРКУЛЯЦІЇ АТМОСФЕРИ

Ключові слова: чисельні методи, метод апроксимації похідних, багатошаговий одностадійний метод прогнозу, задача Коші для ЗЦА

Стан проблеми. З розвитком обчислювальної техніки більш актуальним становиться питанням застосування нових обчислювальних комплексів для знаходження більш точних розв'язків системи рівнянь загальної циркуляції атмосфери в рамках методів чисельного моделювання. Безумовно, перед метеорологами відкриваються нові можливості розв'язку громіздких алгоритмів прогнозу, застосування яких раніше не було доцільним з точки зору практичного використання. В зв'язку з цим збільшується роль чисельних методів прогнозу при оперативному короткостроковому та середньостроковому прогнозуванні, що створює потребу у аналізі і вдосконаленні існуючих та розробці нових чисельних методів, які використовуються для розв'язку системи рівнянь загальної циркуляції атмосфери. Метою даної роботи є підвищення точності методів чисельного моделювання на основі запропонованих методів розрахунку першої та другої частинних похідних, а також трьохкрокового одно стадійного методу розв'язання рівнянь моделі циркуляції атмосфери у постановці задачі Коші.

Опис методів. В ході розв`язання рівнянь загальної циркуляції атмосфери доводиться мати справу з нелінійними рівняннями гідродинаміки, причому їх нелінійність обумовлена наявністю членів, які описують адвекцію. Нелінійність рівнянь гідродинаміки може обумовити появу нелінійної нестійкості і "вибуху" чисельного їх розв'язку на грубій різницевій сітці.

Основні труднощі, зокрема помилки хибного уявлення, опису фазової швидкості, а також обчислювальна дисперсія, в найбільш розвинених світових метеорологічних центрах вирішуються шляхом подання рівнянь моделі циркуляції атмосфери в консервативній формі та застосування різницевих схем підвищеного порядку точності для апроксимації адвективних членів [1]. Нижче пропонується ефективний метод четвертого порядку точності для апроксимації частинних похідних, що входять до нелінійних диференціальних рівнянь моделі циркуляції атмосфери.

Для дискретної функції f_i були представлені наближені значення Ψ_i першої частинної похідної $\left(\partial f / \partial \eta\right)_i$ і ξ_i другої частинної похідної $\left(\partial^2 f / \partial \eta^2\right)_i$ на основі співвідношень

$$\Psi_{i+1}+2\left(1+\frac{h_i}{h_{i-1}}\right)\Psi_i+\frac{h_i}{h_{i-1}}\Psi_{i-1}=\frac{3}{h_i}\left\{f_i-\left[1-\left(\frac{h_i}{h_{i-1}}\right)^2\right]f_i-\left(\frac{h_i}{h_{i-1}}\right)^2 f_{i-1}\right\}-$$
$$-\frac{h_i h^2{}_{i-1}}{24}\left[1-\left(\frac{h_i}{h_{i-1}}\right)^2\right]\frac{\partial^4 f}{\partial\eta^4} \tag{1}$$

$$\frac{h_{i-1}}{h_i}\left[\frac{h_{i-1}}{h_i}\left(1-\frac{h_{i-1}}{h_i}\right)+1\right]\xi_{i+1}+\left(1+\frac{h_{i-1}}{h_i}\right)\left[\frac{h_{i-1}}{h_i}\left(3+\frac{h_{i-1}}{h_i}\right)+1\right]\xi_i+\left[\frac{h_{i-1}}{h_i}\left(1+\frac{h_{i-1}}{h_i}\right)-1\right]\xi_{i-1}=$$
$$=\frac{12}{h_i^2}\left[\frac{h_{i-1}}{h_i}f_{i+1}-\left(1+\frac{h_{i-1}}{h_i}\right)f_i+f_{i-1}\right]+\frac{h_i^2 h_{i-1}}{360}\left[1-\left(\frac{h_i}{h_{i-1}}\right)^2\right]\left\{5\frac{h_{i-1}}{h_i}+2\left[1-\left(\frac{h_i}{h_{i-1}}\right)^2\right]\right\}\frac{\partial^5 f}{\partial\eta^5} \tag{2}$$

