Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Лукашова Т.Д. Прості числа та деякі пов’язані з ними проблеми теорії чисел / Тетяна Лукашова // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск № 2 (5). – С. 29-37.

Lukashova T.D. Primes and Some Other Related Problems of Number Theory // Physics and Mathematics Education. Scientific journal. – 2015. – Issue 2 (5). – P. 29-37.

УДК 511.172

Тетяна Лукашова
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна

ПРОСТІ ЧИСЛА ТА ДЕЯКІ ПОВ’ЯЗАНІ З НИМИ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

Постановка проблеми. У теорії чисел час від часу виникають задачі, в яких вимагається довести той чи інший закон, що є правильним і перевіреним для багатьох частинних випадків. Як правило, такі задачі є настільки елементарними за своїм змістом, що зрозуміти їх може кожен школяр. Проте незважаючи на оманливу простоту формулювання, їх розв’язання роками, а іноді й століттями не піддається зусиллям найвидатніших математиків. Чимало таких проблем стосується саме простих чисел (див., наприклад, [1,367]).

Як відомо, усі цілі числа залежно від кількості їх дільників можна розділити на 4 групи:

– числа, що мають лише 1 натуральний дільник (це числа 1 та -1);
– числа, які мають рівно 2 натуральних дільники (це, наприклад, числа: 2, -2, 3, -3, 5, -5,….) - їх називають простими;
– числа, в яких кількість натуральних дільників скінченна, але більша за два (наприклад: 4, -4, 6, -6, 9, -9,…) - такі числа називають складеними;
– числа, що мають нескінченну кількість натуральних дільників (це число нуль).

Зрозуміло, що досить розглядати лише додатні цілі числа. Виняткова роль простих чисел пояснюється тим, що вони виступають свого роду будівельним матеріалом для конструювання складених чисел. Тому й не дивно, що вони з давніх часів були предметом спеціального вивчення.

Аналіз актуальних досліджень. Певні факти про кількість простих чисел, їх розподіл та властивості були відомі ще стародавнім грекам. Зокрема, Евклід у дев'ятій книзі «Елементів» навів просте й оригінальне доведення нескінченності множини простих чисел. Питання щодо розподілу простих чисел у натуральному ряді виявилось набагато складнішим. Знадобилося майже дві тисячі років, щоб «оцінити» кількість простих чисел та передбачити їх появу у натуральному ряді. У вивчення цього питання особливий внесок зробили Л. Ейлер, П. Ферма, А. Лежандр, К. Гаусс, П. Чебишов, Ж.Адамар, Ш.Валле Пуссен, І. Виноградов. При цьому слід зазначити, що доведення окремих фактів щодо розподілу простих чисел потребувало більш тонких інструментів ніж ті, якими володіла класична теорія чисел, та спиралося на спеціальні питання комплексного аналізу і теорії ймовірностей. Незважаючи на досить довгу історію дослідження, прості числа приховують ще чимало таємниць, які й дотепер залишаються без відповіді.

Мета статті – розглянути найвідоміші проблеми теорії чисел, зокрема, проблему розподілу простих чисел у натуральному ряді та проблему пошуку аналітичного виразу для запису простих чисел, а також пов’язані з цим питання щодо простоти деяких спеціальних типів натуральних чисел.

Виклад основного матеріалу. З часів Евкліда, математиків різних часів цікавило питання, за яким законом розподіляються прості числа у натуральному ряді. За словами відомого американського математика, фахівця з теорії чисел, Дона Цагіра, «прості числа ростуть серед натуральних, як бур'ян, підкоряючись випадку, і ніхто не може передбачити, де виросте наступне просте число».

