Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Кліндухова В.М. Інтегративний характер задач умовної оптимізації та його роль у курсі вищої математики студентів морських спеціальностей // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2016. – Випуск 3(9). – С. 49-60.

Klindukhova V. The Integrative Nature Of The Task Of Conditional Optimization And Their Role In The Course Of Higher Mathematics Of Students Of Marine Specialties // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2016. – Issue 3(9). – P. 49-60.

УДК 519.6:656.6.052.4

В.М. Кліндухова
Київська державна академія водного транспорту
імені гетьмана П. Конашевича-Сагайдачного, Україна

ІНТЕГРАТИВНИЙ ХАРАКТЕР ЗАДАЧ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ЙОГО РОЛЬ У КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТІВ МОРСЬКИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Сьогодення спонукає викладачів сконцентрувати свою увагу не лише на теоретичній, а і на продуктивно-практичній підготовці студентів. Тому наразі досить важливого значення набуває ідея формування у студентів умінь орієнтуватися в наявних інтегративних зв'язках між окремими математичними розділами та темами.

Сформованість у студентів морської галузі умінь та навичок інтегративної навчальної діяльності не лише сприяє підвищенню рівня математичної підготовки, а і є вдалою моделлю для подальшого формування елементів інтегративної професійної діяльності, на важливості якої неодноразово наголошували сучасні фахівці. Зокрема вдосконаленню професійної підготовки плавскладу для морського та річкового транспорту приділена увага у роботах таких фахівців як В. Давидов, Л. Герганов, Ю. Якусевич та інші. Окремі питання удосконалення математичної підготовки майбутніх фахівців морської та річкової галузі розроблялися Ю. Величком, О. Грігор'євою, Т. Джежуль, О. Доброштан, О. Гудиревою, В. Кліндуховою, О. Ляшко. Інтегративній складовій математичних задач, а також загалом задачам інтегративного характеру присвятили свої роботи Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я.

Мета даної статті: на базі традиційного математичного матеріалу навести декілька конкретних задач інтегративного характеру. У статті мова піде про класичні задачі умовної оптимізації. Вони є вдалим прикладом інтегративних задач. Подібні задачі можна зустріти майже у всіх підручниках з вищої математики однак, на нашу думку, слід більше уваги приділяти певним особливостям їх розв'язування, а також яскравіше використовувати їх можливості зокрема і інтегративного характеру.

Загальновідомо, що праця фахівців морської галузі є небезпечною, стресогенною та відповідальною. У зв'язку із стрімким технічним та технологічним розвитком, а також тенденцією до скорочення численності членів екіпажу, інтелектуальне навантаження на плавсклад збільшується, відповідальність зростає, потенційні професійні обов'язки розширюються і інтегруються із суміжними спеціальностями. За проведеними дослідженнями від 60% до 80% аварій фахівці пов'язують із людським фактором (зовнішнім суб'єктивним фактором). Мова йде про необґрунтовані та нескоординовані дії суднового екіпажу, некомпетентність, халатність, емоційну нестійкість, тощо. В основі відповідної низки помилок спеціалістів морської галузі лежить низький рівень сформованості інтегративної професійної та навчальної діяльності [2], [7]. Навички злагодженої та стійкої інтегративної професійної діяльності формуються у студентів морських спеціальностей засобами навчальної інтегративної діяльності, зокрема, і під час вивчення математичних дисциплін на молодших та старших курсах.

Інтегративна лінія у курсі математичних дисциплін вищих морських навчальних закладів має знаходити і поступово знаходить певну реалізацію під час розв'язування студентами навчальних математичних задач інтегративного змісту. Описове означення задач інтегративного змісту наводять у своїх роботах Кушнір В.А. та Ріжняк Р.Я. [6], [4], [5]. Зокрема, вони вказують, що це задачі творчого характеру, задачі з потужним математичним змістом та складною структурою взаємозв'язків між компонентами їх фабули. Інтегративні задачі мають потенціал для створення на їх базі нових задач та серій задач. Розв'язування таких задач потребує глибоких знань та винахідливості. Студентами використовуються не лише знання з певної теми, а й виникає необхідність проведення систематизації та узагальнення здобутих знань з різних розділів (а то й з інших навчальних дисциплін). Це, з однієї сторони, вимагає сформованості у суб'єктів навчання певного рівня математичної та інформаційної культурі, а з іншої – сприяє їх подальшому розвитку. Практична реалізація процесу «вбудовування» задач інтегративного змісту у навчальну математичну діяльність студентів потребує певної деталізації. Потрібні «вдалі» задачі. По-перше, вони мають утілювати у собі саму ідею інтегративності. По-друге, їх розв'язування не має вимагати знань і умінь, котрі виходять за межі навчальних програм або необхідні знання доповнюються програмами студентських гуртків, факультативів, спецкурсів, ІКТ. Саме прикладам таких задач, а також їх розв'язанню присвячують свої роботи Кушнір В.А. та Ріжняк Р.Я. [6], [4], [5].