отриманих за допомогою розкладання функцій f, Ψ і ξ в ряд Тейлора в околиці точок η_i $\left(i=\left[\overline{1,\mathrm{N}-1}\right]\right)$. У загальному вигляді ці рівняння можуть бути представлені у вигляді:

$$\alpha_i U_{i+1}+\beta_i U_i+\gamma_i U_{i-1}=\omega_i\,, \tag{3}$$

де

$$U=\begin{Bmatrix}\psi\\ \xi\end{Bmatrix},\quad \alpha_i=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix},\quad \beta_i=\begin{Bmatrix}2\left(1+\dfrac{h_i}{h_{i-1}}\right)\\ 5\left(1+\dfrac{h_{i-1}}{h_i}\right)\end{Bmatrix},\quad \gamma_i=\begin{Bmatrix}\dfrac{h_i}{h_{i-1}}\\ \dfrac{h_{i-1}}{h_i}\end{Bmatrix},$$

$$\omega_i=\begin{Bmatrix}\dfrac{3}{h_i}\left\{f_{i+1}-\left[1-\left(\dfrac{h_i}{h_{i-1}}\right)^2\right]f_i-\left(\dfrac{h_i}{h_{i-1}}\right)^2 f_{i-1}\right\}\\ \dfrac{12}{h_{i-1}h_i}\left[\dfrac{h_{i-1}}{h_i}\left(f_{i+1}-f_i\right)-\left(f_i-f_{i-1}\right)\right]\end{Bmatrix},$$

які розв'язуються методом прогонки. Відповідна апроксимація граничних умов дозволяє системі рівнянь для ψ і ξ зберігати четвертий порядок точності (на рівномірній сітці) та трьохдіагональний вигляд матриці аж до границь області розв'язку.

При розв'язанні рівнянь системи загальної циркуляції атмосфери, якщо диференційному оператору в рівняннях поставити у відповідність сітковий оператор, що буде задовольняти основним вимогам апроксимації, а саме заданому порядку точності, збіжності і транспортівності, то можна здійснити приведення початково-краєвої задачі для рівнянь з частинними похідними до задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Нижче пропонується трьохкроковий одностадійий метод розв'язання задачі Коші для рівнянь загальної циркуляції атмосфери, перетворених в систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Для визначення стану атмосфери в області Θ при $t\ge t^n$ потрібно розв'язати задачу циркуляції атмосфери, яка у векторному поданні має вигляд:

$$\frac{\partial\Re(\mathbf{X},t)}{\partial t}=D\Re(\mathbf{X},t),\quad t\ge t^n\,,\quad \forall\mathbf{X}\in\Theta\,, \tag{4}$$
$$\Re\left(\mathbf{X},t^\gamma\right)=\Re^\gamma(\mathbf{X})\,,\quad \gamma=0,1,\ldots,n-1\,,$$

де $D\Re(\mathbf{X},t)$ – права частина рівняння конфективної дифузії.

Позначаючи дискретні значення неперервної функції $\Re(\mathbf{X},t)$ через $y(t)$, а дискретні значення правої частини рівняння через $f(t,y)$ на нерівномірній сітці

$$t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T,$$

де в якості параметра дискретизації використавується крок сітки τ_i

$$t_i = t_{i-1} + t_i,\ i = 0,1,...,\mathrm{N}.$$

Розглянемо послідовність задач Коші

$$y' = f(t,y),\quad t \in [t_n, T_m], \tag{5}$$

$$y\big|_{t=t_i} = y_i,\quad i = 0,1,...,n-1,$$

де T_m ($m = 0,1,...,M$) - деяка строго зростаюча послідовність позитивних чисел, причому $\lim \mathrm{T_m} = \infty$. Шукані значення y_i ($i \ge n$) обчислюються за формулою:

$$a_1 a_2 y_l - (a_1 + a_2 + a_1 a_2) y_{l-1} + (a_1 + a_2 + 1) y_{l-2} - y_{l-3} = \left\{ A + B + \tau_l \left[a_1 a_2 - (a_1 + a_2 + 1)\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\tau_{l-2} + \tau_{l-1}}{\tau_l} \right] \right\} f_{l-1} - A f_{l-2} - B f_{l-3} + O[\tau^4], \tag{6}$$

