Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Шаповалова Н. В., Панченко Л. Л. Особливості навчання гіперболічної геометрії для підвищення компетентності майбутніх вчителів математики і фізики // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск 3 (6). – С. 109-118.

Shapovalova N. V., Panchenko L. L. The peculiarities of teaching hyperbolic geometry in building up professional competence of future mathematics and physics teachers // Physics and Mathematics Education. Scientific journal. – 2015. – Issue 3 (6). – P. 109-118.

УДК 378.016:514.132

Н.В. Шаповалова , Л.Л. Панченко
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Україна

ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ І ФІЗИКИ

Постановка проблеми. Геометрія може застосовуватись не лише до простору, в якому ми живемо, а й до інших просторів, що виникають в математичних і фізичних теоріях. Геометрії цих просторів є різними, як евклідовою, так і неевклідовими. Таким чином, необхідність побудови багатьох різних геометрій пов’язана виключно із складною природою оточуючого нас світу.

Великий вплив на розвиток геометричної науки в XX–XXI століттях здійснили дослідження в фізиці, хімії та біології на рівні мікроявищ, які проходять в межах малих відстаней, а також дослідження в астрономії, космонавтиці, розвиток супутникового зв’язку, на рівні явищ, які проходять на дуже великих відстанях. При цьому геометрія стала втрачати наочність, оскільки людське око не може спостерігати за явищами на таких відстанях. Для їх опису використовуються багатовимірні та нескінченновимірні простори.

Геометрія Лобачевського стала прикладом для побудови інших неевклідових геометрій: сферичної геометрії, еліптичної геометрії або геометрії Рімана, недезаргової геометрії. Ці геометрії складають далеко не повний список всього многовиду існуючих геометрій. Неевклідові геометрії відіграли визначну роль при побудові А. Ейнштейном теорії відносності, в якій необхідно було прийняти факт викривлення оточуючого нас простору. Закони додавання швидкостей в спеціальній теорії відносності були отримані А. Ейнштейном в координатній аналітичній формі. Геометричну інтерпретацію цих співвідношень він не розглядав. В 1909 році фізик А. Зоммерфельд, а в 1910 році математик Ф. Клейн показали, що геометрична інтерпретація цих законів пов’язана з геометрією Лобачевського. Зв’язок гіперболічної геометрії із спеціальною теорією відносності у багатьох своїх роботах уточнював сербський математик В. Варичак.

Співпадіння простору швидкостей спеціальної теорії відносності з простором Лобачевського був чітко сформульований А. П. Котєльніковим у 1923, а опублікований у 1927 році [14].

Ще Лобачевський встановив, що його геометрія має пряме відношення до зоряної геометрії, тобто до геометрії космічного простору. На нашій планеті в рамках звичайних земних масштабів люди використовують геометрію Евкліда як найбільш просту і вірно відображаючу реальну дійсність. Справа зовсім змінюється, коли ми переходимо від земних масштабів до надто великих масштабів макросвіту або надто малих масштабів мікросвіту. Вважати, що і тут діє геометрія Евкліда, було б невірно. Досягнення фізики говорять про те, що фізичні простори надто великих масштабів ведуть себе як неевклідові.

Аналіз актуальних досліджень. Витоки сучасної теоретичної фізики тісно пов'язані з геометрією Лобачевського і тому наші відомі вчені академіки А. С. Христианович, М. А. Лаврентьєв і С. А. Лебедєв писали, що «Геометрія Лобачевського була основою для винаходу, який призвів до теорії відносності і методу розрахунків процесів усередині атомного ядра. Дослідження побудови атомного ядра з неймовірною швидкістю призвели до створення атомної промисловості». Н. А. Черніков, Я. І. Смородинський та інші стали з успіхом використовувати геометрію Лобачевського при вивченні і дослідженні зіткнень елементарних частинок в прискорювачі та при розв'язуванні різних задач фізики елементарних частинок та ядерних реакцій [14].

Геометрія Лобачевського розчистила ґрунт для створення сучасного аксіоматичного методу в геометрії, згідно якому вся геометрія повинна ґрунтуватися на основних поняттях, основних відношеннях і системі аксіом. Довести «строго» якусь-небудь теорему з точки зору сучасного аксіоматичного методу – це означає отримати її дедуктивним шляхом як наслідок з раніш доведених теорем, причому рисунок і всі наглядні уявлення будуть виключно допоміжними. Сучасний аксіоматичний метод, створений під впливом ідей Миколи Івановича Лобачевського в геометрії, знаходить тепер широке застосування для наукового обґрунтування багатьох математичних дисциплін, включаючи і деякі розділи теоретичної механіки [11].