У контексті обговорення інтегративних задач, особливої уваги на наш погляд заслуговують класичні задачі умовної оптимізації. Вони є невід'ємною складовою традиційного курсу вищої математики, а також деяких спеціальних математичних дисциплін, які вивчаються на старших курсах студентами морських спеціальностей.

Коротко нагадаємо основні твердження на яких ґрунтується розв'язування нижче наведених задач.

Задачі умовної оптимізації для функції n змінних з m умовами зв'язку мають вигляд $(m<n)$:

$$u=u(x_1;x_2;\ldots;x_n)\to extr\ ,\quad \varphi_i(x_1;x_2;\ldots;x_n)=0\ ,\quad i=1,2,\ldots,m\,.$$

Їх можна розв'язувати різними методами. Зокрема, прямим методом. Цей метод можна застосовувати, якщо рівняння зв'язку $\varphi_i(x_1;x_2;\ldots;x_n)=0$ можна розв'язати відносно m змінних [3]:

$$\begin{cases} x_1=\psi_1(x_{m+1};x_{m+2};\ldots;x_n) \\ x_2=\psi_2(x_{m+1};x_{m+2};\ldots;x_n) \\ \ldots\ldots \\ x_m=\psi_m(x_{m+1};x_{m+2};\ldots;x_n) \end{cases}$$

Підставивши ці значення у цільову функцію $u=u(x_1;x_2;\ldots;x_m)$, зводимо її до задачі на безумовний екстремум однієї або декількох змінних.

Ще одним методом розв'язування є метод Лагранжа. Його сутність полягає у побудові та дослідженні функції Лагранжа $L(x_1;x_2;\ldots;x_n;\lambda_1;\lambda_2;..\lambda_m)$:

$$L(x_1;x_2;\ldots;x_n;\lambda_1;\lambda_2;..\lambda_m)=u(x_1;x_2;\ldots;x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1;x_2;\ldots;x_n)+\ldots+\lambda_m\varphi_m(x_1;x_2;\ldots;x_n)$$

де $\lambda_1;\lambda_2;..\lambda_m$ – множники Лагранжа (дійсні числа, які підлягають визначенню).

Необхідні умови умовного екстремуму функції n змінних. Нехай функції $u=u(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ та $\varphi_i(x_1;x_2;\ldots;x_n)=0$ $(i=1,2,\ldots,m)$ мають неперервні частинні похідні в околі точки $M(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$, причому ранг матриці Якобі в точці $M(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ дорівнює: m

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ & & & \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}\qquad r_A=m$$

Тоді для того щоб точка $M(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ була точкою умовного екстремуму функції $u=u(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ при умовах зв'язку $\varphi_i(x_1;x_2;\ldots;x_n)=0$ необхідно щоб її координати при деяких значеннях $\lambda_1;\lambda_2;..\lambda_m$ задовольняли наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m}=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n}=0 \\ \varphi_1(x_1;x_2;\ldots;x_n)=0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1;x_2;\ldots;x_n)=0 \end{cases}$$

<u>*Достатні умови умовного екстремуму функції n змінних.*</u> Нехай в околі точки $M(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ виконуються необхідні умови умовного екстремуму функції *n* змінних ($M(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа при деяких $\lambda_1;\lambda_2;..\lambda_m$) і існують неперервні частинні похідні другого порядку функцій $u=u(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ і $\varphi_i(x_1;x_2;\ldots;x_n)=0$, причому $d\varphi_i(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)=0$:

$$d\varphi(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1(M)}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial\varphi_1(M)}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\dfrac{\partial\varphi_1(M)}{\partial x_n}dx_n=0 \\ \dfrac{\partial\varphi_2(M)}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial\varphi_2(M)}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\dfrac{\partial\varphi_2(M)}{\partial x_n}dx_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_m(M)}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial\varphi_m(M)}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\dfrac{\partial\varphi_m(M)}{\partial x_n}dx_n=0 \end{cases}$$

Тоді якщо:

1. $d^2L(M)>0$, то $M(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ - точка умовного мінімуму функції $u(x_1;x_2;\ldots;x_n)$;
2. $d^2L(M)<0$, то $M(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ - точка умовного максимуму функції $u(x_1;x_2;\ldots;x_n)$.

