Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Шевченко С. Застосування знаменитих функцій до побудови контрприкладів // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – Суми : СумДПУ ім. А.С.Макаренка, 2014. – № 1 (2). – С. 55-59.

Світлана Шевченко
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна

ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАМЕНИТИХ ФУНКЦІЙ ДО ПОБУДОВИ КОНТРПРИКЛАДІВ

Поняття «контрприклади» широко використовується у наукових дослідженнях, математичних припущеннях, визначенні коректності означення та істинності твердження, доведенні теорем. Контрприкладами називають приклади, які спростовують ті чи інші твердження. Відмінність між прикладами та контрприкладами полягає в тому, що приклади підтверджують загальні положення, а контрприклади ілюструють хибність і вважаються класичним засобом заперечення гіпотези [1, с. 11].

Розвиток математики та побудова контрприкладів привели до необхідності перебудови та уточнення деяких положень математичних теорій, однією з них була теорія функцій.

Як відомо, існує багато різноманітних функцій. Вони являються основним об’єктом дослідження в математичному аналізі. Проте є функції, які мають спеціальні методи дослідження, а їх специфічні властивості використовуються у контрприкладах. За останні півтора століття вони були побудовані. До них можна віднести такі визначні функції: функцію Діріхле $D(x)$, функцію Рімана $R(x)$, функцію Вейєрштрасса $V(x)$, дельта-функція Дірака $\delta(x)$ та гама-функція Ейлера $\Gamma(a)$. Розглянемо застосування даних функцій до побудови контрприкладів.

Приклад 1. Всюди розривна функція, абсолютне значення якої є всюди неперервною функцією:

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x-\text{раціональне},\\ -1, \text{ якщо } x-\text{ірраціональне},\end{cases} \qquad |f(x)|\equiv 1,\ x\in R.$$

Приклад 2. $\sin D(x)=\begin{cases}\sin 1, \text{ якщо } x\in Q,\\ 0, \text{ якщо } x\in I.\end{cases}$

Приклад 3. $[D(x)]=D(x)$, $\{D(x)\}\equiv 0$, де $[x]$ – ціла частина x, $\{x\}$ – дробова частина x.

Приклад 4. $y=ax^2D(x)$, $a\neq 0$.

Розв’язання. Ця функція диференційовна в точці x = 0. Дійсно,

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x^2 D(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a\Delta x D(\Delta x)=0 .$$

Приклад 5. Функція

$$R_a(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, \text{ якщо } x=\frac{m}{n}, n\in N, m\in Z, (|m|,n)=1,\\ 1, x=0,\\ a, x\in I.\end{cases}$$

Розв'язання. $R_a(x)$ для $a\neq 0$ неінтегровна за Ріманом на кожному відрізку, оскільки вона розривна в кожній точці відрізка і міра множини її точок розриву більше нуля.

При a = 0 маємо $R_0(x)=R(x)$, $R_a(x)$ – всюди розривна, оскільки при x_0

$$\lim_{\substack{x\to x_0\in I\\ x\in Q}} f(x)=0\neq a,\ \lim_{\substack{x\to x_0\in I\\ x\in I}} f(x)=a.$$

Приклад 6. Чи існує функція, неперервна в кожній раціональній точці та розривна в кожній ірраціональній точці прямої?

Розв'язання. Не існує, тому що множина точок розриву функції є множиною типу F_σ. А множина I ірраціональних чисел не є множиною F_σ.

Приклад 7. Добуток $D(x)\cdot R(x)=R(x)$, $D(R(x))\equiv 1$, $R(D(x))\equiv 1$, де $D(x)$ – функція Діріхле, $R(x)$ – функція Рімана. Цей приклад цікавий тим, що суперпозиція всюди розривних функцій може бути неперервною.

Приклад 8. Приклад двох ніде не диференційованих функцій сума (різниця, добуток, частка) яких всюди диференційовна.