де

$$A = \frac{1}{6} \frac{\tau_l^3}{\tau_{l-1}\tau_{l-2}} \left[\left(2 + 3\frac{\tau_{l-2} + \tau_{l-1}}{\tau_l} \right) a_1 a_2 + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^2 \left(\frac{3\tau_{l-2} + \tau_{l-1}}{\tau_l} \right) (1 + a_1 + a_2) - \left(\frac{\tau_{l-2} + \tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^3 \right]$$

$$B = -\frac{1}{6} \frac{\tau_l^3}{\tau_{l-2}(\tau_{l-1} + \tau_{l-2})} \left[\left(2 + 3\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right) a_1 a_2 + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^3 (1 + a_1 + a_2) + \frac{2\tau_{l-2} - \tau_{l-1}}{\tau_l} \left(\frac{\tau_{l-2} + \tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^2 \right]$$

Апробація методів. Для оцінки ефективності, точності і стійкості запропонованих методів в якості тестової була розглянута початково-крайова задачу для одновимірного рівняння конвективної дифузії

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial q}{\partial x} \right),\qquad a \le x \le b,\ t > 0, \tag{7}$$

$$q(x,0) = q_0(x),\qquad a \le x \le b,$$

$$q\big|_{x=a} = \alpha(t),\quad q\big|_{x=b} = \beta(t),$$

Рівняння (7) включає в себе члени, що описують ті ж фізичні процеси, що й члени, що входять в диференціальні рівняння математичної моделі циркуляції атмосфери, а саме:

- нестаціонарний член $\frac{\partial q}{\partial t}$, що описує швидкість зміни величини q часі;
- конвективний член $u\frac{\partial q}{\partial x}$, що описує конвекцію величини q, обумовлену її рухом разом з навколишнім середовищем зі швидкістю u;
- дифузійний (або дисипативний) член $\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial q}{\partial x} \right)$, що описує дифузію величини q в нерухомому довкіллі уздовж осі x.

При $u = const$, $v = const$, $q_0(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $b = \pi$ задача (1) має аналітичний розв'язок $q(x,t) = \exp(-vt) \cdot \sin(x - ut)$, який дозволяє оцінити точність запропонованих методів.

В результаті перевірки запропонованого методу апроксимації похідних за допомогою тестової задачі на основі співставлення (таблиця) точних, отриманих за аналітичним розв'язком, та розрахованих за методикою (2)-(3) значень було встановлено, що під час знаходження першої та другої частинної похідної запропонованим методом апроксимації дійсно зберігається четвертий порядок точності у всій множині точок для різних лінійних розмірів сітки, що підтверджує ефективність методики і дозволяє ефективно використовувати її у задачах циркуляції атмосфери.

Таблиця – **Величини середнього відхилення розрахункових значень від точних для першої частинної похідної**

N,кількість точок сітки	30	100	1000
Середнє відхилення	$4{,}16257 \cdot 10^{-5}$	$2{,}99575 \cdot 10^{-5}$	$46798 \cdot 10^{-6}$

В ході апробації багатокрокового одностадійного методу (6) був проведений аналіз його на стійкість для однорідного рівняння. Як відомо [2], лінійна багатокрокова схема відноситься до сильно стійкої (D-стійкої), якщо її асоційований многочлен p відповідає сильному кореневому критерію, тобто якщо він не має коренів за межами одиничного круга, а одиниця – єдиний корінь на одиничному крузі. Асоційований многочлен для запропонованої схеми (6), який має вигляд:

$$p = a_1 a_2 x^3 - (a_1 + a_2 + a_1 a_2)x^2 + (a_1 + a_2 + 1)x - 1 = 0,$$

задовольняє умовам сильного кореневого критерію, оскільки його корені при $a_1 = a_2 = 2$ дорівнюють наступним значенням: $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$. Але слід зазначити, що в правій частині чисельного рівняння (6) трьохкрокового одностадійного методу містяться нелінійні члени f_i, які ускладнюють аналітичний аналіз чисельного методу на стійкість. Тому дослідження стійкості запропонованого методу розв'язання задачі Коші проводилося за допомогою розв'язання тестової задачі на сітках з різним просторовим і часовим кроками.

Висновки. Запропоновані методи апроксимації похідних та розв'язання рівнянь моделі циркуляції атмосфери у постановці задачі Коші дозволяють підвищити до четвертого порядку точність розв'язку рівнянь системи загальної циркуляції атмосфери.