У наведених нижче задачах інтегруються знання й уміння учнів із наступних розділів: елементи лінійної алгебри (матриці, визначники, квадратичні форми, розв'язування систем лінійних рівнянь), елементи аналітичної геометрії, диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних.

Усі наведені задачі розв'язані із детальними коментарями та викладками, так як певним моментам практичного характеру приділено недостатньо уваги на сторінках сучасних підручників. Зокрема, пропонується зупинитись на наступних випадках:

- *n=2, m=1* (задачі 1,2);
- *n=3, m=1* (задачі 3,4,5);
- *n=3, m=2* (задача 6).

Складніші випадки, а також підходи до розв'язування відповідних задач ми плануємо розглянути у наступних роботах.

Перша група задач охоплює випадок *n=2, m=1*. Задача 1 є прикладом задачі, яку доцільно розв'язувати двома способами: методом Лагранжа та прямим методом. Прямий спосіб розв'язування задач цієї групи дозволяє актуалізувати відповідні знання студентів по розв'язанню задач на екстремум функції однієї змінної із шкільного курсу математики та вдало інтегрувати відповідні уміння та навички.

Для задачі 2 варто використати лише один спосіб розв'язання, зокрема метод Лагранжа. Задачі умовної оптимізації для *n=2, m=1*, найчастіше зустрічаються у навчальних посібниках. Однак, на наш погляд, недостатньо уваги приділено певним особливостям їх розв'язування, зокрема моментам коли дослідження диференціала другого порядку функції Лагранжа вимагає використання умови зв'язку $d\varphi_i(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)=0$.

<u>*Задача 1.*</u> Розв'язати оптимізаційну задачу: $z=e^{xy}\to extr$ при умові що $x+y=2$.

<u>*Коментарі до розв'язання задачі*</u>**.**

Перший спосіб (метод Лагранжа)

$L=L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$,

$L=e^{xy}+\lambda(x+y-2)$

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ye^{xy} + \lambda = 0 \\ xe^{xy} + \lambda = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -ye^{xy} \\ e^{xy}(x - y) = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad e^{xy} \neq 0 \quad \begin{cases} \lambda = -ye^{xy} \\ x - y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -e \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Точка $M(1;1)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа при $\lambda = -e$.

$$d^2L(x_0; y_0) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(dy)^2,$$

$$L''_{xx} = y^2 e^{xy}; \quad L''_{xy} = L''_{yx} = e^{xy}(1 + xy); \quad L''_{yy} = x^2 e^{xy}.$$

$$d^2L = y^2 e^{xy}(dx)^2 + 2e^{xy}(1 + xy)dxdy + x^2 e^{xy}(dy)^2;$$

$$d^2L(M) = 1^2 e^1 (dx)^2 + 2e^1(1 + 1)dxdy + 1^2 e^1 (dy)^2 = e(dx)^2 + 4edxdy + e(dy)^2.$$

На даному етапі досліджень не можемо зробити висновків щодо знаку $d^2L(M)$. Скористаємось умовою зв'язку, якій за достатньою умовою умовного екстремуму функції *n* змінних задовольняють dx, dy ($d\varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0$):

$$(x + y - 2)'_x dx + (x + y - 2)'_y dy = 0$$
$$1 \cdot dx + 1 \cdot dy = 0$$
$$dx = -dy.$$

Продовжимо дослідження другого диференціала $d^2L(M)$

$$d^2L(M) = e(dx)^2 + 4edxdy + e(dy)^2 = e(-dy)^2 + 4e(-dy)dy + e(dy)^2 = e(dy)^2 - 4e(dy)^2 + e(dy)^2 = -2e(dy)^2 < 0.$$

Із цього випливає, що точка $M(1;1)$ є точкою локального максимуму функції Лагранжа, а відповідно умовним максимумом функції *z*.

$$z_{ум.\max} = z(1;1) = e^{1 \cdot 1} = e$$

Другий спосіб (прямий метод)