При створенні нової геометрії М. І. Лобачевський користувався відомими фактами геометрії Евкліда, які не є наслідками п'ятого постулату Евкліда, тобто всі твердження, які не залежать від змісту п'ятого постулату, є спільною частиною геометрії Евкліда і Лобачевського. Користуючись аксіоматикою Гільберта, якої не було за життя Лобачевського, можна сказати, що спільною частиною обох геометрій є сукупність всіх тверджень, які можна вивести з аксіом перших чотирьох груп системи аксіом Гільберта, яка називається абсолютною геометрією. Отже, абсолютна геометрія є спільною частиною геометрії Евкліда і геометрії Лобачевського, усі твердження абсолютної геометрії мають місце і в геометрії Лобачевського.

Таким чином, в основі геометрії Лобачевського лежать всі твердження абсолютної геометрії і аксіома Лобачевського, яка полягає в тому, що через точку, яка не належить до даної прямої, у площині, що ними визначається, можна провести не менше двох прямих, які дану пряму не перетинають.

Площину і простір, де разом з абсолютною геометрією виконується аксіома Лобачевського та наслідки з неї, називають відповідно площиною і простором Лобачевського або гіперболічною площиною і гіперболічним простором [5].

Дана стаття присвячена дослідженню ролі та особливостей навчання гіперболічної геометрії в процесі навчання нормативної навчальної дисципліни

«Основи геометрії» студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів та розкриттю основних методичних аспектів цього процесу.

Питання, пов'язані з вивченням неевклідової геометрії Лобачевського, дуже тісно переплітаються з особливостями психології і теорії пізнання в цілому, з питаннями про те, яким чином виникають просторова уява та інтуїція. Дослідженням цих питань в різні часи займались відомі вчені – Карл Фрідріх Гаусс, Янош Больяї, Георг Фрідріх Бернхард Ріман, Еуженіо Бельтрамі, Фелікс Клейн, Анрі Пуанкаре, А. Д. Александров, П. К. Рашевський, О. С. Смогоржевський, Н. В. Єфімов, Л. С. Атанасян, О. В. Мантуров, В. Н. Боровик, В. П. Яковець та інші.

Метою статті є розкриття основних методичних аспектів навчання неевклідової геометрії Лобачевського студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів. Для цього спочатку розглядаються мета, зміст та основні положення гіперболічної геометрії. Потім аналізуються особливості неевклідової геометрії Лобачевського та пропонуються сучасні підходи і методи, її навчання. Аналізуються методичні особливості використання засобів динамічної геометрії в процесі навчання гіперболічної геометрії і основ геометрії, різноманітні форми навчально-практичної і дослідницької діяльності студентів фізико-математичних спеціальностей.

Виклад основного матеріалу. Проективна геометрія є найбільш зручним вихідним пунктом для пояснення сутності не лише геометрії Лобачевського, а й інших геометричних систем [25]. Саме за допомогою методів проективної геометрії можна описати дев'ять відомих науці неевклідових геометрій площини і показати можливість їх використання в фізиці.

В процесі викладання неевклідової геометрії Лобачевського та вивчення інших неевклідових геометрій слід використовувати порівняльний аналіз, а саме порівнювати твердження параболічної геометрії Евкліда, гіперболічної геометрії Лобачевського, сферичної геометрії, еліптичної геометрії або геометрії Рімана, активізуючи відомі студентам факти, та виявляти спільні або відмінні їх ознаки. Найбільш ефективними методами навчання неевклідових геометрій є пояснювально-ілюстративний метод та евристична бесіда. Саме під час евристичної бесіди студенти порівнюють твердження неевклідових геометрій з їх аналогами з евклідової геометрії.

Прямі, трикутники, чотирикутники, криві та інші фігури на гіперболічній площині мають специфічні властивості. Наприклад, якщо на евклідовій площині існують два види прямих а саме: прямі, що перетинаються, та паралельні прямі, то на площині Лобачевського існують три види прямих, а саме: прямі, що перетинаються, або збіжні прямі – це пучок прямих з власною вершиною – еліптичний пучок; паралельні прямі – це пучок прямих з невласною вершиною – параболічний пучок та розбіжні прямі – це пучок з ідеальною вершиною – гіперболічний пучок.

