Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Розуменко А.О., Власенко В.Ф., Розуменко А.М. Знамениті задачі математики // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск 3 (6). – С. 51-65.

Rozumenko A., Vlasenko V., Rozumenko A. Famous applications of mathematics // Physics and Mathematics Education. Scientific journal. – 2015. – Issue 3 (6). – P. 51-65.

УДК 51.09.07

А.О. Розуменко
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
В.Ф. Власенко
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
А.М. Розуменко
Сумський національний аграрний університет, Україна

ЗНАМЕНИТІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИКИ

Постановка проблеми. Аналіз публікацій психологів, педагогів, методистів, а також власний досвід роботи дозволяють зробити висновок про те, що пізнавальна мотивація студентів, зокрема при навчанні математики є дуже низькою. Теоретично обґрунтовано і експериментально перевірено, що одним із шляхів розвитку навчальної мотивації та пізнавального інтересу до навчання математики є використання елементів історизму, зокрема аналіз історичних задач.

Аналіз актуальних досліджень. Особливості використання історичного матеріалу у процесі навчання математики та методологічні аспекти вивчення курсу історії математики досліджували В.Г.Бевз, С.В.Бєлобродова, О.М.Боголюбов, О.І.Бородін, Л.М.Вивальнюк, М.Я.Ігнатенко, Б.В.Гнеденко, А.М.Колмогоров, А.Г.Конфорович, М.В.Шмигевський та інші.

Мета статті: навести приклади задач, які відіграли значну роль у розвитку математики; зробити історичний аналіз пошуку їх розв’язку та показати сучасний спосіб їх розв’язання.

Виклад основного матеріалу. Історія математики свідчить, що всі її основні розділи виникли з розв’язання практичних або теоретичних задач. Одні задачі розв’язували тисячоліттями (задача про доведення 5-го постулату Евкліда), інші – століттями (велика теорема Ферма), ще інші – протягом доби (задача про брахістохрону, І.Ньютон, В.Лейбніц). Розв’язування таких задач породжували нові ідеї, методи, теорії. В цьому їх непересічне значення. Так було раніше, так є тепер, так буде в майбутньому.

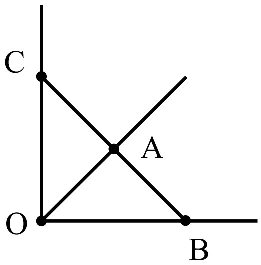
Пропонуємо розглянути приклади задач, що склали епоху в розвитку математики.

1. Три знамениті задачі старовини. Це задачі про подвоєння куба, про трисекцію кута і квадратуру круга.

Задача про подвоєння об'єму куба полягає у побудові за допомогою лише циркуля та лінійки (без поділок) відрізка x такого, що $x^3 = 2a^2$, де a – довжина ребра заданого куба, тобто відрізка $x = a\sqrt[3]{2}$, де x – довжина ребра шуканого куба. Для цього досить побудувати за допомогою лише циркуля та лінійки відрізок довжиною $\sqrt[3]{2}$. Ця задача є природним узагальненням задачі про подвоєння площі квадрата із стороною a, тобто про побудову відрізка $x = a\sqrt{2}$. Очевидно, таким відрізком є діагональ квадрата із стороною a.

Лише в першій половині XIX ст. було доведено, що відрізок довжиною $\sqrt[3]{2}$ за допомогою лише циркуля і лінійки побудувати неможливо. При розв'язанні цієї задачі було зроблено багато відкриттів, зокрема знайдено критерій побудови відрізків за допомогою лише циркуля та лінійки. Він полягає в тому, що за допомогою лише циркуля та лінійки можна побудувати відрізок довжиною x, якщо він є коренем алгебраїчного рівняння $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ з цілими коефіцієнтами, причому цей корінь виражається через квадратні радикали. Рівняння $x^3 - 2 = 0$ не задовольняє цьому критерію, отже, не можна побудувати за допомогою лише циркуля та лінійки відрізок довжиною $\sqrt[3]{2}$.

Значний вклад в розв'язання цієї задачі зробили італійський геометр Лоренцо Маскероні (1750-1800) і датський геометр Георг Мор (1640-1697). В 1797 р. у книзі «Геометрія циркуля» Маскероні довів, що кожна задача на побудову, яка розв'язується за допомогою циркуля і лінійки, може бути розв'язана одним лише циркулем. Виявилось, що цей результат ще раніше, у 1672 р. опублікував Г.Мор. Сьогодні цей факт іменують теоремою Мора-Маскероні.



Мал.1

Цікаво відзначити, що відрізок $x = \sqrt[4]{2}$ побудувати за допомогою лише циркуля та лінійки дуже просто. Для цього будуємо прямий кут і ділимо його навпіл. На бісектрисі прямого кута відкладаємо відрізок $OA = \sqrt{2}$. Далі будуємо пряму $AB \perp OA$ і продовжуємо відрізок AB до перетину з перпендикуляром OC у точці C. Тоді $OB = OC = \sqrt[4]{2}$. Дійсно, $OB^2 + OC^2 = 2(OB)^2 = 2\sqrt{2} = 2x^2$, $x^2 = \sqrt{2}$, $x = \sqrt[4]{2}$ (мал. 1).

Задача про трисекцію кута – це задача про поділ даного кута на три рівні частини за допомогою лише циркуля та лінійки. Ділити прямий кут на три рівні кути вміли вже піфагорійці. В загальному ж випадку трисекція кута неможлива. Французький математик П.Ванцель (1814-1848) довів цей факт у 1837 р. А саме, якщо $\beta = \dfrac{\alpha}{3}$, то $\cos\alpha = \cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$ і для величини $x = 2\cos\beta$ маємо рівняння $x^3 - 3x - a = 0$, де $a = 2\cos\alpha$. Воно не розв'язується в квадратних радикалах для довільного кута α. Цікаво відзначити, що для кутів виду $\alpha = \dfrac{360°}{n}$, $n \in N$ трисекція можлива тоді і тільки тоді, коли n не ділиться на 3. Цей факт наведений у книзі «Енциклопедія для дітей. – Математика. – М.: Аванта, 2001.– 685 с.» на с. 322.

