

Scientific journal  
**PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION**  
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)  
ISSN 2413-1571 (print)



Науковий журнал  
**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА**  
Видається з 2013.

<http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/>

*Кузьменко О.С. Вивчення симетрії у процесі навчання з квантової механіки у вищих навчальних закладах / Ольга Кузьменко // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск № 2 (5). – С. 23-28.*

*Kuz'menko O.S. Study of symmetry in the process of studies from quantum mechanics in higher educational establishments // Physics and Mathematics Education. Scientific journal. – 2015. – Issue 2 (5). – P. 23-28.*

**УДК 53(07)**

**Ольга Кузьменко**

*Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету, Україна*

### **ВИВЧЕННЯ СИМЕТРІЇ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ З КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ**

**Постановка проблеми.** Головним напрямком реформування фізичної освіти у вищих навчальних закладах є посилення її методологічної спрямованості. Тому виникає потреба, щоб фізика, як наука сприймалась суб'єктом навчання не як перелік відкриттів чи наявність формул, а відповідно формувала наукове мислення у процесі пізнання навколишнього світу.

Рівень сформованості знань в студентів із загального курсу фізики у вищих навчальних закладах визначається засвоєнням фундаментальних фізичних понять, законів, теорії та принципів.

Особливо актуальними є питання, що пов'язані з теорією симетрії в сучасних фізичних теоріях, заснованих на об'єднанні фундаментальних взаємодій.

Найголовнішою метою фізики є дослідження фундаментальних частинок матерії та з'ясування законів їх руху та взаємодії разом з дослідженням простору і часу.

Рівень сформованості знань в студентів з фізики визначається засвоєнням фундаментальних фізичних понять, законів, теорії та принципів.

На нашу думку варто сформулювати в студентів у процесі навчання з загального курсу фізики цілісне уявлення про дану науку, відповідно на основі вивчення фундаментальних понять симетрії та принципів симетрії.

**Аналіз актуальних досліджень.** Поняття симетрії розглядали в роботах В.С. Готта, Ф.М. Землянського, світоглядні питання в контексті теорії симетрії розглянуті Р.М. Ганієвим [2], проблемі симетрії у фізиці присвячені роботи Дж. Еліота, П. Добера [4], О.С. Компанієць висвітлив проблему симетрії в мікро- та макро- світі, В.В. Мултановського, який розглядає симетрію у класичній механіці [7], Е. Вігнер відзначав в своїх роботах найважливіші проблеми філософського і природничо-наукового характеру, пов'язані з симетрією [1], М.І. Садовий [9] розглядав симетрії елементарних частинок, М. Сенешаль та Дж. Флек розглядали симетрію повороту,

трансляції, причини та наслідку [10], Р. Нокс і А.Голд вивчили симетрію твердого тіла [8], Ю.А. Урманцев висвітлював симетрію природи [11] та ін.

**Метою статті** є розгляд законів збереження динамічних величин та їхній взаємозв'язок з симетрією в процесі вивчення квантової механіки студентами вищих навчальних закладів.

**Виклад основного матеріалу.** У процесі вивчення квантової механіки важливе значення мають закони збереження динамічних величин, що характеризують стан мікрочастинок та його зміну. Динамічними величинами є енергія, імпульс та момент імпульсу, що мають універсальне використання в процесі вивчення студентами всього загального курсу фізики у вищих навчальних закладах. Під час вивчення мікрочастинок з квантової фізики до законів збереження додатково вивчаються студентами закони збереження парності.

В класичній механіці та електродинаміці отримують закони збереження з рівнянь Ньютона та Максвелла. З них отримують закони зміни імпульсу, моменту імпульсу, енергії та розглядають умови їх виникнення. До таких умов відносять замкненість та ізолюваність системи, наприклад в механіці розглядають тіла, а в електродинаміці – поля та заряджені тіла.

Для того щоб виявити, який взаємозв'язок існує між законами збереження в квантовій механіці та симетрією розглянемо їх.

Вивчаючи квантову механіку, розглядаємо рівняння Шредінгера за допомогою якого отримуємо формулу (1) для оператора деякої фізичної величини

$$\hat{A} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}]. \quad (1)$$

Застосовуючи його для розрахунку похідної за часом від середнього значення величини за умовою  $\hat{A} = 0$ ,  $\vec{a} = const$ . Тоді середнє значення фізичної величини зберігається з часом.

Розглянемо умови збереження деякого значення фізичної величини. Якщо функція стану  $\psi$ , співпадає з значенням функції  $\varphi_i$  оператора  $\hat{A}$ , то дана величина має значення  $a_i$ . Використовуючи формулу  $\vec{a} = \int \psi^*(x) \hat{A} \psi(x) dx$ , отримуємо  $\vec{a} = a_i$ . Якщо оператор (1) рівний нулеві, то значення зберігається.