Для паралельних прямих на площині Лобачевського важливий напрямок паралельності і вони мають багато властивостей, відмінних від властивостей паралельних прямих на евклідовій площині. Так наприклад, відстань між паралельними прямими на евклідовій площині є сталою величиною, а на гіперболічній площині відстань між паралельними прямими необмежено зменшується в напрямку кута паралельності і може стати меншою за наперед заданий, як завгодно малий, відрізок, тобто в напрямку кута паралельності паралельні прямі асимптотично наближаються; в протилежному напрямку відстань необмежено зростає і може стати більшою за наперед заданий, як завгодно великий, відрізок, тобто в напрямку, протилежному до кута паралельності паралельні прямі асимптотично розходяться.

На істотну відмінність геометрії Лобачевського від евклідової геометрії вказує і наявність функції Лобачевського, яка пов'язує відрізки з кутами. Такої функції немає на евклідовій площині. Цим пояснюється необхідність збереження в евклідовій геометрії еталону довжини, не дивлячись на те, що існує природна одиниця міри кутів. В геометрії Лобачевського в цьому немає ніякої потреби, оскільки тут за одиницю довжини можна взяти відрізок, який називається стрілкою кута паралельності, що відповідає певному куту паралельності [5].

При розгляді питання про суму внутрішніх кутів трикутників на евклідовій площині слід відмітити, що вона є сталою величиною і дорівнює 180° або 2π радіан. На відміну від евклідової геометрії, в геометрії Лобачевського сума внутрішніх кутів трикутників є змінною величиною, що залежить від форми і розмірів трикутника, але завжди меншою 180° або 2π радіан.

Розглядаючи властивості трикутників слід дати означення рівних трикутників та розглянути три ознаки рівності трикутників, дати означення подібних трикутників та наголосити на існуванні подібних трикутників, трьох ознак подібних трикутників, подібних фігур в евклідовій геометрії. Особливу увагу потрібно звернути на той факт, що в геометрії Лобачевського мають місце чотири ознаки рівності трикутників. Довівши четверту ознаку рівності трикутників, яка полягає в тому, що якщо в двох трикутників відповідні кути рівні між собою, то і одна пара відповідних сторін також будуть рівні між собою, а як наслідок, враховуючи другу ознаку рівності трикутників, і всі пари відповідних сторін будуть рівні між собою, можна зробити висновок, що трикутники з відповідними рівними кутами, які на евклідовій площині є подібними, на гіперболічній площині є рівними. Таким чином, ще однією цікавою особливістю гіперболічної геометрії на відміну від евклідової є відсутність подібних трикутників, подібних фігур і взагалі перетворень подібності.

Ще однією відмінністю гіперболічної геометрії від геометрії Евкліда є той факт, що на площині Лобачевського не навколо будь-якого трикутника можна описати коло, це можна зробити лише у випадку, коли медіатриси (медіатрисою трикутника називається пряма, що лежить у площині трикутника, проходить через середину однієї з його сторін і перпендикулярна до цієї сторони) або серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються, оскільки в цьому випадку точка їх перетину рівновіддалена від вершин трикутника. Якщо дві медіатриси трикутника є розбіжними прямими, то і третя медіатриса попарно розбіжна з ними і в цьому випадку навколо трикутника можна описати еквідистанту. Якщо дві медіатриси трикутника є паралельними прямими, то і третя медіатриса паралельна до них і в тому ж самому напрямі, у цьому випадку навколо трикутника можна описати граничну лінію або орицикл [24].

В геометрії Лобачевського є чотири види ліній сталої кривини: пряма, коло, еквідистанта (гіперцикл) і гранична лінія (орицикл). Орицикл може «ковзати» сам по собі без деформації, як коло і пряма. Цією властивістю володіє і еквідистанта: якщо база еквідистанти буде «ковзати» сама по собі, то і еквідистанта буде «ковзати» сама по собі без деформації, оскільки відстані всіх точок еквідистанти від бази, рівні між собою.