Задача про квадратуру круга полягає у побудові за допомогою циркуля і лінійки квадрата, площа якого дорівнює площі даного круга. Вона була відома в стародавньому Єгипті і Вавилоні за 2 тисячі років до нашої ери, хоча перше пряме посилання на неї відноситься до V ст. до н.е. По свідоцтву історика Плутарха філософ Анаксагор намагався розв'язати цю задачу, перебуваючи у в'язниці. Якщо позначити сторону квадрата через x, а радіус кола через r, то повинна мати місце рівність $x^2 = \pi r^2$, що при $r = 1$ дає $x = \sqrt{\pi}$. Велику надію на розв'язність цієї задачі вселяло те, що існували криволінійні фігури, квадровані циркулем і лінійкою, наприклад, луночки Гіппократа. Було запропоновано багато побудов, але всі вони мали наближений характер. Вся справа полягала в тому, що число π має зовсім іншу природу, ніж $\sqrt[3]{2}$. В 1882 р. німецький математик Ф.Ліндеман (1852-1939) довів трансцендентність числа π, і цим самим довів нерозв'язність задачі про квадратуру круга за допомогою циркуля і лінійки.

2. Задача про розподіл простих чисел у натуральному ряді. Поняття простого числа відоме математикам давно. Евклід у своїх «Началах» довів нескінченість множини простих чисел. Природно виникає питання про їх розподіл у натуральному ряді. Аналіз таблиць простих чисел показав, що закономірність ряду простих чисел не є простою. Так, Ж.Бертран (1822-1900) висловив гіпотезу про те, що між числами n і $2n$ при $n \geq 2$ існує принаймні одне просте число. Цю гіпотезу довів П.Л.Чебишев (1821-1894). В той же час у натуральному ряді існують як завгодно довгі проміжки послідовних складених чисел. Дійсно, нехай $m > 1$ довільне фіксоване натуральне число. Тоді послідовні числа $(1+m)!+2$, $(1+m)!+3$, …, $(1+m)!+m+1$ складені і їх рівно m штук. В 1808 р. А.Лежандр (1752-1833), досліджуючи таблиці простих чисел, складених до 400000, знайшов, що $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - B}$, де $\pi(x)$ – число простих чисел, що не перевищують x, B – стала, $B = 1{,}08366$. Незалежно від Лежандра К.Гаусс (1777-1855) висунув гіпотезу про те, що $\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$.

Неважко переконатись, що (якщо ці границі існують)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x \frac{dt}{\ln t}}.$$

Наближені рівності

$$\frac{x}{\ln x - B} \approx \pi(x) \text{ і } \pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

виражають так званий асимптотичний закон розподілу простих чисел.

Першим в обґрунтуванні цього закону добився істотних успіхів П.Л.Чебишев [12 , с. 257-272]. Наступний значний крок зробив німецький математик Б.Ріман (1826-1866), який у 1859 р. отримав глибокі результати за допомогою дзета-функції $\zeta(s)$ комплексної змінної $s = x + iy$, $x, y \in R$, $i = \sqrt{-1}$. Користуючись методом Рімана Ж.Адамер і Валле-Пуссен в 1896 р. незалежно один від одного довели існування границі $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$ при $x \to +\infty$. В 1949 р. А.Сельберг і П.Ердеш дали елементарне доведення цього факту. З асимптотичного закону отримуємо асимптотичну оцінку для n- го простого числа p_n : $p_n \sim n \ln n$ [12 , с. 272-276].

Теорія простих чисел породила цілу низку задач: про досконалі і дружні числа, про прості числа-близнюки, про розподіл простих чисел у арифметичних прогресіях, проблема Гольдбаха, для якої математик Л.Г.Шнірельман (1905-1938) відкрив новий метод [12, с. 288-294], а І.М.Виноградов (1891—1983) її розв'язав остаточно. Метод Виноградова має широкі застосування в теорії функцій комплексної змінної, теорії ймовірностей, в наближеному аналізі.

Так ще раз підтверджується той факт, що відкритий новий метод розв'язання конкретної задачі виявляється придатним для розв'язання багатьох інших задач у різних розділах математики.

Про прості числа-близнюки відомо, що ряд чисел, обернених до них, збіжний. Але до цього часу невідомо, скінченна чи нескінченна множина чисел-близнюків.

Інтерес до простих чисел обумовлений тим, що кожне натуральне число $n>1$ або просте, або є добутком простих чисел: $n = p_1 p_2 ... p_k$, причому це представлення єдине з точністю до порядку співмножників. Це основна теорема арифметики натуральних чисел. Тобто натуральні числа побудовані з простих чисел!

3. Задача про розв'язання алгебраїчних рівнянь у радикалах. Квадратні рівняння вміли розв'язувати ще в Стародавньому Вавилоні. Зразок такого розв'язання знайдено на клинописних табличках, причому це розв'язання має рецептурний характер: «роби так», без будь-яких обґрунтувань. Одне з рівнянь в сучасних позначеннях має вигляд $x^2 - 2{,}5x + 1 = 0$, його коренями є числа 0,5 і 2. Сучасна формула коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ має вигляд

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

тобто корені виражаються в квадратних радикалах.

Кубічні рівняння виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ теж розв'язуються за допомогою квадратних і кубічних радикалів. Шлях до формул коренів кубічного рівняння був довгий і сповнений драматизму. Спочатку з руки італійського ченця Луки Пачолі (1445-1517) вважали, що кубічні рівняння не можна розв'язати в радикалах, а тому їх треба віднести до числа «неможливих». Але вже в 1515 р. професор математики Болонського університету Сціпіон дель Ферро (1465-1526) відкрив, але ніде не опублікував, спосіб розв'язання рівнянь виду $x^3 + qx = r$. Про це дізнався один з учнів Ферро на ім'я А.Фіорі, який скористався секретом свого вчителя і в 1535 р. викликав математика-самоучку Н.Тарталью (бл. 1500-1557) на публічний диспут, щоб провчити останнього, який теж хвалився знанням секрету розв'язання кубічних рівнянь. Усі 30 задач Фіорі Тарталья («заїка», справжнє прізвище Фонтана) розв'язав за 2 години, а Фіорі і за 50 днів не розв'язав жодної задачі Тартальї.