Нерівномірність розподілу простих чисел виявляється у наступному:

– існує єдина пара послідовних простих чисел (2 і 3);

– є прості числа, різниця між якими рівна 2 (це так звані **числа-близнюки**: 3 і 5, 5 і 7, 11 і 13 тощо);

– відомо, що між числами n та $2n$ (n>7) міститься хоча б 1 просте число (так званий постулат Бертрана, сформульований у 1845 році. Доведення цього факту було отримано значно пізніше, у 1852 році П. Чебишовим);

– існують проміжки, що включають мільйони натуральних чисел, серед яких немає жодного простого. Це, наприклад, ряд чисел: $n!+2$, $n!+3$, ..., $n!+n$, в якому кожне число ділиться на 2, 3,..., n відповідно.

Якщо розташувати натуральні числа по спіралі, можна побачити, що прості числа утворюють досить довгі ланцюжки вздовж діагоналей (так звана скатертина Улама). На рисунку 1 чорними точками позначено прості числа.

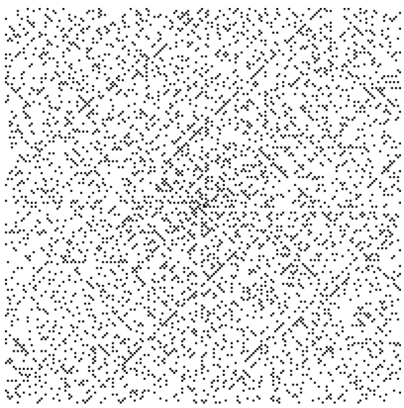

Рис. 1

У теорії чисел для підрахунку кількості простих чисел, що не перевищують числа x, було уведено спеціальну функцію, яку позначають $\pi(x)$. Зокрема, $\pi(100)=25$, що становить 25% від загальної кількості натуральних чисел, які не перевищують 100; $\pi(1000)=169$ – 17%, $\pi(10^6)=78498$ – 7,8%, $\pi(10^9)=50847478$ – 5,1% від загального числа натуральних чисел у вказаному діапазоні. Як видно, частота появи простих чисел зі збільшенням x зменшується.

У 1850р. П. Чебишов довів, що $a\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b\frac{x}{\ln x}$, де $a =$ 0,921; b =1,106. Безпосередньо з цього факту випливає, відома теорема Ейлера

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x} = 0.$$

Фактично, це означає, що простих чисел у натуральному ряді мізерна кількість.

У 1792р. Карл Гаусс, досліджуючи таблиці простих чисел, знайшов функцію, яка дає досить точне наближення значень функції $\pi(x)$: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$. Пізніше ним же було знайдене ще краще наближення: $\pi(x) \approx \int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t} = Li(x)$.

Досліджуючи графіки функцій $y = \pi(x)$ та $y = \frac{x}{\ln x}$ можна помітити, що зі збільшенням x похибка наближення функції $y = \pi(x)$ зменшується. Цей факт було обґрунтовано у 1848р. Чебишовим, який довів, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1,$$

за умови, що границя існує.

Остання рівність виражає асимптотичний закон розподілу простих чисел та означає, що функції $y = \pi(x)$ та $y = \frac{x}{\ln x}$ асимптотично рівні, тобто «поводять» себе майже однаково на нескінченності.

Існування вказаної вище границі було доведено майже через 50 років Ж.Адамаром та Ш. Валле Пуссеном із використанням функції комплексної змінної та дослідженні поведінки дзета-функції Рімана

$$\varsigma(x) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^x}}, x \in C.$$

Елементарне доведення асимптотичного закону було отримано лише у 1949 році А. Сельбергом та П. Ердьошем. Як наслідок з асимптотичного закону розподілу простих чисел випливає послаблення постулату Бертрана про те, що в інтервалі між x та $(1+\varepsilon)x, \varepsilon > 0$ знайдеться хоч одне просте число.

Наступне питання, що постає при вивченні простих чисел пов'язане з визначенням, чи буде задане число n простим. Для цього слід з'ясувати, чи будуть його дільниками прості числа, що не перевищують $\sqrt{n}$. Останній факт було обгрунтовано відомим математиком Середньовіччя Леонардо Фібоначчі.