Розв'язання. $V(x)$ – функція Вейєрштрасса (або Ван-дер-Вардена). Вона обмежена на R: $|V(x)|\leq M$. Візьмемо M_1 та M_2 так, щоб $f_1(x)=M_1-V(x)>0$, $f_2(x)=M_2+V(x)<0$, тоді $f_1(x)+f_2(x)=M_1+M_2$.

Для різниці: $f_1(x)=M_1+V(x)$, $f_2(x)=M_2+V(x)\to f_1(x)-f_2(x)=M_1-M_2$.

Для добутку: $f_1(x)=M_1-V(x)>0$, $f_2(x)=\frac{1}{M_1-V(x)}$, тоді $f_1(x)\cdot f_2(x)=1$.

Для частки: $f_1(x)=M_1-V(x)$, $f_2(x)=C\cdot M_1-C\cdot V(x)$, тоді $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{1}{C}$.

Приклад 9. Функція $z=x+V(y)$ має частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 1$ і не має частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$ в кожній точці $(x;y)\in R_2$.

Аналогічно функція $z=y+V(x)$ має частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial y}\equiv 1$ і не має $\frac{\partial z}{\partial x}$ в кожній точці $(x;y)\in R_2$.

Функція $z=V(x)+V(y)$ не має частинних похідних в кожній точці $(x;y)\in R_2$.

Очевидно, всі наведені три функції неперервні в кожній точці $(x;y)\in R_2$.

Приклад 10. Приклад функції $f(x)$, що має на R похідні до n-го порядку включно і не має похідної до $(n+1)$-го порядку на R.

$f_1(x)=\int V(x)dx$, $f_2(x)=\int f_1(x)dx, ..., f_n(x)=\int f_{n-1}(x)dx$. Тоді $f_n'(x)=f_{n-1}(x)$, $f_n''(x)=f_{n-1}'(x)$, ..., $f_n^{(n)}(x)=f_1'(x)=V(x)$. Отже, $f_n^{(n+1)}(x)$ не існує для $\forall x \in R$.

Приклад 11. Приклад монотонної диференційованої функції, похідна якої ніде не монотонна на R.

$V(x)$ – функція Вейєрштрасса. Візьмемо $M > 0$ таке, що $V(x) + M > 0$ для $\forall x \in R$. Тоді

$$\varphi(x)=\int_0^x \left(V(x)+M\right)dx$$

строго зростає на R, оскільки $\varphi'(x)=V(x)+M>0$, а $V(x) + M$ ніде не монотонна на R.

Приклад 12 [2]. Знайти інтеграл

$$\int_0^1 x^{p-1}\left(1-x^m\right)^{q-1}dx \quad \left(p,q,m>0\right).$$

Зробимо підстановку $x^m = y$, виразимо x: $x=\sqrt[m]{y}=y^{\frac{1}{m}}$, $dx=\frac{1}{m}y^{\frac{1}{m}-1}dy$. Тоді отримаємо:

$$\int_0^1 x^{p-1}\left(1-x^m\right)^{q-1}dx=\int_0^1 y^{\frac{p-1}{m}}\cdot(1-y)^{q-1}\cdot\frac{1}{m}\cdot y^{\frac{1}{m}-1}dy=\frac{1}{m}\cdot\int_0^1 y^{\frac{p}{m}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}-1}\cdot(1-y)^{q-1}dy=$$

$$=\frac{1}{m}\cdot\int_0^1 y^{\frac{p}{m}-1}\cdot(1-y)^{q-1}dy=\frac{1}{m}\cdot B\left(\frac{p}{m};q\right).$$

Приклад 13 [2]. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi, \quad \left(a,b>0\right).$$

Поклавши $x=\sin\varphi$, зведемо даний інтеграл до інтеграла

$$\int_0^1 x^{a-1}\left(1-x^2\right)^{\frac{b}{2}-1}dx,$$

використовуючи приклад 4.2.1., будемо мати

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\cdot B\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