Розглянемо закони збереження динамічних величин.

1. Закон збереження енергії. Оператор Гамільтона може, як залежати від часу так і ні. Для стаціонарних полів, маємо, що  $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$ . Крім цього  $[\hat{H}, \hat{H}] = 0$ , а відтак  $\hat{H} = 0$  та  $\vec{E} = const$ .

Отже, енергія мікрочастинки в стаціонарному полі зберігається. Оператор Гамільтона для вільної частинки не має часу, тобто енергія вільної частинки є величиною постійною. Якщо розглянути замкнену систему, то потрібно враховувати всі взаємодіючі частинки та звернути увагу на те, що потенціальна енергія залежить від відстані між ними. Тому гамільтоніан системи не має такої складової, як час. Тому, енергія замкненої системи мікрочастинок зберігається.

2. Закон збереження імпульсу. Оператор імпульсу частинки розраховується за формулою  $\hat{p} = -i\hbar \nabla$  та комутує з оператором Гамільтона для вільної частинки  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$ . Отже, імпульс вільної частинки зберігається.

Якщо частинка знаходиться в силовому полі, то оператор Гамільтона має координати, на які діє оператор імпульса, тобто  $\hat{p}$  та  $\hat{H}$  в загальному випадку не комутують. Тому в силовому полі імпульс не зберігається.

Для замкненої системи частинок оператор імпульса комутує з оператором Гамільтона, тобто імпульс замкненої системи мікрочастинок зберігається [7].

3. Закон збереження моменту імпульса. Оператор моменту імпульсу для частинки розраховується за формулою  $\hat{L} = -i\hbar[\vec{r}\nabla]$ , що не має складової часу та комутує з оператором Гамільтона вільної частинки. Отже, момент імпульсу вільної частинки зберігається.

Тому закони збереження енергії, імпульсу та моменту імпульсу в квантовій механіці за формою та змістом подібні класичним.

Розглянемо зв'язок законів збереження з інваріантністю оператора Гамільтона відносно перетворень симетрії. Закони збереження фізичних величин пов'язані з властивостями симетрії простору та часу.

*Симетрія* (від грец. *συμμετρέειν* — міряти разом) — це категорія, що визначає процес існування та становлення тотожних моментів у певних умовах та відношеннях між різними та протилежними станами явищ світу [11].

Поняття симетрії відіграє велику роль у фізиці. Перш за все слід відзначити просторову симетрію, якою можуть характеризуватися фізичні об'єкти. Слід розрізняти симетрію трансляції, симетрію дзеркального відображення, симетрію поворотів, гвинтову симетрію тощо. Особливим видом симетрії є *ізотропність* — незалежність властивостей фізичної системи від напрямку, *однорідність* — незалежність властивостей фізичної системи від точки простору.

Симетрія властивостей квантово-механічної системи щодо перестановки частинок місцями лежить в основі принципу нерозривності частинок. Для багатьох фізичних систем характерні свої особливі приховані типи симетрії. У фізиці елементарних частинок - калібрувальна інваріантність — симетрія частинок відносно певного типу перетворень, завдяки якій можна встановити внутрішню структуру у великій кількості відкритих фізиками елементарних частинок. Цікаво розглянуто приклади точкової та трансляційної симетрії в квантовій механіці в книжці Р.Нокса та А.Голда [8].

В основному рівнянні квантової механіки — рівнянні Шредінгера система містить оператор Гамільтона, тому симетрія такої системи проявляє себе в інваріантності гамільтоніана відносно будь-яких перетворень координат та часу.

Розглянемо перетворення координат:

$$\vec{r} = \vec{r}^{\wedge}, \tag{2}$$

що виражає будь-яке переміщення системи як цілого в просторі, наприклад зміщення, поворот та ін. Тоді доцільно записати формулу (2) в іншому виді:

$$\vec{r}^{\wedge} = \hat{S}\vec{r}. \tag{3}$$

Обернене перетворення виражаємо оператором  $\hat{S}^{-1}$ . Останній вираз означає, що

$$\vec{r} = \hat{S}^{-1}\vec{r}^{\wedge}. \tag{4}$$

Нехай стан системи описувався функцією  $\psi(\vec{r})$ . Зробимо перетворення формули (3), що змінить  $\vec{r}^{\wedge}$  та вигляд  $\psi$ . Але, якщо існує відповідна симетрія простору, то в точку

$\vec{r}'$  перейде значення хвильової функції в точці  $\vec{r}$ . Отже нова хвильова функція  $f(\vec{r}')$  задовільняє рівності

$$f(\vec{r}') = f(\hat{S}\vec{r}) = \psi(\vec{r}). \quad (5)$$

Введемо оператор  $\hat{R}$ , який змінює вид функції в наступному перетворенні

$$\hat{R}\psi(\vec{r}) = f(\vec{r}'), \quad (6)$$

де  $\hat{R}$  є оператором повороту, відбивання та відхилення системи в дзеркалі.