Через будь-які три точки площини Лобачевського проходить крива сталої кривини. На відміну від кола гранична лінія (орицикл) і еквідистанта (гіперцикл) є незамкненими лініями в площині Лобачевського. А пряма, як база гіперболічного пучка, є частинним випадком еквідистанти.

Для доведення несуперечливості геометрії Лобачевського доцільно розглядати декілька її моделей, а саме: інтерпретацію італійського вченого Е. Бельтрамі – в евклідовому просторі існує поверхня від'ємної кривини, яка називається псевдосферою, на якій в системі геодезичних ліній виконується (локально) лише планіметрія Лобачевського; інтерпретацію німецького математика Ф. Клейна, який запропонував оригінальне тлумачення геометрії Лобачевського на звичайних зразках евклідової геометрії і не тільки для всієї планіметрії, але і для всієї стереометрії. Праця Клейна виявилася величним тріумфом у справі остаточного визнання геометрії Лобачевського як логічно стрункої геометричної системи. І на питання про реальність геометрії Лобачевського, вже без всіляких коливань можна дати позитивну відповідь, а саме: геометрія Лобачевського реальна настільки, наскільки реальна евклідова геометрія, а та, в свою чергу, несуперечлива настільки, наскільки несуперечлива арифметика дійсних чисел; несуперечливість останньої доведена багатовіковою практикою людського суспільства в найширшому розумінні цього слова. Також доречно розглянути декілька моделей аксіоматики планіметрії Лобачевського, які запропонував відомий французький математик і філософ А. Пуанкаре [22]. В результаті в рамках евклідової геометрії на її відомих зразках можна побудувати всю гіперболічну геометрію.

Для розуміння геометрії Всесвіту важливо використати наукові результати, які були отримані вченими-фізиками, астрономами. Із загальної теорії відносності випливає, що простір викривлений. Це пояснюється тим, що поблизу тіл, які мають велику масу (наприклад, поблизу Сонця, зірок), закони ньютонівської механіки змінюються, геометрія простору стає неевклідовою. Добре відомо, що однією з поширених моделей прямої є промінь світла. Однак світло, яке проходить повз Сонце або яких-небудь зірок, під впливом сили тяжіння згинає свою траєкторію.

Відкриття теорії відносності А. Ейнштейном, розширення об'єму знань про Всесвіт приводять нас до висновку, що Всесвіт в цілому не можна розглядати як незмінну систему. Суперечливому та змінному Всесвіту притаманна зміна метрики простору і часу.

Важливі результати були отримані А. А. Фрідманом. В основу розробленої Фрідманом моделі Всесвіту була покладена гіпотеза, згідно якій Всесвіт однорідний, тобто влаштований однаково в усіх своїх частинах. Звичайно, річ йде про Всесвіт в цілому. Якщо ж говорити про порівняно невеликі масштаби, то неоднорідність Всесвіту буде видна неозброєним оком. Фрідман встановив, що якщо щільність речовини у Всесвіті менше деякої сталої величини (критичної щільності), тоді кривина простору буде від'ємною, якщо ж критична щільність перевищена, тоді простір має додатну кривину. І нарешті, у випадку, коли щільність дорівнює критичному значенню, тоді кривина простору дорівнюватиме нулю. Таким чином, як показав Фрідман, при певних умовах геометрія Всесвіту має від'ємну кривину, тобто співпадає з геометрією Лобачевського.

Виходячи із загальної теорії відносності, в 1922 році Фрідман зробив висновок, що Всесвіт повинен розширюватися з плином часу.

Фрідманова модель Всесвіту, яка була отримана теоретичним шляхом, була блискуче підтверджена експериментально американським астрономом Едвіном Хабблом. Хаббл, діючи абсолютно незалежно від Фрідмана, виявив «розбігання» далеких туманностей. Ейнштейн оцінив отримані Хабблом результати як підтвердження теоретичних положень Фрідмана. Пізніше була побудована модель «розширеного» Всесвіту.

Встановлена Хабболом в 1929 році залежність між червоним зміщенням галактик і відстанню до них ввійшла в науку як один з найбільш важливих космологічних законів, який отримав назву «закону Хаббла».

Сучасний рівень науки дозволяє зробити висновок, що реальний простір Всесвіту є викривленим простором змінної кривини. Отже, геометрія Всесвіту не може бути ні геометрією Евкліда, ні геометрією Лобачевського, оскільки евклідовий простір і простір Лобачевського мають відповідно нульову і сталу від'ємну кривину. Оскільки кривина евклідового простору дорівнює нулю, тоді можна вважати, що простір Лобачевського, який має сталу від'ємну кривину, ближче до геометрії Всесвіту.