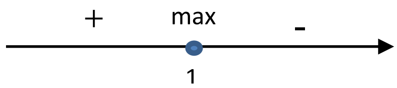
Використовуючи умову зв'язку, виразимо змінну x через y та підставимо отриманий вираз у цільову функцію:

$$\begin{cases} x = 2 - y \\ z = e^{xy} \to extr \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - y \\ z = e^{y(2-y)} \to extr \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - y \\ z = e^{2y - y^2} \to extr \end{cases}$$

Отримали задачу на знаходження екстремуму функції однієї змінної. Розв'яжемо її засобами диференціального числення функції однієї змінної:

$$z = e^{2y-y^2} \to extr$$
$$z' = e^{2y-y^2}(2 - 2y)$$
$$e^{2y-y^2}(2 - 2y) = 0$$
$$e^{2y-y^2} \neq 0; \ (2 - 2y) = 0$$
$$y = 1.$$

Таким чином задана цільова функція має стаціонарну точку с координатою $y = 1$, дослідимо її на екстремум:



Обчисливши іншу координату знайденої точки максимуму, отримуємо: $M(1;1)$.

<u>*Відповідь*</u>*:* $z_{ум.\max} = z(1;1) = e$.

<u>*Задача 2.*</u> Розв'язати екстремальну задачу: $z = xy \to extr$ при умові, що $x^2 + y^2 = 1$.

<u>*Коментарі до розв'язання задачі*</u>***.***

$$L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)\right)'_x = 0 \\ \left(xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)\right)'_y = 0 \\ \left(xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)\right)'_\lambda = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 2x\lambda = 0 \\ x + 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{y}{2x} \\ x + 2y\left(-\dfrac{y}{2x}\right) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь знаходимо стаціонарні точки функції Лагранжа:

$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ при } \lambda = -\frac{1}{2}; \quad M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ при } \lambda = -\frac{1}{2};$$

$$M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ при } \lambda = \frac{1}{2}; \quad M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ при } \lambda = \frac{1}{2} \text{ -}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$$

$$d^2L = 2\lambda(dx)^2 + 2\cdot 1\cdot dxdy + 2\lambda(dy)^2 = 2\lambda(dx)^2 + 2dxdy + 2\lambda(dy)^2$$

$$d^2L(M_1) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(dx)^2 + 2dxdy + 2\left(-\frac{1}{2}\right)(dy)^2 = -(dx)^2 + 2dxdy - (dy)^2$$

На даному етапі досліджень не можемо зробити висновків щодо знаку $d^2L(M_1)$. Скористаємось умовою зв'язку, якій задовольняють dx, dy:

$$\left(x^2 + y^2 - 1\right)'_{x(M_1)} dx + \left(x^2 + y^2 - 1\right)'_{y(M_1)} dy = 0$$

$$2xdx_{(M_1)} + 2ydy_{(M_1)} = 0$$

$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dx + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dy = 0$$

$$dx + dy = 0$$

$$dx = -dy$$

Продовжимо дослідження $d^2L(M_1)$:

$$d^2L(M_1) = -(dx)^2 + 2dxdy - (dy)^2 = -(-dy)^2 + 2(-dy)dy - (dy)^2 = -(dy)^2 - 2(dy)^2 - (dy)^2 = -4(dy)^2 < 0.$$

Таким чином $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ є точкою локального максимуму функції Лагранжа, а відповідно умовним максимумом функції *z:*

$$z_{ум.\max} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Провівши аналогічні дослідження інших стаціонарних точок, приходимо до наступних висновків:

$$z_{ум.\max} = z(M_2) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2};$$

$$z_{ум.\min} = z(M_3) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2};$$

$$z_{ум.\min} = z(M_4) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $z_{ум.\max} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$; $z_{ум.\min} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$.

Друга група задач охоплює випадок *n=3, m=1*. Задача 3 є прикладом задачі, яку доцільно розв'язувати двома способами: методом Лагранжа та прямим методом. Для задач 3 і 4 варто використати лише один спосіб розв'язання, зокрема метод Лагранжа (для задачі 4) і прямий метод (для задачі 5). Прямий спосіб розв'язування задач цієї групи дозволяє актуалізувати відповідні знання студентів по розв'язанню задач безумовної оптимізації та успішно інтегрувати їх. Нагадаємо, що мова йде про уміння студентів обчислювати визначники та аналізувати отримані результати з метою дослідження отриманих квадратичних форм, зокрема, за критерієм Сільвестра. Крім того, побудова студентами цільової функції для задачі 5, створює необхідні передумови для інтеграції відповідних відомостей із аналітичної геометрії.