Доведемо, якщо гамільтоніан інваріантний відносно перетворення (3), то оператор  $\hat{R}$  комутує з оператором Гамільтона. Згідно формул (5) та (6) отримаємо, що

$$\hat{R}\psi(\vec{r}) = \psi(\hat{S}^{-1}\vec{r}). \quad (7)$$

Введемо позначення  $\vec{r}'' = \hat{S}^{-1}\vec{r}$ , яке використаємо для перетворення формули (7). Тоді для функції  $\varphi$  маємо

$$(\hat{R}\hat{H})\varphi = \hat{R}(\hat{H}\varphi) = \hat{H}(\vec{r}'')\varphi(\vec{r}''), \quad (8)$$

$$(\hat{H}\hat{R})\varphi = \hat{H}(\hat{R}\varphi) = \hat{H}(\vec{r})\varphi(\vec{r}''). \quad (9)$$

Оскільки  $\hat{H}(\vec{r}) = \hat{H}(\vec{r}'')$ , тобто перетворення  $\hat{S}$  не змінює гамільтоніан, тоді праві частини рівності співпадають. Тоді,  $\hat{R}\hat{H} = \hat{H}\hat{R}$ . Отже, дане твердження доведено.

Якщо оператор фізичної величини не залежить від часу та комутує з гамільтоніаном, то відповідно ця фізична величина зберігається. Комутативність операторів  $\hat{R}$  та  $\hat{H}$  вказує на закон збереження величини  $R$ .

В багатьох випадках кінцеве перетворення координат можливо показати як сукупність послідовних нескінчених малих перетворень. Наприклад, якщо розглянути трансляцію системи в просторі, то

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}. \quad (10)$$

Обернене перетворення формули (10) має наступний вид

$$\vec{r} = \vec{r}' - \delta\vec{r}. \quad (11)$$

З точністю до членів другого порядку малості, отримаємо

$$\psi(\hat{S}^{-1}\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \delta\vec{r}) \approx \psi(\vec{r}) - \delta\vec{r}\nabla\psi. \quad (12)$$

Згідно формули (6)

$$\hat{R}\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) - \delta\vec{r}\nabla\psi. \quad (13)$$

Звідси

$$\hat{R} = 1 - \delta\vec{r}\nabla. \quad (14)$$

Формула (14) характеризує розрахунок оператора нескінченно малого зміщення, наприклад трансляції в просторі.

Тому, закон збереження імпульсу є наслідком однорідності простору, або наслідком інваріантності фізичних перетворень щодо перенесень у просторі. Закон збереження моменту імпульсу є наслідком ізотропності простору, або наслідок інваріантності фізичних законів відносно поворотів у просторі. Закон збереження енергії є наслідком однорідності часу, або наслідок інваріантності відносно фізичних законів щодо перенесень у часі.

Отже, симетрія обмежує різноманітність не тільки структур, але і різноманітність варіантів поведінки фізичних систем.

**Висновок.** В результаті проведених досліджень та вище зазначеного констатуємо те, що доцільність підпорядкування змісту навчального матеріалу з фізики базується на фундаментальних поняттях, одним з яких є симетрія. Ознайомлення та вивчення

студентами симетрії та його взаємозв'язок із законами збереження квантової механіки сприятимуть формуванню сучасного наукового мислення, а також забезпечуватиме систематизацію знань з фізики та формуванню наукового світогляду.

**Перспективи подальших досліджень** полягають в детальному аналізі поняття симетрії та його використання у навчанні фізики у вищих навчальних закладах.