Метод знаходження простих чисел у вказаному діапазоні та складання відповідних таблиць простих чисел був запропонований наприкінці IIIст. до н.е. Ератосфеном Киренським. Він полягає у послідовному викреслюванні чисел, кратних 2, 3, і т.д. і називається решетом Ератосфена. При цьому невикресленими залишаться якраз прості числа.

$$\underline{2},\ \underline{3},\ \cancel{4},\ \underline{5},\ \cancel{6},\ \underline{7},\ \cancel{8},\ \cancel{9},\ \cancel{10}$$

$$\underline{11},\ \cancel{12},\ \underline{13},\ \cancel{14},\ \cancel{15},\ \cancel{16},\ \underline{17},\ \cancel{18},\ \underline{19},\ \cancel{20},\ldots$$

Зазначимо, що зі збільшенням n вказаний спосіб стає непридатним. У наш час снує ціла низка більш ефективних і швидких методів перевірки простоти числа n. Для цього будується послідовність

$$k_0 = 1,\ k_1,\ k_2, \ldots k_{n-1},\ \text{де}\ k_{i+1} = \begin{cases} 2k_i,\ 2k_i < n, \\ 2k_i - n, \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad i = 0,1,\ldots n-2.$$

Якщо $k_{n-1} \neq 1$, то n - складене, в іншому випадку питання залишається відкритим. Вказаний спосіб ґрунтується на малій теоремі Ферма і був відомий математикам стародавнього Китаю.

Полювання за простими числами набрало обертів у 17-му столітті. Першу таблицю простих чисел (від 2 до 713) склав Антоніо Катальді (1608р.). У 1668р. Пелль знайшов прості числа у межах 10 тисяч. У 1770р. Йоган Ламберт опублікував таблицю найменших простих дільників чисел, що не перевищують 102 тисяч.

До середини XIX ст. були складені таблиці простих чисел до 1 млн. Зокрема, професор Празького університету Якуб Кулик знайшов прості числа до 100 млн. Це зайняло 7 томів. У XXст. американцем Лемером та його учнями було знайдено прості числа в межах до 10 млрд.

Складність перевірки чисел на простоту спонукала багатьох математиків поставити питання про пошук формули, які б генерували прості числа. Такі формули пропонувались багатьма вченими, проте у багатьох випадках вони давали лише скінченне число простих значень. Зокрема, наступні формули генерують прості числа для вказаних значень n:

$p = 2n^2 + 29$ – Лежандр (при довільних натуральних значеннях аргумента n = 0,1,...,29);

$p = n^2 + n + 41$ – Ейлер (n = 0, 1,...39);

$p = n^2 - 79n + 1601$ – Ескот (n = 0, 1,...79) [1, 36].

У зв'язку з цим відзначимо проблему Лежандра (XVIII ст.) про те, що кожна арифметична прогресія, різниця і перший член якої взаємно прості, містить нескінченну кількість простих чисел. Тобто, многочлен $2 + 3n$ генерує безліч простих чисел. Це твердження було доведено лише через 100 років Леженом Діріхле.

У 1752 р. Гольдбах показав, що жоден многочлен від однієї змінної з цілими коефіцієнтами не може набувати лише простих значень. Проте й досі невідомо, чи існує многочлен від однієї змінної (окрім лінійного) серед значень якого буде нескінченна кількість простих чисел при довільних натуральних значеннях аргумента [1, 36]. З іншого боку, відомий цілий ряд функцій, що при всіх натуральних значеннях аргумента набувають лише простих значень. Зокрема, ще у 1947 році Міллс довів, що існує таке дійсне число *A*, більше за 1, що число [A^{3^n}] є простим для всіх $n \in N$. На жаль, ніхто й досі не знає, чому дорівнює A.