Перші застосування геометрія Лобачевського отримала в роботах самого М.І. Лобачевського, який за її допомогою зміг обчислити деякі інтеграли. В кінці XIX століття в роботах А. Пуанкаре і Ф. Клейна були знайдені прямі зв'язки геометрії Лобачевського з теорією функцій комплексної змінної та з теорією чисел, зокрема з арифметикою невизначених квадратичних форм. Геометрія Лобачевського знаходить тепер важливе застосування в теорії функцій комплексної змінної, яка є математичною основою сучасної гідродинаміки, аеродинаміки і теорії пружності.

В наш час значення геометрії Лобачевського ще більше зросло завдяки роботам американського математика Тьорстона, який встановив її зв'язок з топологією тривимірних многовидів. Сучасні дослідження астрономів, математиків, фізиків, філософів, космологів все більше вимагають професійного володіння фактами як неевклідової геометрії Лобачевського, так і інших неевклідових геометрій.

Вивчення курсу основ геометрії, як одного з фундаментальних курсів математичної підготовки майбутніх вчителів, відкриває широкі можливості для їх інтелектуального розвитку, а саме для формування та розвитку логічного мислення, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної культури, вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, будувати математичні моделі досліджуваних процесів і явищ, розуміти будову Всесвіту, обґрунтовувати отримані висновки та інше.

Розв'язанню проблеми приведення освітнього і культурного рівня педагогічних кадрів у відповідність до швидкого розвитку науки і техніки, суспільно-політичних і соціально-економічних процесів, та процесу стандартизації освіти сприяє розвиток інформатичної підготовки студентів.

Методичні особливості використання засобів динамічної геометрії полягають в тому, що ними можна користуватись як вдома, так і в школі, і у ВНЗі при різноманітних формах проведення занять і при різній комп'ютерній оснащеності кабінету або аудиторії; вони дозволяють швидше і ефективніше оволодіти вузівським курсом геометрії, підвищують здатність до запам'ятовування матеріалу; забезпечують можливість вивчення геометрії на основі діяльнісного підходу за рахунок впровадження елементів експерименту і дослідження в навчальний процес; підвищують міру емоційного залучення студентів, забезпечують спроможність постановки творчих задач і організації нових дослідницьких проектів; показують, яким чином сучасні технології ефективно застосовуються для моделювання і візуалізації геометричних, математичних і фізичних, понять.

Програмне середовище дозволяє організовувати різноманітні форми навчально-практичної діяльності. В процесі навчання основам геометрії доцільно використовувати:

1. Статичні рисунки-ілюстрації.
2. Маніпулятивні моделі для дослідження.
3. Конструктивні завдання.

4. Завдання з перевіркою побудови або відповіді.
5. Сценарні презентації і тренажери.

Хоча математичні моделі завжди містять недостатньо розкриті характеристики досліджуваних об'єктів, що заважає досягненню абсолютної точності і адекватності даних моделей реальним процесам, але не зменшує їхньої наукової цінності як інструментів аналізу, спостереження, порівняння і прогнозування різного роду явищ у всіх сферах науково-суспільного життя.

Органічне поєднання і взаємозв'язок математичного і комп'ютерного моделювання в підготовці студентів є необхідним елементом навчального процесу і дослідницької діяльності. Набуття студентами вищих навчальних закладів вмінь самостійно розробляти моделі для застосування у навчальному та виробничому процесах, розробляти методику проведення занять з використанням комп'ютерного моделювання, створювати нові моделі та вдосконалювати існуючі в своїй дослідницькій діяльності є невід'ємним елементом освітньої підготовки майбутніх вчителів математики і фізики.

Ускладнення самих досліджуваних об'єктів стимулює науковців до розробки та вдосконалення математичних моделей, які застосовуються для їх аналізу. З плином часу постає необхідність впроваджувати більш комплексні десегментовані синергетичні моделі реальної дійсності, побудовані на основі комбінування і синхронізації суспільних процесів в ході наукового пізнання, що є найбільш актуальним завданням сучасної науки.

Висновки. За результатами дослідження можна зробити наступні висновки.