Відтоді почалося справжнє полювання за методом розв'язання кубічних рівнянь. Лікар за фахом Джироламо Кардано (1501-1576), працюючи над трактатом з арифметики, довідався про відкриття дель Ферро і успіх Тартальї. В результаті умовлянь і клятви нерозголошення Кардано дізнався секрет у Тартальї і опублікував його в 1545р. у своїй знаменитій книзі «Велике мистецтво, або про правила алгебри». Знаменита формула, яку згодом несправедливо стали називати формулою Кардано, для рівняння

$$x^3 + px + q = 0, \qquad (*)$$

до якого підстановкою $y = x - \frac{a}{3}$ зводиться рівняння

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0,$$

має вигляд

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad (**)$$

Учень Кардано Л.Феррарі (1522-1565) згодом знайшов спосіб розв'язування алгебраїчних рівнянь 4-го степеня і показав, що воно теж розв'язується в радикалах. Ці результати мали велике значення для дальшого розвитку алгебри і всієї математики. Постало питання про розв'язання в радикалах алгебраїчних рівнянь степеня $n>4$, про оперування з числами нової природи – комплексними. Уже Тарталья і Кардано помітили, що рівняння (*) має три дійсних корені всякий раз, коли $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ (так званий незвідний випадок). Так, рівняння $x^3-x=0$ має три корені : –1; 0; 1 і для нього вказаний вираз дорівнює $-\frac{1}{27}<0$.

Всі спроби звільнити формулу (**) від операції добування квадратного кореня з від'ємного числа не приносили успіху. Так внутрішні потреби самої математики привели до розширення поняття числа, до введення комплексних чисел, які породили грандіозний розділ математики – комплексний аналіз, що має найрізноманітніші застосування як у математиці, так і в інших науках.

Проблему розв'язання алгебраїчних рівнянь у радикалах подолали наступні покоління видатних математиків: італієць Паоло Руффіні (1765-1822), норвежець Нільс Хенрік Абель (1802-1829), француз Еварист Галуа (1811-1832). Е.Галуа по праву вважається основоположником сучасної алгебри. Він створив сучасну теорію груп, яка істотно вплинула не лише на розвиток алгебри, а й усієї математики XIX-XX ст. Сам Галуа знайшов необхідну й достатню умову розв'язності алгебраїчного рівняння степеня n у радикалах, ввівши так звану групу Галуа. З неї, наприклад, випливає, що рівняння $x^5-4x+2=0$ має 5 різних коренів, але їх не можна виразити в радикалах.

Детальніше про цю алгебраїчну епопею можна ознайомитись в книгах [4- 8].

4. Велика теорема Ферма. П'єр Ферма (1601-1665) – один з великих математиків XVII ст. Він заклав основи аналітичної геометрії (незалежно від Декарта), знайшов загальний метод відшукання екстремумів функції $f(x)$. Але найбільш відомими є його результати в області теорії чисел. Зокрема, до кінця XX ст. математики всього світу шукали доведення так званої Великої теореми Ферма, яка стверджувала, що не існує натуральних чисел x, y, z для яких виконується рівність

$$x^n+y^n=z^n \ (1) \quad \text{при} \quad n>2, \quad n\in N.$$

Сам Ферма довів цей факт для $n=4$. Це єдине доведення за допомогою елементарних засобів. На полях «Арифметики» Діофанта Ферма написав, що знайшов воістину чудове доведення цієї теореми, але поля книги надто малі, щоб його вмістити. Відтоді не лише професійні математики, але і любителі почали шукати доведення цієї теореми. Інтерес до неї підсилився, коли в 1908 р. німецький любитель математики Пауль Вольфскель заповів 100000 марок тому, хто доведе теорему Ферма. Негайно тисячі людей стали бомбардувати наукові журнали і товариства своїми рукописами з «доведенням» теореми Ферма.

Прослідкуємо основні етапи штурму Великої теореми Ферма. В 1856 р. Грюнерт відзначив, що натуральні x, y, z розв'язки (1), якщо такі існують, повинні задовольняти нерівності $x>n, y>n, z>n$. Тому шукати контрприклади на цю теорему – справа безнадійна. Елементарного її доведення не існує для $n>2,$ за винятком $n=4$. Для $n=3$ теорему Ферма довів Л.Ейлер в 1768 р. Для $n=5$ майже одночасно запропонували свої доведення в 1825 р. Л.Діріхле і А.Лежандр. Для $n=7$ теорема Ферма була доведена в 1839 р. Г.Ламе.

Німецький математик Е.Куммер (1810-1893) за допомогою створеної ним теорії алгебраїчних чисел довів теорему Ферма для всіх $n<100$. За це доведення він отримав Великий приз Паризької Академії наук в 1857 р. В 1929 р. Вандівером було доведено справедливість теореми Ферма для всіх $n<100000$.

Кінець XX ст. ознаменувався сенсаційним повідомленням про доведення Великої теореми Ферма англійським 42-річним математиком Ендрю Уайлсом, який у вересні 1994 р. представив її бездоганне доведення. Так завершилась 350-річна історія доведення Великої теореми.

Спроби доведення Великої теореми Ферма збагатили математику новими ідеями, методами, теоріями, при спробах її доведення були знайдені потужні математичні засоби, які привели до створення обширної теорії алгебраїчних чисел. В цьому і полягає її непересічне значення.