У 1952 р. Джулія Робінсон довела, що існує експоненціальний многочлен від кількох змінних, множина значень якого для натуральних значень аргументів збігається з множиною простих чисел. На підставі цього у 1970р. Юрій Матіясевич сконструював многочлен 25-го степеня з 26 змінними, значення якого в цілих точках дає лише прості числа.

Одну з формул для задання простих чисел запропонував свого часу відомий французький математик П.Ферма. Він висловив припущення, що всі числа виду $F_n = 2^{2^n} + 1$, де n =0,1, 2, 3, …, будуть простими. Це підтверджувалось тим, що при n =0, 1, 2, 3, 4 формула справді давала прості числа 3, 5, 17, 257, 65537. Наступне число,

$F_5 = 2^{2^5} + 1 = \ 4294867297$, було настільки великим, що Ферма не зміг встановити, є воно простим, чи ні. У 1732 році Ейлер показав, що це число складене (бо F_5 ділиться на 641) і тим самим спростував гіпотезу Ферма. Окрім того, Ейлер знайшов загальний критерій перевірки того факту, чи є число F_n складеним і довів, що усі натуральні дільники числа F_n містяться серед чисел виду $2^{n+2} \cdot k + 1$ (де k = 0, 1, 2,...) [3, 65].

Пізніше числами F_n почали називати ***числами Ферма***. Нині відомо вже 46 складених чисел Ферма. Такими є, наприклад, $F_6, F_7, F_8, F_{13}, F_{36}, F_{55} F_{150}, F_{452} F_{1945}$. Серед них є числа, для яких повністю знайдено всі їх прості дільники (наприклад, для F_5 та F_6*);* для яких знайдено лише один простий дільник (наприклад, для числа F_{1945}*),* а є й такі, для яких ще не знайдено жодного простого дільника, хоча точно відомо, що вони існують (наприклад, для F_7, F_8, F_{13}*)* [2, с 25].

Для уявлення грандіозності таких розрахунків слід зауважити, що число $F_{36} = 2^{2^{36}} + 1$ містить більш як 20 мільярдів цифр, а найбільше з відомих складених чисел Ферма F_{1945} має більш як 10^{582} цифр. У 70-тих роках минулого століття було знайдено один простий дільник для цього числа, а саме: $p = 5 \cdot 2^{1947} + 1$. Для цього, спираючись на критерій Ейлера, число F_{1945} ділили на числа виду $2^{1947} \cdot k + 1$ за допомогою спеціально запрограмованих ЕОМ [3, 65].

Пізніше, як поправку до твердження Ферма, було висловлено припущення, що усі члени послідовності $2+1$, 2^2+1, $2^{2^2}+1$, $2^{2^{2^2}}+1$, $2^{2^{2^{2^2}}}+1$, ... прості. Проте, у 1953 році й цю гіпотезу було спростовано. Виявилось, що п'яте число – F_{16}= $2^{2^{2^{2^2}}}+1$ не є простим (його дільником є число $2^{18} \cdot 3150 + 1$) [3, 71].

Прості числа Ферма тісно пов'язані з розв'язуванням однієї з найцікавіших проблем геометрії. Йдеться про можливість побудови правильних многокутників за допомогою циркуля й лінійки. Розв'язок цієї задачі, знайдений Гауссом, полягає у наступному (див. [2, 28]): *правильний многокутник може бути побудований за допомогою циркуля й лінійки тоді і тільки тоді, коли кількість його сторін дорівнює добутку 2 у будь-якому цілому невід'ємному степені і різних простих чисел Ферма.*

Таким чином, кількість сторін правильного n-кутника має дорівнювати: $n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ (де k=0, 1, 2, 3, …, а $p_1, p_2, \ldots, p_k$. — різні прості числа Ферма). Наприклад, при k=0 і $p = F_1 = 5$, n =5, а при $p = F_2 = 17$, n =17. Отже, за допомогою циркуля й лінійки можна побудувати правильні: 5-кутник, 10-кутник, 17-кутник, правильний 85-кутник, 340-кутник і т. д. Слід відзначити, що серед 1000 перших значень n є всього 54 числа такого виду.