Застосування методу Лагранжа під час розв'язування задач цієї групи як правило є непростим завданням у тих випадках, коли дослідження диференціала другого порядку функції Лагранжа вимагає використання умови зв'язку $d\varphi_i\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) = 0$. Такі випадки недостатньо висвітлені у навчальних посібниках. Їм ми плануємо присвятити увагу у наступних статтях. Прикладом такої задачі є задача 5. Тому для студентів доцільніше пропонувати її розв'язання прямим методом. Також варто пропонувати для студентів задачі, розв'язування яких методом Лагранжа є ні складним, ні громіздким (задачі 3,4). Для цього мають бути «вдало» підібрані цільові функції та умови зв'язку, внаслідок чого для диференціала другого порядку функції Лагранжа легко визначається.

<u>Задача 3.</u> Розв'язати оптимізаційну задачу: $u = 3x^2 + 5y^2 - z \to extr$ при умові що $x - y + z = -2$.

<u>Коментарі до розв'язання задачі</u>.

Перший спосіб (метод Лагранжа)

$L = L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z)$,

$L = 3x^2 + 5y^2 - z + \lambda(x - y + z + 2)$

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + \lambda = 0 \\ 10y - \lambda = 0 \\ -1 + \lambda = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases} \quad M\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{10}; -\frac{26}{15}\right)$$ при $\lambda = 1$ – стаціонарна точка функції Лагранжа.

$$d^2L(x_0; y_0; z_0) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + 2\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}dxdz + +2\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y}dzdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(dz)^2$$

$L''_{xx} = 6$; $L''_{xy} = 0$; $L''_{xz} = 0$;

$L''_{yx} = 0$; $L''_{yy} = 10$; $L''_{yz} = 0$;

$L''_{zx} = 0$; $L''_{zy} = 0$; $L''_{zz} = 0$:

$d^2L = d^2L(M) = 6(dx)^2 + 10(dy)^2 > 0$

$M\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{10}; -\frac{26}{15}\right)$ є точкою локального мінімуму функції Лагранжа, а відповідно умовним мінімумом функції *u*.

Другий спосіб (прямий метод)

Використовуючи умову зв'язку виразимо змінну x через y та підставимо отриманий вираз у цільову функцію:

$$\begin{cases} x = -2 + y - z \\ u = 3x^2 + 5y^2 - z \to extr \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 + y - z \\ u = 3(-2 + y - z)^2 + 5y^2 - z \to extr \end{cases}$$

Отримали задачу на знаходження безумовного екстремуму функції двох змінних.

$u = 3(-2 + y - z)^2 + 5y^2 - z \to ext$

$u = 12 - 12y + 11z + 8y^2 - 6yz + 3z^2 \to extr$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -12 - 6z + 16y = 0 \\ 11 - 6y + 6z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{10} \\ z = -\dfrac{26}{15} \end{cases}$$

Таким чином задана цільова функція має стаціонарну точку с координатами $y = \frac{1}{10}$ $z = -\frac{26}{15}$ дослідимо її на екстремум:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 16; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -6; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = -6; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6:$$

$$H=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -6\\ -6 & 6\end{pmatrix}$$

$$\delta_1=16>0 \qquad \delta_2=\begin{vmatrix}16 & -6\\ -6 & 6\end{vmatrix}=60>0$$

Так як матриця Гессе є додатньовизначенною квадратичною формою відносно диференціалів незалежних змінних dy,dz, отримана стаціонарна точка є точкою безумовного локального мінімуму. Обчисливши її першу координату $x=-\frac{1}{6}$, отримуємо точку $M\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{10};-\frac{26}{15}\right)$ – точку локального мінімуму функції Лагранжа, а відповідно умовний мінімум функції *u*.

<u>*Відповідь:*</u> $u_{ум.\min}=u\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{10};-\frac{26}{15}\right)=\frac{31}{15}$.

<u>*Задача 4.*</u> Розв'язати екстремальну задачу: $u=x-2y+2z\to extr$ при умові що $x^2+y^2+z^2=9$.