Цікаво відзначити, що рівняння $x^n+y^n=z^{n+1}$ для довільного $n\in N$ має натуральні розв'язки, наприклад, $x=y=z=2$. А рівняння $x^n+y^n=z^{n-1}$ має натуральні розв'язки $x=y=2^{n-2}$, $z=2^{n-1}$ при $n\geq 2$.

Більш детально з історією доведення Великої теореми Ферма можна ознайомитись у книзі [1].

5. Задача про дотичну. Математики XV-XVII ст. буквально штурмували задачу про побудову дотичної до заданої кривої в довільній її точці. Ця задача тісно пов'язана з вивченням рухів і відшуканням екстремумів функцій.

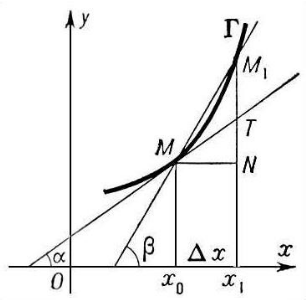
Уже в «Началах» Евкліда викладений спосіб побудови дотичної до кола. Архімед побудував дотичну до спіралі, що носить його ім'я (в сучасних позначеннях це лінія, рівняння якої в полярних координатах $\rho=a\varphi$, $a=const$). Аполлоній побудував дотичні до еліпса, гіперболи і параболи. Але давньогрецькі вчені не знайшли загального методу побудови дотичної до довільної кривої в довільній її точці.

З початку XVII ст. ряд вчених, таких як Е.Торрічеллі, В.Вівіані, Ж.Роберваль, І.Барроу намагались розв'язати цю задачу за допомогою кінематичних міркувань. Перший загальний спосіб побудови дотичної до алгебраїчної кривої дав Р.Декарт у своїй «Геометрії» (1637 р.). З листування Декарта з іншими вченими ми дізнаємося про побудову дотичної до циклоїди та її різновидів. Циклоїду вивчали Галілей, Торрічеллі, Гюйгенс, Паскаль. Сама циклоїда та її різновиди мають важливе значення в техніці. Профілі зубів шестерень, обриси багатьох ексцентриків, кулачків та інших деталей машин мають форму саме таких ліній. Але і наукове значення цих кривих є достатнім. Вони стали прямо таки полігонами, на яких випробувалися нові математичні ідеї XVII ст., які оформилися в диференціальне та інтегральне числення. Багато цікавих фактів про циклоїду та її різновиди (епіциклоїди, гіпоциклоїди) можна знайти в популярній брошурі Г.М.Бермана «Циклоїда» [3].

Кінець XVI ст. і початок XVII ст. насичені роботами про дотичні, нормалі та екстремуми. Так, у 1638 р. стала відомою праця Ферма «Метод відшукання найбільших і найменших значень» (опублікована після його смерті у 1679 р.), у якій Ферма фактично здійснив операцію диференціювання і застосував її до побудови дотичних до кривих.

В 1684 р. Лейбніц опублікував «Новий метод максимумів і мінімумів, а також дотичних, для якого не є перепоною дробові та ірраціональні кількості, і особливий для цього вид числення». Стаття мала обсяг лише 6 сторінок, на яких гранично стисло викладено числення нескінченно малих, зокрема правила диференціювання.

Якщо в «Методі флюксій» Ньютона (1671р., опубліковано після смерті Ньютона в 1736 р.) первісним поняттям є швидкість, то в «Новому методі …» Лейбніца таким поняттям є дотична.



Мал. 2

Задача про дотичну до кривої формулюється так. Нехай $y = f(x)$ є рівнянням кривої Γ і треба побудувати дотичну до неї в точці $M(x; y)$. Для цього, очевидно, досить знайти нахил дотичної до осі Ox, тобто кут α, який вона утворює з додатним напрямком осі Ox (мал. 2). Розглянемо іншу точку M_1 на кривій Γ, досить близьку до M. Проведемо січну MM_1, що утворює кут β з додатним напрямком осі Ox. Якщо $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y)$, де $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$, то з ΔNMM_1 маємо

$$tg\beta = \frac{NM_1}{NM} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Якщо точка M_1 по кривій Γ прямує до точки M то січна MM_1, обертаючись навколо M, наближається до деякої прямої MT, яку, за означенням, і називають дотичною до Γ в точці M. При цьому кут β прямує до кута α:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В цій роботі Лейбніца з'явився так званий характеристичний трикутник ΔNMT, у якого

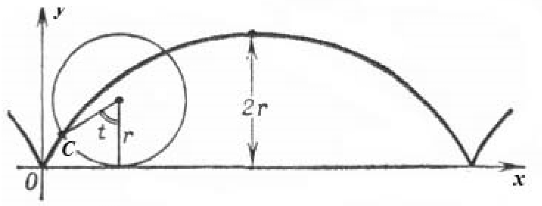
$$NT = \Delta x \cdot tg\alpha = df(x).$$

Так було зроблене відкриття диференціального та інтегрального числення,що знайшло своє основне завершення у працях Ньютона та Лейбніца і яке нині розрослося в грандіозний розділ математики під назвою математичний аналіз.

6. Задача про брахістохрону. У 1696 р. голландський математик Йоганн Бернуллі (1667-1748) запропонував задачу, у якій треба було знайти таку траєкторію, що сполучає точки A і B, рухаючись по якій під дією сили тяжіння матеріальна точка M пройде шлях від вищої точки A до нижчої точки B за найменший час. При цьому тертям і опором середовища знехтувати. Ця задача отримала назву задачі про брахістохрону (про лінію найшвидшого спуску). Назва походить від грецького «брахистос» – найкоротший і «хронос» – час. Різними способами її розв'язали Йоганн і Якоб Бернуллі, Лейбніц, Лопіталь і Ньютон. Розв'язання Ньютона не було підписане, але Йоганн відразу здогадався, що це Ньютон і сказав при цьому: «По кігтях узнаю лева». Сам Ньютон одного разу сказав, що розв'язання цієї задачі зайняло 12 годин безперервного міркування. П'ять розв'язків цієї задачі відіграли велику роль у створенні і розвитку нового розділу математики, що дістав назву варіаційного числення. А задача про брахістохрону стала першою серйозною задачею цього числення.