Іншою важливою групою натуральних чисел є так звані ***числа Мерсенна***. Це числа виду $M_n = 2^n - 1$, де n – довільне натуральне число. Свою назву вони отримали на честь французького математика XVII століття М. Мерсенна, який у роботі «Фізично-математичні роздуми» стверджував, що числа M_n для $n \le 257$ будуть простими лише при n = 2,3,5,7,13,19,31,67,127,257. Зазначимо, що у багатьох випадках Мерсенн помилявся.

З відомої формули $a^k - b^k = (a-b) \cdot (a^{k-1} + a^{k-2} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{k-2} + b^{k-1})$ випливає, що $2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^2 + 2^1 + 1$, тобто число Мерсенна M_n можна визначити як суму

n перших членів геометричної прогресії 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, ... З цієї формули випливає також, що для складеного числа $n = k \cdot l$, де $k > 1$, $l > 1$

$$2^n - 1 = (2^l)^k - 1 = (2^l - 1)(2^{l(k-1)} + ... + 2^{2l} + 2^l + 1),$$

тобто $2^n - 1$ ділиться на $2^l - 1$. Отже, $2^n - 1$ може бути простим числом лише тоді, коли n – просте число.

Довгий час вважалося, що правильним є й обернене твердження, тобто для будь-якого простого n, число M_n також є простим. Проте, у 1536 році було доведено складеність числа $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ (Г. Регіус), у 1640 році –складеність чисел M_{23} та M_{37} (Ферма), а у 1738 році – числа M_{29} (Ейлер).

При великих значеннях n встановлення того, чи є відповідне число M_n простим, вимагає величезних обчислень. У наш час відомо всього 35 простих чисел Мерсенна. Тривалий час (аж до 1952 року) найбільшим з ним вважалося число $M_{127}=2^{127}–1$, що мало у своєму записі 39 цифр. Простоту цього числа було встановлено у 1876 році математиком Люка. Перевірка спиралася на наступні твердження:

1) *для непарного n число M_n просте тоді і тільки тоді, коли воно ділить K_{n-1}, де $K_{n+1}=K_n^2–2$ і K_1*=4 (критерій Люка-Лемера);

2) *якщо n — просте число, то всі натуральні дільники числа M_n мають вигляд $2 \cdot n \cdot k + 1$ (де k=0, 1, 2, 3, ...).*

Наприклад, $M_3=2^3–1=7$ є дільником $K_2=14$, $M_5=2^5–1=31$ є дільником $K_4=37643$, тому за першим із тверджень числа M_3 та M_5 – прості.

Спираючись на друге твердження, можна знайти власні дільники числа M_n. Так, для числа M_{11} ними є числа 23 і 89: $23 = 2 \cdot 11 \cdot 1 + 1 (k = 1)$, $89 = 2 \cdot 11 \cdot 4 + 1 (k = 4)$. Можна переконатись, що й дільники числа M_{67} також задовольняють вказане твердження: $193707721 = 2 \cdot 67 \cdot 1445580 + 1$, $7618382572\ 87 = 2 \cdot 67 \cdot 5685360129 + 1$.

Завдяки елементарності перевірки критерію Люка-Лемера на комп'ютері, постійно обчислюються нові прості числа Мерсенна, які нині є найбільшими з відомих простих чисел. Зокрема, останнє відкрите просте число Мерсенна $M_{1398269}$ містить у своєму десятковому записі 420921 знаків. Щоб вмістити це число, знадобиться близько 120 журнальних сторінок!

Відкриття кожного такого числа стає справжньою сенсацією. Так, на честь відкриття 23 простого числа Мерсенна 2^{11212} –1 в обчислювальному центрі Іллінойського університету, цей університет зобразив його на своєму поштовому штемпелі, а відкриття 25 та 26 чисел Мерсенна стало справжньою телевізійною сенсацією [4].