Приклад 14 [2]. Знайти інтеграл

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}dx \quad (m,n>0).$$

Перетворимо підінтегральний вираз:

$$\frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}=\frac{(1+x)^{2m-1}}{(1+x^2)^m}\cdot\frac{(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^n}=\left(\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{m-1}\cdot\frac{1+x}{1+x^2}\cdot\left(\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1-x}{1+x^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{m-1}\cdot 2^{m-1}\cdot\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right)^{n-1}\cdot 2^{n-1}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{m-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right)^{n-1}\cdot 2^{m+n-2}\cdot\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{m-1}\cdot\left(\frac{1-2x+x^2}{2\cdot(1+x^2)}\right)^{n-1}\cdot\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}\cdot 2^{m+n-2}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{m-1}\cdot\left(\frac{2+2x^2-1-2x-x^2}{2\cdot(1+x^2)}\right)^{n-1}\cdot\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}\cdot 2^{m+n-2}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)^{m-1}\left(1-\frac{(1+x)^2}{2\cdot(1+x^2)}\right)^{n-1}\cdot\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}\cdot 2^{m+n-2}.$$

Використаємо підстановку $u=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$, $du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(1+x)(1+x^2)-(1+x)^2\cdot 2x}{(1+x^2)^2}dx=$ $=\frac{(1+x)(1+x^2-x^2-x)}{(1+x^2)^2}dx=\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}dx$, тоді отримаємо:

$$\int_0^1\frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}dx=\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\cdot 2^{m+n-2}du=2^{m+n-2}\cdot\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}du=2^{m+n-2}\cdot B(m;n).$$

Приклад 15. Знайти похідну функції

$$\theta(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1, x>0.\end{cases}$$

Використаємо зв’язок похідної та інтеграла:

$$F(x)=\int_a^b y(x)dx,\quad y(x)=\frac{dF}{dx}.$$

За означенням похідної

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\theta(0+\Delta x)-\theta(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}=+\infty,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\theta(0+\Delta x)-\theta(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}=+\infty,\qquad \frac{d\theta}{dx}=0,\ \forall x\neq 0.$$

Таким чином, $\frac{d\theta}{dx}=\delta(x)$ (за означенням дельта-функції Дірака).

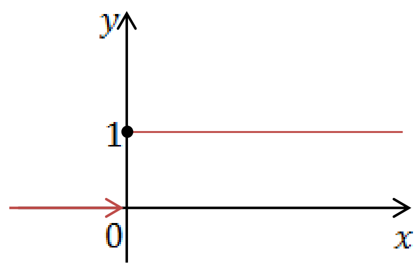

Рис. 1. Графік функції $\theta(x)$

Список використаних джерел

1. Мартиненко О. В. Контрприклади та розвиток поняття функції / О. В. Мартиненко, О. М. Бойко // Фізико-математична освіта: збірник наукових праць. – 2012. - № 1 (3). – 88 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – [3-е изд.]. – Т.2 – М. : Наука, 1951 – 800 с.

***Анотація. Шевченко С. Г. Застосування знаменитих функцій до побудови контрприкладів*.**

Вказується поняття «контрприкладу».

Розглядається застосування функцій Діріхле, Рімана, Вейєрштрасса та дельта-функції Дірака до побудови контрприкладів. Наводяться приклади розв'язування інтегралів з параметрами за допомогою бета- та гама-функції Ейлера.

Ключові слова: функція, контрприклад, інтеграл.

Аннотация. Шевченко С. Г. Применение знаменитых функций к построению контрпримеров.

Указывается определение понятия «контрпример».

Рассматривается применение функций Дирихле, Римана, Вейерштрасса и дельта-функции Дирака к построению контрпримеров. Приводятся примеры решения интегралов с параметрами с помощью бета и гамма-функции Эйлера.

Ключевые слова: функция, контрпример, интеграл.

Abstract. Shevchenko S. G. The use of well-known functions to build counterexamples.

Indicate the term "counterexample". The application features Dirichlet, Riemann, Weierstrass and Dirac's delta-function to build a counterexample. Examples of solving integrals with parameters using beta- and gamma-functions Euler.

Keywords: function, counterexample, integral.