При навчанні неевклідової геометрії Лобачевського доцільно використовувати порівняльний аналіз фактів евклідової геометрії та тверджень неевклідових геометрій, засоби динамічної геометрії, розглядати різні моделі гіперболічної геометрії, практичні і прикладні застосування фактів геометрії Лобачевського, виявляти міжпредметні зв'язки геометрії Лобачевського з фізикою, астрономією, теорією функцій комплексної змінної, з теорією чисел та досліджувати застосування фактів гіперболічної геометрії в різних областях науки, техніки, біології, ядерної фізики, фізики елементарних частинок, астрономії, космології та ін.

Вивчення властивостей геометричних фігур в неевклідових геометріях розширюють уявлення студентів про сучасну картину Всесвіту, підвищують компетентність майбутніх вчителів математики і фізики та стимулюють їх власний пошук нових математичних, геометричних та фізичних ідей і теорій.

Список використаних джерел

1. Александров П. С. Что такое неэвклидова геометрия / П. С. Александров. – М.: изд. Академии педагогических наук РСФСР, 1950. – 72 с.
2. Атанасян Л. С. Геометрия. Ч. 2 / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.
3. Атанасян Л. С. Геометрия Лобачевского : кн. для учащихся. / Л. С. Атанасян. – М.: Просвещение, 2001. – 336 с.
4. Бахвалов С. В. Основания геометрии (главы высшей геометрии). Ч. 1. Учебное пособие для вузов / С. В. Бахвалов, В. П. Иваницкая. – М.: Высшая школа, 1972. – 280 с.
5. Боровик В. Н. Курс вищої геометрії : навчальний посібник / В. Н. Боровик, В. П. Яковець. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.

6. Горшкова Л. С. Основания геометрии: учебное пособие для студентов педагогических вузов / Л. С. Горшкова, М. В. Сорокина. – Пенза: Пензенский государственный педагогический университет им. В.Г. Белинского, 2009. – 144 с.
7. Данилевський М. П. Основи сферичної геометрії та тригонометрії : навчальний посібник / М. П. Данилевський, А. І. Колосов, А. В. Якунін; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 92 с.
8. Егоров И. П. Основания геометрии : учебное пособие / И. П. Егоров. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 146 с.
9. Ілляшенко В. Я. Основи геометрії: Навч. посіб. для вищ. навч. закл. / В. Я. Ілляшенко. – Луць: РВВ «Вежа» Волин. нац.ун-ту ім. Лесі Українки, 2012. – 252 с.
10. Кадомцев С.Б. Геометрия Лобачевського и физика / С. Б. Кадомцев. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 72 с.
11. Костин В. И. Основания геометрии / В. И. Костин. – М.: Учпедгиз, 1948. – 304 с.
12. Котельников А. П., Фок В. А. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике / А. П. Котельников, В. А. Фок. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 88 с.
13. Кутузов Б. В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии. Пособие для учителей средней школы / Б. В. Кутузов. – М.: Гос. уч.-пед. изд-во мин-ва просв. РСФСР, 1955. – 152 с.
14. Лаптев Б. Л. Геометрия Лобачевского, ее история и значение / Б. Л. Лаптев. – М.: Знание, 1976. – 64 с.
15. Ломаєва Т. В. Перетворення і аксіоматичний метод в геометрії. Ч. 2 / Т. В. Ломаєва, О. Ф. Семенович. – Черкаси, 1999. – 173 с.
16. Попов Ю. И. Основания геометрии: лекции. – Калининград: Изд-во БФУ им. И. Канта, 2011. – 136 с.
17. Розенталь И. Л. Геометрия, динамика, Вселенная / И. Л. Розенталь. – М.: Наука, 1978. – 223 с.
18. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства / Б. А. Розенфельд. – М.: Наука, 1969. – 648 с.
19. Силин А. В. Открываем неевклидову геометрию / А. В. Силин, Н. А. Шмакова. – М.: Просвещение, 1988. – 123, [2] с.
20. Слєпкань З. І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі / З. І. Слєпкань / М-во освіти та науки України. НПУ ім. М. П. Драгоманова. – Київ, 2000. – 210 с.
21. Смогоржевський О. С. Основи геометрії / О. С. Смогоржевський. – К.: Радянська школа, 1954. – 343 с.
22. Трайнин Я. Л. Основания геометрии / Я. Л. Трайнин. – М.: Учпедгиз, 1961. – 326 с.
23. Тутаев Л. К. Геометрия Лобачевского. Проективная модель / Л. К. Тутаев. – Минск: Изд-во Белгосуниверситета, 1959. – .127 с.
24. Шаповалова Н. В. Криві на площині Лобачевського. Навч.-метод. посібник для студ. матем. спец. ВНЗ / Н. В. Шаповалова, Л. Л. Панченко. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – 32 с.
25. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского / П. А. Широков. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 80 с.
26. Щербаков Р. Н. От проективной геометрии – к неевклидовой (вокруг абсолюта): Кн. для внеклассного чтения. IX, X кл. / Р. Н. Щербаков, Л. Ф. Пичурин. – М.: Просвещение, 1979. – 158 с.
27. Sosinskii, A. B. Geometries / A. B. Sossinsky. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2012 – 322 p. – (Student mathematical library : v. 64)