Інформацію про відомі у наш час прості числа Мерсенна наведено нижче у таблиці 1 [4].

Таблиця 1.

Прості числа Мерсенна

№	***n***	***Знаків у M_n***	***Рік відкриття***	***Відкривач***
1	2	1	–	–
2	3	1	–	–
3	5	2	–	–
4	7	3	–	–
5	13	4	1456	–
6	17	6	1588	Катальді
7	19	6	1588	Катальді
8	31	10	1772	Ейлер

№	*n*	*Знаків у M_n*	*Рік відкриття*	*Відкривач*
9	61	19	1883	Первушин
10	89	27	1911	Пауерс
11	107	33	1914	Пауерс
12	127	39	1876	Люка
13	521	157	1952	Робінзон
14	607	183	1952	Робінзон
15	1279	386	1952	Робінзон
16	2203	664	1952	Робінзон
17	2281	687	1952	Робінзон
18	3217	969	1957	Різель
19	4253	1281	1961	Гурвіц
20	4423	1332	1961	Гурвіц
22	9941	2993	1963	Джиліс
23	11213	3376	1963	Джиліс
24	19937	6002	1971	Акерман
25	21701	6533	1978	Нолл, Нікель
26	23209	6987	1979	Нолл
27	44497	13395	1979	Нелсон, Словінський
28	86243	25962	1982	Словінський
29	110503	33265	1988	Колквіт, Уелш
30	132049	39751	1983	Словінський
31	216091	65050	1985	Словінський
32	756839	22732	1992	Словінський, Гейдж
33	859433	258416	1994	Словінський, Гейдж
34	1257787	378632	1996	Словінський, Гейдж
35	1398269	420921	1996	Арменгауд
36	2976221	895932	1997	Спенс, Вольтман
37	3021377	909526	1998	Кларксон, Вольтман, Куровські
38	6972593	2098960	1999	Хаджратвала Вольтман, Кіровські
39	13466917	4053946	2001	Камерон Вольтман, Куровські

З числами Мерсенна тісно пов'язані так звані досконалі числа. *Досконалими* називають числа, які дорівнюють сумі своїх власних дільників. Стародавнім грекам були відомі 2 досконалі числа: 6 і 28. Нікомах Гераський (I-II ст.) знайшов ще два таких числа: 496 та 8128. П'яте досконале число було відкрите аж у XV ст. У наш час відомо 40 досконалих чисел.

У IX книзі Евклід наводить наступне твердження.

Парне число буде досконалим тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд: $2^{n-1} \cdot M_n$, де M_n *– просте число Мерсенна.*

Отже, задача знаходження досконалих чисел зводиться до знаходження простих чисел Мерсенна.

Зараз відомо, що всі парні досконалі числа закінчуються або на 6, або на 8, проте невідомо, чи існують непарні досконалі числа. Незважаючи на це, є цілий ряд властивостей таких чисел. У зв'язку з цим Вальтер Боро відмітив, що праці, присвячені непарним досконалим числам нагадують полювання за привидом: ніхто його не бачив, проте є багато досліджень того, як він НЕ МОЖЕ виглядати.

Проблема пошуку гігантських простих чисел пов'язана з проблемою розкладу складених чисел на множники і широко використовується у нас час в криптографії для створення надійних шифрів. Зазначимо, що до пошуку гігантських простих чисел може долучитися кожен охочий, ставши членом асоціації Great Internet Mersenne Prime Search.

Прості числа приховують цілу низку таємниць. Зокрема, і досі невідомо:

- чи буде множина чисел-близнюків скінченною;
- чи є множина простих чисел Мерсенна нескінченною;
- якщо множина простих чисел Мерсенна нескінченна, знайти функцію, асимптотично рівну функції розподілу простих чисел Мерсенна;
- чи існують прості числа Ферма при $n > 5$;
- чи буде множина простих чисел Ферма скінченною;
- чи всі неодиничні дільники чисел Ферма – прості;
- чи буде множина складених чисел Мерсена нескінченною;
- чи існують непарні досконалі числа тощо.