<u>*Коментарі до розв'язання задачі*</u>.

$$L=x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-9\right)$$

$$\begin{cases}L'_x=0\\ L'_y=0\\ L'_z=0\\ L'_\lambda=0\end{cases}\quad \begin{cases}\left(x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-9\right)\right)'_x=0\\ \left(x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-9\right)\right)'_y=0\\ \left(x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-9\right)\right)'_z=0\\ \left(x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-9\right)\right)'_\lambda=0\end{cases}\quad \begin{cases}1+2x\lambda=0\\ -2+2y\lambda=0\\ 2+2z\lambda=0\\ x^2+y^2+z^2-9=0\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda=\mp\frac{1}{2}\\ y=\mp 2\\ z=\pm 2\\ x=\pm 1\end{cases}$$

Таким чином отримали наступні стаціонарні точки функції Лагранжа:
$M_1(1;-2;2)$ при $\lambda=-0{,}5$; $M_2(-1;2;-2)$ при $\lambda=0{,}5$.

$$d^2L(x_0;y_0;z_0)=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(dx)^2+2\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dxdy+2\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}dxdz+2\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}dydz+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(dy)^2+\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(dz)^2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=(1+2x\lambda)'_x=2\lambda;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=(1+2x\lambda)'_y=0;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}=(1+2x\lambda)'_z=0;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}=(-2+2y\lambda)'_x=0;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=(-2+2y\lambda)'_y=2\lambda;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}=(-2+2y\lambda)'_z=0;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial x}=(2+2z\lambda)'_x=0;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial z\partial y}=(2+2z\lambda)'_y=0;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}=(2+2z\lambda)'_z=2\lambda:$$

$$d^2L=2\lambda(dx)^2+2\cdot 0\cdot dxdy+2\cdot 0\cdot dxdz+2\cdot 0\cdot dydz+2\lambda(dy)^2+2\lambda(dz)^2=2\lambda(dx)^2+2\lambda(dy)^2+2\lambda(dz)^2;$$

$$d^2L(M_1)=2\lambda(dx)^2+2\lambda(dy)^2+2\lambda(dz)^2=2(-0{,}5)(dx)^2+2(-0{,}5)(dy)^2+2(-0{,}5)(dz)^2=-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2<0.$$

$M_1(1;-2;2)$ є точкою локального максимуму функції Лагранжа, а відповідно умовним максимумом функції *u*.

$$d^2L(M_2)=2\lambda(dx)^2+2\lambda(dy)^2+2\lambda(dz)^2=2\cdot(0{,}5)(dx)^2+2\cdot(0{,}5)(dy)^2+2\cdot(0{,}5)(dz)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2>0.$$

$M_2(-1;2;-2)$ є точкою локального мінімуму функції Лагранжа, а відповідно умовним мінімумом функції *u*.

<u>*Відповідь:*</u> $z_{ум.\min.}=z(-1;2;-2)=-11$; $z_{ум.\max.}=z(1;-2;2)=11$

Задача 5. На площині знайти точку, сума квадратів відстані якої від площин $x+3z=6$ та $y+3z=2$ є найменшою [1].

Коментарі до розв'язання задачі. Нехай $A(x;y;z)$ – шукана точка. Цільова функція матиме вигляд:

$u=d_1^2+d_2^1\to\min,$ де

d_1 – відстань від точки $A(x;y;z)$ до площини $x+3z=6$;

d_2 - відстань від точки $A(x;y;z)$ до площини $y+3z=2$.

Так як точка $A(x;y;z)$ належить площині $x+y-2z=0$, то операційна модель задачі матиме вигляд наступної задачі умовної оптимізації:

$$u=d_1^2+d_2^2\to\min, \text{ при умові що } x+y-2z=0.$$

Із курсу аналітичної геометрії відомо, що відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D=0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \text{ тому}$$

$$d_1=\frac{|x+3z-6|}{\sqrt{1^2+3^2}},\quad d_2=\frac{|y+3z-2|}{\sqrt{1^2+3^2}},$$

$$u=\left(\frac{|x+3z-6|}{\sqrt{1^2+3^2}}\right)^2+\left(\frac{|y+3z-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}\right)^2\to\min, \text{ при умові що } x+y-2z=0$$

$$u=0{,}1\left((x+3z-6)^2+(y+3z-2)^2\right)\to\min, \text{ при умові що } x+y-2z=0$$