Довгий час вважали, що точка M повинна рухатись по прямій AB, що є найкоротшим шляхом між цими точками. Але після відкриття Галілеєм законів падіння тіл та їх руху по похилій площині під дією лише сили тяжіння стало ясно, що лінія найкоротшого шляху не є лінією найменшого часу і що розв'язком задачі має бути крива. Цю криву і знайшли вказані вчені, нею виявилась так звана циклоїда (мал. 3). Це лінія, яку описує довільна фіксована точка C кола радіуса r, що котиться без ковзання по горизонтальній прямій. Її параметричні рівняння

$$x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t),\ t \in R.$$



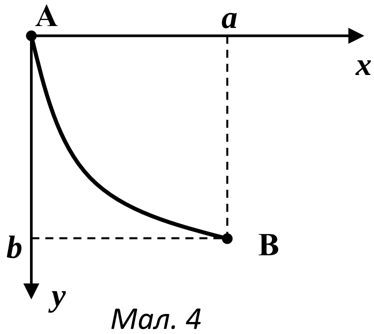
Мал. 3

Якщо $0 \le t \le 2\pi$, то отримаємо одну дугу (арку) циклоїди.

Розв'яжемо задачу про брахістохрону сучасними методами варіаційного числення.

Нехай $y = y(x)$ – шукана крива, тоді швидкість $\frac{dl}{dt}$, де l – довжина дуги кривої, дорівнює $\sqrt{2gy}$. Тут y є висота падіння. Маємо рівняння

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{2gy}\text{, звідки } t = \int_0^a \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}dx \quad (1)$$



Мал. 4

Таким чином, задача про брахістохрону формулюється так: серед усіх неперервно диференційовних функцій $y(x)$, для яких $y(0) = 0$, $y(a) = b$ (мал.4), знайти таку, щоб інтеграл (1) був найменшим. У цій задачі, на відміну від класичних задач на екстремум функції $y(x)$, величина інтеграла (1) залежить не від одного або декількох чисел, а від поведінки функції $y(x)$ на відрізку $[0;a]$. Інтеграл (1) називають функціоналом і позначають $I(y)$.

Л.Ейлер знайшов, що необхідною умовою екстремуму функціонала $I(y)$ виду

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx \quad (2)$$

де функція $F(x, y, y')$ тричі диференційовна, є те, що функція $y(x)$ повинна бути розв'язком диференційного рівняння

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$$

або, в розгорнутому вигляді

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0 \quad (3)$$

Інтегральні криві рівняння Ейлера (3) називаються екстремалями. Лише на них може досягати екстремуму функціонал (2). Достатні умови екстремуму функціоналу (2) на екстремалі досить складні і тут не розглядаються, з ними можна ознайомитися по книзі [14, с. 351-374]. Зауважимо, що для функціоналу (1) вони виконані. Тут

$$F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}$$

і для нього рівняння (3) має вигляд

$$F_y - y' \cdot F_{yy'} - y'' \cdot F_{y'y'} = 0, \quad (4)$$

оскільки F не залежить від x.

Порядок рівняння (4) можна знизити і отримати перший інтеграл у вигляді

$$F - y' \cdot F_{y'} = C_1. \tag{5}$$

Для функціоналу (1) маємо рівняння (5) у вигляді

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y(1+(y')^2)}} = C_1,$$

звідки після спрощень $y(1+(y')^2) = C$. Введемо параметр t за формулою $y' = ctg\ t$. Тоді

$$y = \frac{C}{1+ctg^2 t} = \frac{C}{2}(1-\cos 2t),$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = C(1-\cos 2t)dt,\ x = \frac{C}{2}(2t - \sin 2t) + C_2.$$

З умови $y(0)=0$ знаходимо, що $C_2 = 0$ і рівняння брахістохрони приймає вигляд

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}C(2t - \sin 2t) \\ y = \frac{1}{2}C(1-\cos 2t), \end{cases}$$

або, позначивши $2t$ через t, а $\frac{C}{2}$ через C, будемо мати

$$\begin{cases} x = C(t - \sin t) \\ y = C(1-\cos t), \end{cases}$$

де стала C знаходиться з умови $y(a) = b$.

Так для $a = \pi, b = 2$ маємо

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Час T скочування матеріальної точки M з точки $A(0;0)$ у точку $B(\pi;2)$ дорівнює

$$T = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\mathrm{ctg}^2 \frac{t}{2}}{1-\cos t}}\, (1-\cos t)dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{2g}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}},$$

оскільки $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \mathrm{ctg}\frac{t}{2}$.

Якщо взяти пряму $y = \frac{2x}{\pi}$, що сполучає точки $A(0;0)$ і $B(\pi;2)$, то час t дорівнює

$$t = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\frac{4}{\pi^2}}{2g \cdot \frac{2x}{\pi}}}\, dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{4+\pi^2}{4\pi g x}}\, dx = \frac{\sqrt{4+\pi^2}}{2\sqrt{\pi g}} \int_0^{\pi} x^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\frac{4+\pi^2}{g}}.$$

Очевидно, $\sqrt{\frac{4+\pi^2}{g}} > \frac{\pi}{\sqrt{g}}$.

7. П’ятий постулат. У знаменитих «Началах» Евкліда (бл. 300 р. до н.е.) сформульовані кілька постулатів і аксіом геометрії, з яких виведені майже всі відомі тоді теореми. І хоча згодом з’ясувалось, що цих аксіом і постулатів недосить для побудови геометрії, значення «Начал» від цього не зменшується. Це був зразок дедуктивного викладу науки, по «Началах» Евкліда весь цивілізований світ вивчав геометрію.

Постулати Евкліда звучать так.