Анотація*. *Шаповалова Н. В., Панченко Л. Л. Особливості навчання гіперболічної геометрії для підвищення компетентності майбутніх вчителів математики і фізики.

У статті проаналізовані особливості навчання гіперболічної геометрії в процесі вивчення нормативної навчальної дисципліни «Основи геометрії» у вищих навчальних закладах для підвищення компетентності майбутніх вчителів математики і фізики. Розглянуті мета, зміст, основні положення неевклідової геометрії Лобачевського та запропоновані сучасні підходи і методи її навчання. Запропоноване використання в навчальному процесі порівняльного аналізу фактів евклідової геометрії та тверджень неевклідових геометрій, різних моделей гіперболічної геометрії, практичних і прикладних застосувань фактів геометрії Лобачевського, засобів динамічної геометрії, міжпредметних зв'язків геометрії Лобачевського з фізикою, астрономією, космологією, біологією, теорією функцій комплексної змінної, з теорією чисел тощо.

Ключові слова: *гіперболічна геометрія, неевклідова геометрія Лобачевського, модель геометрії Лобачевського, евклідова геометрія, основи геометрії, компетентність, міжпредметні зв'язки, навчальний процес, навчання, фізика, астрономія.*

Аннотация. Шаповалова Н. В., Панченко Л. Л. Особенности обучения гиперболической геометрии для повышения компетентности будущих учителей математики и физики.

В статье проанализированы особенности обучения гиперболической геометрии в процессе изучения нормативной учебной дисциплины «Основания геометрии» в высших учебных заведениях для повышения компетентности будущих учителей математики и физики. Рассмотрены цель, содержание, основные положения неевклидовой геометрии Лобачевского и предложены современные подходы и методы её обучения. Предложено использование в учебном процессе сравнительного анализа фактов евклидовой геометрии и утверждений неевклидовых геометрий, различных моделей гиперболической геометрии, практических и прикладных применений фактов геометрии Лобачевского, средств динамической геометрии, межпредметных связей геометрии Лобачевського с физикой, астрономией, космологией, биологией, теорией функций комплексной переменной, с теорией чисел и т.д.

Ключевые слова: *гиперболическая геометрия, неевклидова геометрия Лобачевского, модель геометрии Лобачевского, евклидова геометрия, основания геометрии, компетентность, межпредметные связи, учебный процесс, обучение, физика, астрономия.*

Abstract*. Shapovalova N*. V., Panchenko L. L. The peculiarities of teaching hyperbolic geometry in building up professional competence of future mathematics and physics teachers.

The article analyzes the peculiarities of teaching hyperbolic geometry in the normative course "Foundations of Geometry" in high school in building up professional competence of future mathematics and physics teachers. The article outlines the aim, contents and basic provisions of non-Euclidean Lobachevski geometry and proposes up-to-date approaches and methods of teaching it. The authors suggest the employing in this process of comparative analysis of facts valid for Euclidean geometry with assertions *formulated for non-Euclidean geometries, of different models of hyperbolic geometry, of practical and applied use of Lobachevski geometry facts, of dynamic geometry instruments and of interdisciplinary ties of Lobachevski geometry with physics, astronomy, theory of function of complex variable, number theory etc.*

Key words: *hyperbolic geometry, non-Euclidean Lobachevski geometry, model of Lobachevski geometry, Euclidean geometry, foundations of geometry, competence, interdisciplinary ties, studying process, approach, physics, astronomy.*