Основна перевага запропонованого методу апроксимації частинних похідних, які входять в диференціальні рівняння моделі циркуляції атмосфери, перед загальноприйнятою стандартною трьох точковою апроксимацією полягає в тому, що розв'язок систем алгебраїчних рівнянь (3) в точці i залежить від значень функції f в усіх точках області розв'язку задачі. Тому апроксимація (2)-(3) залежить від f_i глобально, а не локально, як у загальноприйнятих схемах трьох точкових різницевих апроксимацій похідних першого і другого порядків.

Як показали чисельні експерименти, схема (6), як будь-яка інша явна схема, є умовно стійкою. Очевидно, що для зниження вимог до умови стійкості слід до схеми (6), яка буде використовуватися у якості предиктора, додати схему коректора.

Список літератури

1. Численные методы, используемые в атмосферных моделях / под ред. В. П. Садокова. – Л. : Гидрометеоиздат, 1982. – 359 с. **2.** *Штеттер Х.* Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений / Х. Штеттер. – М. : Мир, 1978. – 461 с.

Прусов В.А., Безнощенко Б. **Чисельний метод підвищенної точності розв'язання рівнянь моделі циркуляції атмосфери.** У статті пропонується нові чисельні методи для розв'язку системи рівнянь загальної циркуляції атмосфери, а саме метод підвищеної точності апроксимації похідних першого та другого порядку і багатошаговий одностадійний метод розв'язання рівнянь моделі циркуляції атмосфери у постановці задачі Коші.

Ключові слова: чисельні методи, метод апроксимації похідних, багат шаговий одностадійний метод прогнозу, задача Коші для ЗЦА.

Prusov V.A., Beznoshchenko B. **Numerical methods for improving the accuracy of the solution of the equations of atmospheric circulation patterns.** The paper proposed a new numerical methods for solving the system of equations of the general circulation of the atmosphere, namely the method of high accuracy of approximation of derivatives of the first and second-order one-step method and multistage solving equations model of atmospheric circulation in the formulation of the Cauchy problem.

Keywords: numerical methods, the method of approximation of derivatives, many indexing one phasic prediction method, the Cauchy problem for ZTSA.

Прусов В. А., Безнощенко Б. **Численный метод повышенной точности решения уравнений модели циркуляции атмосферы.** В статье предлагается новые численные методы для решения системы уравнений общей циркуляции атмосферы, а именно метод повышенной точности аппроксимации производных первого и второго порядка и многоступенчатый одностадийный метод решения уравнений модели циркуляции атмосферы в постановке задачи Коши.

Ключевые слова: численные методы, метод аппроксимации производных, много шагов равно стадийный метод прогноза, задача Коши для ЗЦА.

Надійшла до редколегії 08.04.2014

УДК 551.583.16+551.577.3

Пясецька С. І.
Український гідрометеорологічний інститут

СТРУКТУРА ЗМІН У ХОДІ ВИПАДАННЯ ОПАДІВ У МІСЯЦІ ХОЛОДНОГО ПЕРІОДУ РОКУ (XI-III) ТА ЦЕНТРАЛЬНІ МІСЯЦІ ВЕСНЯНОГО ТА ОСІННЬОГО СЕЗОНІВ (IV, X) ПРОТЯГОМ КІНЦЯ XX – ПОЧАТКУ XXI СТОЛІТТЯ У КРИМУ (період 1986-2007 рр. та його десятиріччя)

Ключові слова: місячна кількість опадів, норми кількості опадів, додатні та від'ємні відхилення, просторово-часовий розподіл повторюваності додатних та від'ємних відхилень місячної кількості опадів, макросхил, Кримські гори

Вступ. Дослідженнями Будико М.І., Віннікова К.Я. (1976), Борзенкової І.І. та інші (1976), Damon and Kunen (1976), Angell, Korshover (1977), Painting (1977), Lamb H (1973), Manabe S, Wetherald R (1980) показано, що у сучасну епоху, яку вважають міжльодовиковою за останні сто років мали місце два потепління, а саме – перша хвиля з кінця XIX століття з максимумом у 30-х роках XX століття, після чого спостерігалось певне похолодання, яке з середини 60-х років змінилось новою хвилею потепління [3]. Оцінки зміни клімату, які були проведені Багровим Н.О та Мерцаловою Н.І. [2] станом на 1984 р. свідчать, що в цілому увесь період з 1901 по 1981 рр. потепління кліматичної системи здебілшого мало місце на північному сході