Потрібно:

1) щоб від кожної точки і до кожної точки можна було провести пряму;
2) і щоб обмежену пряму можна було неперервно продовжити по прямій;
3) і щоб з довільного центра довільним радіусом можна було провести коло;
4) і щоб усі прямі кути були рівні між собою;
5) і щоб, коли пряма, перетинаючи дві прямі, утворює внутрішні односторонні кути, сума яких менше двох прямих кутів, то ці прямі при продовженні перетиналися в точці, яка лежить з тієї сторони, де розміщені ці кути.

Відразу кидається в очі різка відмінність п'ятого постулату від інших. Якщо перші чотири постулати формулюються коротко і мають простий зміст, то останній і фразеологічно громіздкий і ненаочний. Пізніше його замінили так званою аксіомою паралельних: через точку, що не лежить на даній прямій, у площині, що містить ці точку і пряму, проходить лише одна пряма, паралельна даній, тобто така, що не перетинає її. Але і таке формулювання менш наочне, ніж решта постулатів та аксіом Евкліда. За аксіоми Евклід приймає такі твердження:

1) рівні одному і тому ж рівні;
2) і якщо до рівних добавити рівні, то отримаємо рівні;
3) і якщо від рівних відняти рівні, то отримаємо рівні;
4) суміщувані одне з одним рівні одне одному.

У зв'язку з цим виникло питання: чи не є п'ятий постулат теоремою, яку Евклід не зміг довести, а тому включив у список аксіом (сучасна математика не розрізняє постулати і аксіоми, вважає постулати також аксіомами). Проте всі спроби довести 5-ий постулат виявилися марними. В усіх таких доведеннях виявлялась або помилка, або цей постулат замінювався іншою аксіомою, еквівалентною йому. Так, давньогрецький вчений Посідоній (І ст. до нової ери) у своєму доведенні 5-го постулату спирався на твердження, що множина усіх точок, які знаходяться від даної прямої на даній відстані, є пряма. Давньогрецький вчений Прокл (V ст. нової ери) виходив з того, що якщо дві прямі паралельні, то віддаль між ними обмежена. Персидський поет і вчений Омар Хайям (XI-XII ст. нової ери) у своїх міркуваннях вважав, що коли дві прямі зближуються, то вони не можуть з деякого моменту розходитись.

До початку XIX ст. було відкрито десятки еквівалентів 5-го постулату. Ось деякі з них:

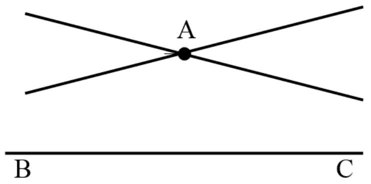
1) існує опуклий чотирикутник, у якого всі кути прямі (А.Клеро, XVIII ст.);
2) існує трикутник, подібний, але не рівний, іншому трикутнику (Д.Саккері, XVIII ст.);
3) існує трикутник, у якого сума кутів не менша за 180^0 (А.Лежандр, XIX ст.);
4) через точку, що лежить всередині гострого кута, можна провести пряму, яка перетинає обидві його сторони (А.Лежандр, XIX ст.).

У 1823 р. у листі до свого сина угорський математик Фаркаш Больяй (1775—1856) писав: «Ця безпросвітна темрява може поглинути тисячу таких гігантів, як Ньютон,… і ніколи на землі не проясниться». Проте прояснення наступило і досить швидко. Майже одночасно до ідеї геометрії, відмінної від Евклідової, прийшли відомий німецький математик Карл Гаусс (1777-1855), а також невідомі на той час угорський математик Янош Больяй (1802-1860) і російський математик Микола Іванович Лобачевський (1792-1856). У всіх трьох був один і той же підхід: вони замінили 5-ий постулат його запереченням і намагалися рано чи пізно прийти до суперечності. Але бажана суперечність не наступала і вони все більше схилялись до думки, що логічно несуперечлива геометрія можлива і в результаті такої заміни 5-го постулату. Далі всіх у цьому напрямку дійшов М.І.Лобачевський, який 23 лютого 1826 р. на засіданні фізикоматематичного відділення Казанського університету вперше розповів колегам про свою уявну геометрію, а згодом, у 1829 р., опублікував свої результати «О началах геометрии» (рос.) у журналі «Казанский вестник». Через три роки, у 1832 р., вийшла в світ присвячена цьому ж питанню робота молодого Яноша Больяй.

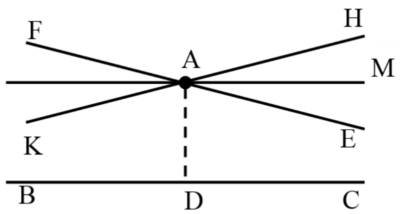
З драматичною історією відкриття і розвитку неевклідової геометрії можна познайомитися по книзі [9].

Деякі факти геометрії Лобачевського. Геометрія Лобачевського є множиною аксіом так званої абсолютної геометрії, аксіоми Лобачевського та їх логічних наслідків. Під абсолютною геометрією розуміють всі її аксіоми без аксіоми паралельних та їх логічні наслідки.

Аксіома Лобачевського. Якщо точка A не лежить на прямій BC, то у площині ABC існує принаймні дві прямі, що проходять через точку A і не перетинають прямої BC (мал. 5a).



Мал. 5а



Мал. 5б

Оскільки в геометрію Лобачевського входять усі аксіоми абсолютної геометрії, то всі її наслідки також є теоремами геометрії Лобачевського. Так що геометрія Лобачевського відрізняється від геометрії Евкліда лише тими твердженнями, які випливають з аксіоми Лобачевського. А відмінності між цими геометріями виявилися дуже істотними. Перш за всі, якщо прямі, що проходять через точку A, розбити на два класи: клас прямих, що перетинають BC і клас прямих, які не перетинають BC, то виявиться, що існує безліч прямих, які проходять через точку A і не перетинають пряму BC, всі такі прямі проходять всередині вертикальних кутів HAE і FAK (мал. 5б). Граничні прямі, що відрізняють один клас від другого, називаються паралельними BC. Так, пряма $AK \parallel BC$ у напрямі від C до B, а пряма $AE \parallel BC$ у напрямі від B до C. Решта прямих, наприклад, AK називаються розбіжними з прямою BC. Названі прямі допускають більш строге означення, з якого випливають їх незвичайні властивості.