#### Список використаних джерел

1. Вигнер Е. Этюды о симметрии / Е. Вигнер. — М.: «МИР», 1971. — 318 с.
2. Ганиев Р.М. Групповая симметрия в множестве мировоззренческих высказываний / Роберт Маликович Ганиев. — Владикавказ: Северо-Осетинский гос. ун-т им.К.Л.Хетагурова, 2001. — 108 с.
3. Грин Б. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории / Б. Грин. — М.: URSS ; КомКнига, 2007. — 286 с.
4. Элиот Дж. Симметрия в физике / Дж. Элиот П. Добер; Соч. в 2-х т. — Т.1. — М.: Мир, 1983. — 364 с.
5. Илларионов С.В. Принципы симметрии в физике элементарных частиц / С.В. Илларионов, Е.А. Мамчур // Философские проблемы физики элементарных частиц (тридцать лет спустя) / Отв. ред. Ю.Б. Молчанов. — М.: РАН, 1994. — 217с. — С. 167-199.
6. Компанеец А.С. Симметрия в микро- и макромире / Компанеец А.С. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
7. Мултановский В.В. Курс теоретической физики / Мултановский В.В. — М.: Просвещение, 1988. — 304 с.
8. Р. Нокс Симметрия в твердом теле. Перевод с англ. Под ред. В.Л. Бонч-Бруевича. / Р.Нокс, А. Голд. — М.: Издательство «Наука», 1970. — 424 с.
9. Садовий М.І. Окремі питання сучасної та традиційної фізики: Навчальний посібник для студентів педагогічних навчальних закладів освіти. / М.І. Садовий, О.М.Трифоновна – Кіровоград: Видавництво ПП «Каліч О.Г.», 2007. — 307 с.
10. Сеншаль М. Узоры симметрии. Перевод с англ. Под ред. Акад. Н.В. Белова и проф. Н.Н. Шефталя / М. Сеншаль, Дж. Флек. — М.: Издательство «Мир», 1980. — 269 с.
11. Урманцев Ю.А. Симметрия природы и природа симметрии / Ю.А. Урманцев. — М.: Мысль, 1974. — 229 с.

#### **Анотація. Кузьменко О.С. Вивчення симетрії у процесі навчання з квантової механіки у вищих навчальних закладах**

*У статті аналізуються та розглядаються закони збереження динамічних характеристик квантової механіки, таких як енергія, момент імпульсу та імпульсу. Виявлено їх взаємозв'язок з фундаментальними поняттями симетрії, яке покладено в основу сучасних фізичних теорій. Принципи симетрії використовуються в об'єднуючих фізичних теоріях. Проте слід відзначити, що теорія великого об'єднання, заснована на принципах симетрії, знаходиться у стадії розробки. Роль принципів інваріантності у фізиці ще не вичерпана, і ми далекі від універсального закону природи.*

*Симетрія властивостей квантово-механічної системи щодо перестановки частинок місцями лежить в основі принципу нерозривності частинок. Для багатьох фізичних систем характерні свої особливі приховані типи симетрії. У фізиці елементарних частинок – калібрувальна інваріантність — симетрія частинок*

відносно певного типу перетворень, завдяки якій можна встановити внутрішню структуру у великій кількості відкритих фізиками елементарних частинок.

Симетрія виявляє взаємозв'язок фізичних законів, спрощує розуміння складних процесів, що протікають у мікросвіті та розглядаються у навчанні з фізики.

Ключові слова: фізика, симетрія, закони збереження, енергія, момент імпульсу, імпульс, процес навчання.

**Аннотация. Кузьменко О.С. Изучение симметрии в процессе обучения по квантовой механике в высших учебных заведениях**

В статье анализируются и рассматриваются законы сохранения динамических характеристик квантовой механики, такие как энергия, момент импульса и импульса. Обнаружена их взаимосвязь с фундаментальным понятием симметрии, которое положено в основу современных физических теорий. Принципы симметрии используются в объединительных физических теориях. Однако следует отметить, что теория большого объединения, основанная на принципах симметрии, находится в стадии разработки. Роль принципов инвариантности в физике еще не исчерпана, и мы далеки от универсального закона природы.

Симметрия свойств квантово-механической системы относительно перестановки частиц местами лежит в основе принципа неразрывности частиц. Для многих физических систем характерны свои особенные скрытые типы симметрии. В физике элементарных частиц - калибровочная инвариантность — симметрия частиц относительно определенного типа превращений, благодаря которой можно установить внутреннюю структуру в большом количестве открытых физиками элементарных частиц.

Симметрия обнаруживает связь физических законов, упрощает понимание сложных процессов, которые протекают в микромире и рассматриваются в обучении по физике.

Ключевые слова: физика, симметрия, законы сохранения, энергия, момент импульса, импульс, процесс обучения.

**Abstract. Kuz'menko O.S. Study of symmetry in the process of studies from quantum mechanics in higher educational establishments**

The laws of maintenance of dynamic descriptions of quantum mechanics are analysed in the article and examined, such as energy, moment of impulse and impulse. Their intercommunication is deduced with the fundamental concept of symmetry, that is fixed in basis of modern physical theories. Principles of symmetry are used in unifying physical theories. However it should be noted that the theory of large association, based on principles of symmetry, is in the stage of development. The role of principles of invariance in physics is not yet outspent, and we are distant from an universal law

Symmetry of properties of the quantum mechanical system in relation to transposition of particles placed is the basis of principle of unbreak of particles. For many physical systems the special encapsulated types of symmetry are characteristic. In physics of elementary particles - a gauge invariance is symmetry of particles in relation to the certain type of transformations, due to that it is possible to set the underlying structure of in great numbers open physicists elementary particles.

Keywords: physics, symmetry, laws of maintenance, energy, moment of impulse, impulse, process of studies.