Розв'язання кожної з цих проблем дозволить краще зрозуміти властивості простих чисел та проникнути у їх таємниці.

Список використаних джерел

1. Бородін О.І. Теорія чисел. Вид. 3-тє, переробл. і доп./О.І. Бородін – К.: Вища школа. 1970, – 275 с.
2. Валах В.Я. Подорож у світ цілих чисел./В.Я. Валах : – К.: Ред. загальнопед. газ., 2005. – 128 с. – (Б-ка «Шк. світу»).
3. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. Пер. с пол. А. Мельникова / В. Серпинский. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. 1963. – 91 с.
4. Оленко А.Я. Найбільше просте число/ А.Я. Оленко // У світі математики. – 3, № 1. – 1997. – С.2-7.
5. Требенко Д.Я., Требенко О.О. Алгебра і теорія чисел: Ч.1 / Д.Я. Требенко – К.: НПУ ім.М.П. Драгоманова, 2006. – 400 с.
6. Клесов О.І., Поляковська О.В. Числа П'єра Ферма/ О.І. Клесов // У світі математики. – 15, № 2.– 2009. – С 28-37.

Анотація. Лукашова Т.Д. Прості числа та деякі пов'язані з ними проблеми теорії чисел.

Стаття присвячена огляду деяких проблем класичної теорії чисел, що пов'язані із простими числами. Зокрема, розглядається питання розподілу простих чисел у натуральному ряді та пошуку аналітичного виразу, який би генерував прості числа. Значну увагу у статті приділено огляду властивостей чисел Ферма та Мерсенна, наведено критерій Люка-Лемера перевірки чисел Мерсенна на простоту, а також вказано відомі на сьогоднішній день прості числа Мерсенна. Наприкінці розглянуто деякі властивості досконалих натуральних чисел та наведено найвідоміші із нерозв'язаних проблем теорії чисел, що пов'язані із розглянутими у статті класами чисел.

Ключові слова: теорія чисел, прості числа, розподіл простих чисел у натуральному ряді, прості числа Ферма, прості числа Мерсенна, прості числа-близнюки, досконалі числа.

Аннотация. Лукашова Т.Д. Простые числа и некоторые связанные с ними проблемы теории чисел.

Статья посвячена рассмотрению некоторых проблем классической теории чисел, которые связаны с простыми числами. В частности, рассматривается проблема распределения простых чисел в натуральном ряду и поиска аналитического выражения, которое бы генерировало простые числа. Особое внимание в статье уделено рассмотрению свойств чисел Ферма и Мерсенна, приведен критерий Люка-Лемера проверки чисел Мерсенна на простоту, а также указаны известные на сегодняшний день простые числа Мерсенна. В конце статьи рассмотрены некоторые свойства совершенных натуральних чисел и приведены наиболее известные нерешенные проблемы теории чисел, связанные с рассмотренными в статье класами чисел.

Ключевые слова: теория чисел, простые числа, распределение простых чисел в натуральном ряду, простые числа Ферма, простые числа Мерсенна.

Abstract. Lukashova T.D. Primes and some other related problems of number theory.

Article looks over some classical number theory problems connected with primes. In particular, under the consideration such problems like the problem of the distribution of primes in natural series, the problem of research the analytical expression that would generate primes. Special attention is paid for viewing the properties of Fermat and Mersenne numbers,is given the Lucas-Lehmer criterion for checking Mersenne numbers on simplicity, also are denoted the Mersenne primes, known nowadays. In the end considered some properties of perfect natural numbers and are given the most famous unresolved problems of number theory, connected with the classes of numbers reviewed in the article.

Keywords: Number Theory, Primes, the distribution of primes in natural series, Fermat primes, Mersenne primes, twin primes, perfect numbers.