Оскільки аксіома Лобачевського суперечить 5-му постулату, то довільне твердження, еквівалентне йому, не має місця в геометрії Лобачевського. Наприклад:

1. Не кожні перпендикуляр і похила до однієї і тієї ж прямої, що лежать в одній площині, перетинаються.
2. Відстані від точок однієї з двох прямих, що лежать в одній площині і не перетинаються, до точок другої необмежені.
3. Не існує подібних, але не конгруентних між собою трикутників.
4. Не через кожні три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести коло.
5. Сума внутрішніх кутів довільного трикутника менша від двох прямих кутів.
6. Сума внутрішніх кутів трикутника не є сталою для всіх трикутників.
7. Сторона правильного шестикутника більша від радіуса описаного навколо нього кола.

8. Якщо три кути одного трикутника відповідно конгруентні трьом кутам другого трикутника, то такі трикутники конгруентні (тобто рівні).
9. У геометрії Лобачевського існує абсолютна одиниця довжини відрізків.
10. У геометрії Лобачевського площа S трикутника залежить від суми його внутрішніх кутів:

$$S = r^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma),$$

де r – довжина деякого фіксованого відрізка, яку тепер називають радіусом кривини площини Лобачевського.

З цієї формули випливає, що площа трикутника максимальна при $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Трикутник з нульовими кутами називається асимптотичним. Всі три його вершини нескінченно віддалені одна від одної. Площі інших «звичайних» трикутників менші πr^2, причому «звичайного» трикутника з площею πr^2 не існує.

Тут наведені лише кілька дивовижних фактів геометрії Лобачевського. Більш детальний і строгий її виклад можна знайти в книзі [10].

Кардинальним питанням кожної аксіоматичної теорії є питання про її несуперечливість. М.І.Лобачевський не дав доведення несуперечливості своєї геометрії. Вперше це зробили італійський математик Е.Бельтрамі (1868) і німецький математик Ф.Клейн (1870). Вони встановили, що планіметрія Лобачевського несуперечлива, якщо несуперечлива планіметрія Евкліда.

Відкриття Лобачевського має колосальне значення для математики. Воно дало нове розуміння аксіоматичного методу і змусило критично проаналізувати аксіоматичну базу евклідової геометрії. З'явилися сучасні аксіоматики евклідової геометрії: М.Паша (1843-1930), Д.Гільберта (1862-1943), В.Ф.Кагана (1869-1953), Г.Вейля (1885-1955).

До Лобачевського геометрія Евкліда вважалася єдино можливим вченням про простір. Питання про те, яка геометрія краще описує властивості реального простору, може бути розв'язане лише експериментально. Поява геометрії Лобачевського мала важливе значення для розвитку філософської думки XIX ст. В той час поширеним було уявлення І.Канта (1724-1804) про те, що простір є лише формою нашого сприймання, а не формою існування матерії. Лобачевський був впевнений, що його геометрія знайде застосування в інших розділах математики. Зокрема, за її допомогою він обчислив близько 200 визначених інтегралів, які тодішніми методами не вдалося обчислити.

Геометрія Лобачевського стала поворотним пунктом від оперування наочними образами геометрії Евкліда до сучасної геометрії узагальнених просторів. Ідеї геометрії Лобачевського сприяли формуванню уявлень про обґрунтування математики, до створення таких її розділів як теорія множин і математична логіка. Гіпотеза Лобачевського про можливість неевклідовості реального простору знайшла своє втілення в створеній А.Ейнштейном (1879-1955) теорії відносності.

Про інші застосування геометрії Лобачевського можна дізнатися з книги [11].

8. Задача про суму розбіжного ряду. В XIX ст. серед математиків виникла дискусія про суму ряду. Приводом був ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots,$$

який отримується з розкладу

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots,$$

вірного в інтервалі $(-1;\ 1)$, при $x = 1$. Йому приписували суму $\frac{1}{2}$, мотивуючи це тим, що частинні суми приймають по черзі значення 1 і 0, так що в середньому маємо $\frac{1}{2}$. Ще більш екзотичним був ряд $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$,
збіжний в інтервалі $(-1;\ 1)$, з якого при $x = 2$ маємо неможливу рівність

$$-1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n + \cdots.$$

Л.Ейлер першим зрозумів, що треба питати «не чому дорівнює сума розбіжного ряду?», а «як визначити розумно «суму розбіжного ряду?» Так з'явилось узагальнення суми ряду – метод середніх арифметичних, придатне для деякого класу розбіжних рядів. З часом таких узагальнень з'явилось багато: середні Ріса, Вороного-Нерлунда, Абеля-Пуассона, Чезаро та інші. Виникла ціла галузь математики – теорія підсумовування розбіжних рядів і послідовностей. Монографія Г.Харді «Розбіжні ряди» підвела підсумок класичного періоду розвитку цієї теорії. Монографія А.Зигмунда «Тригонометричні ряди» у двох томах містить найважливіші результати теорії підсумовування, отримані у XX ст. [13; 14]. Методами цієї теорії отримані важливі результати в теорії рядів Фур'є: теореми Пуассона-Абеля і Чезаро-Фейєра [15, с. 599-611]. Вони дозволяють відновити функцію за її рядом Фур'є, навіть, якщо цей ряд розбіжний на деякій множині точок!

Метод Абеля-Пуассона підсумовування рядів полягає в побудові для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Якщо цей ряд збіжний у проміжку $(0;\ 1)$ і його сума $f(x)$ у цьому проміжку має границю S при $x \to 1 - 0$, то число S називають узагальненою сумою ряду і пишуть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S\ \ (\text{А} - \text{П})$.

Для ряду $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots$ степеневий ряд $f(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}$ збіжний на $(-1;\ 1)$, причому його сума $\frac{1}{1+x} \ \to \frac{1}{2}(x \to 1 - 0)$. Тому число $\frac{1}{2}$ є узагальненою сумою ряду $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$.

Монографія Р.Кука «Бесконечные матрицы и пространства последовательностей» [17] дає систематичний сучасний виклад загальної теорії підсумовування. Так завершилась у XX ст. дискусія про суму розбіжного ряду.

Висновки. На нашу думку, аналіз задач, які відіграли значну роль у розвитку математики, пошуків та шляхів їх розв'язання видатними математиками, а також сучасних методів їх розв'язання зацікавлюють студентів, формують їх науковий світогляд, критичне мислення та поглиблюють знання з різних галузей математики.

Список використаних джерел

1. Постников М.М. Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: Наука, 1982. – 240 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 420 с.
3. Берман Г.Н. Циклоида. – М.: Гостехиздат, 1954. – 116 с.
4. Конфорович А.Г. Колумби математики. – К.: Радянська школа, 1982. – 223 с.
5. Кованцов Н.И. Математика и романтика. – К.: Вища школа, 1980. – 133 с.
6. Гутер Р.С., Полунов Ю.Л. Джироламо Кардано. – М.: Знание, 1980. – 192 с.
7. Инфельд Л. Эварист Галуа. – М.: Молодая гвардия, 1960. – 366 с.
8. Артін Е. Теорія Галуа. – К.: Радянська школа, 1963. – 99 с.
9. Ливанова А.М. Три судьбы – М.: Молодая гвардия, 1959. – 172 с.
10. Костин В.И. Основания геометрии. – М.: Учпедгиз, 1948. – 304 с.

11. Кадомцев С.Б. Геометрия Лобачевского и физика. – М.: Знание, 1984. – 64 с.
12. Михелович Ш.Х. Теория чисел. – М.: Высшая школа, 1967. – 335 с.
13. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т.1 – М.: Мир, 1965. – 615 с.
14. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т.2 – М.: Мир, 1965. – 537 с.
15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.3 – М.: Наука, 1963. – 656 с.
16. Харди Г. Расходящиеся ряды. – М.: ИЛ, 1951. – 504 с.
17. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: ФМ, 1960. – 471 с.

Анотація. Розуменко А.О., Власенко В.Ф., Розуменко А.М. Знамениті задачі математики

У статті розглянуто проблему підвищення пізнавальної мотивації студентів у процесі навчання математики та використання елементів історизму як одного із шляхів вирішення цієї проблеми. Наведено приклади задач, які відіграли значну роль у розвитку математики. Це три визначні задачі Стародавньої Греції (про квадратуру круга, трисекцію кута, подвоєння куба); задача про розподіл простих чисел у натуральному ряді; задача про розв'язання алгебраїчних рівнянь у радикалах; задача про дотичну; задача про брахістохрону; задача про суму розбіжного ряду. Зроблено історичний та логічний аналіз пошуку шляхів їх розв'язання видатними вченими різних часів. Наведено один із сучасний способів розв'язання розглянутих задач.

Зроблено огляд пошуків доведення великої теореми Ферма.

Розкрито суть проблеми п'ятого постулату Евкліда. Сформульовано аксіому паралельності Лобачевського та деякі наслідки з неї. Наведено декілька фактів геометрії Лобачевського, що демонструють її відмінність від геометрії Евкліда. Зроблено висновок про значення ідеї Лобачевського у вирішенні проблем обґрунтування геометрії.

Ключові слова: *історія математики; знамениті задачі; способи розв'язання; пізнавальна мотивація.*

Аннотация. Розуменко А.О., Власенко В.Ф., Розуменко А.М. Знаменитые задачи математики

В статье рассмотрена проблема повышения познавательной мотивации студентов в процессе обучения математике и использование элементов историзма как одного из путей решения этой проблемы. Приведены примеры задач, которые сыграли значительную роль в развитии математики. Это три знаменитые задачи Древней Греции (про квадратуру круга, трисекцию угла, удвоение куба); задача о распределении простых чисел в натуральном ряду; задача о решении алгебраических задач в радикалах; задача о касательной; задача о брахистохроне; задача о сумме расходящегося ряда. Сделан исторический и логический анализ поиска путей их решения выдающимися учеными разных времен. Приведен один из современных способов решения рассмотренных задач.

Сделан обзор поисков доказательства великой теоремы Ферма.

Раскрыта суть проблемы пятого постулата Эвклида. Сформулирована аксиома параллельности Лобачевского и некоторые следствия из нее. Приведено несколько фактов геометрии Лобачевского, которые демонстрируют ее отличие от геометрии Эвклида. Сделан вывод о значении идеи Лобачевского в решении проблемы обоснования геометрии.

Ключевые слова: *история математики; знаменитые задачи; способы решения; познавательная мотивация.*

Abstract. Rozumenko A., Vlasenko V., Rozumenko A. Famous applications of mathematics.

The article considers the problem of improving the cognitive motivation of students in the teaching of mathematics and the use of elements of historicism as one of the solutions to this problem. Examples of tasks which have played a significant role in the development of mathematics. These are three well-known problem of Ancient Greece (about the squaring of the circle, the trisection of the angle, the doubling cube); The problem of the distribution of prime numbers in the natural numbers; The problem of solving algebraic problems by radicals; The problem of the tangent; The problem of brachistochrone; the problem of the sum of a divergent series. It is a historical and logical analysis to find ways of solving outstanding scientists of different times. Here is one of the modern ways of solving the problems under consideration.

A review of the evidence search for Fermat's last theorem.

The essence of the problem of the fifth postulate of Euclid. Lobachevsky parallel axiom is formulated and some consequences of it. Are a few facts hyperbolic geometry that demonstrate its difference from Euclidean geometry. The conclusion is made about the value of ideas of Lobachevskiy in solving study geometry.

Key words: *history of mathematics; famous problem; ways to solve; cognitive motivation*