Прямий метод

Використовуючи умову зв'язку, виразимо змінну x через y і z та підставимо отриманий вираз у цільову функцію:

$$\begin{cases}x=-y+2z\\ u=0{,}1\left((x+3z-6)^2+(y+3z-2)^2\right)\to\min\end{cases}\qquad \begin{cases}x=-y+2z\\ u=0{,}1\left((-y+2z+3z-6)^2+(y+3z-2)^2\right)\to\min\end{cases}$$

Отримали задачу на знаходження безумовного екстремуму функції двох змінних.

$$u=0{,}1\left((-y+5z-6)^2+(y+3z-2)^2\right)\to\min$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=0\end{cases}\qquad \begin{cases}0{,}1(-2(-y+5z-6)+2(y+3z-2))=0\\ 0{,}1(10(-y+5z-6)+6(y+3z-2))=0\end{cases}\qquad \begin{cases}y=-1\\ z=1\end{cases}$$

Таким чином задана цільова функція має стаціонарну точку с координатами $y=-1$ $z=1$ дослідимо її на екстремум:

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0{,}4;\quad \frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}=-0{,}4;\quad \frac{\partial^2u}{\partial z\partial y}=-0{,}4;\quad \frac{\partial^2u}{\partial z^2}=6{,}8:$$

$$H=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2u}{\partial y\partial y} & \dfrac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\\ \dfrac{\partial^2u}{\partial z\partial y} & \dfrac{\partial^2u}{\partial z\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}4 & -0{,}4\\ -0{,}4 & 6{,}8\end{pmatrix}$$

$$\delta_1=0{,}4>0\qquad \delta_2=\begin{vmatrix}16 & -6\\ -6 & 6\end{vmatrix}=2{,}56>0$$

Так як матриця Гессе є додатньовизначенною квадратичною формою відносно диференціалів незалежних змінних dy,dz, отримана стаціонарна точка є точкою безумовного локального мінімуму.

Обчисливши її першу координату $x=3$, отримуємо точку $A(3;-1;1)$ – точку локального мінімуму функції Лагранжа, а відповідно умовний мінімум функції *u.*

Відповідь: $A(3;-1;1)$.

Третя група задач (точніше задача 6) охоплює випадок *n=3, m=2*. Так як умови зв'язку пропонованої задачі є достатньо «зручними» то доцільно її розв'язування провести двома способами: методом Лагранжа та прямим методом. Варто зауважити, що розв'язування таких задач дуже часто є непростим завданням. Труднощі часто виникають під час розв'язування системи рівнянь, корені якої визначають стаціонарні точки функції Лагранжа. Тому, пропонуючи студентам подібні задачі варто ретельно їх підбирати. «Вдало» підібрані цільова функція та умови зв'язку, мають сприяти створенню системи рівнянь, яка відносно не складно розв'язується.

Задача 6. Знайти умовні екстремуми функції $u = x + y + z^3$ при умовах що $z - x = 1$, $y - zx = 1$.

Коментарі до розв'язання задачі.

Перший спосіб (метод Лагранжа)

$$L = x + y + z^3 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - zx - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_{\lambda_1} = 0 \\ L'_{\lambda_2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x + y + z^3 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - zx - 1)\right)'_x = 0 \\ \left(x + y + z^3 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - zx - 1)\right)'_y = 0 \\ \left(x + y + z^3 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - zx - 1)\right)'_\lambda = 0 \\ z - x - 1 = 0 \\ y - xz - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - \lambda_1 - z\lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_2 = 0 \\ 3z^2 + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0 \\ z - x - 1 = 0 \\ y - xz - 1 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь знаходимо стаціонарні точки функції Лагранжа:

$M_1(-1;1;0)$ при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$;

$M_2\left(-\frac{5}{3};\frac{19}{9};-\frac{2}{3}\right)$ при $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -1$.

$$d^2L(x_0;y_0;z_0) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dxdy + 2\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}dxdz + 2\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}dydz + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(dz)^2,$$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$; $\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z} = -\lambda_2$;

$\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x} = 0$; $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$; $\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z} = 0$;

$\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial x} = -\lambda_2$; $\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 6z$:

$$d^2L = 0\cdot(dx)^2 + 2\cdot 0\cdot dxdy - 2\lambda_2 dxdz + 2\cdot 0\cdot dydz + 0\cdot(dy)^2 + 6\cdot z(dz)^2 = -2\lambda_2 dxdz + 6z(dz)^2.$$

$$d^2L(M_1) = -2\cdot(-1)dxdz + 6\cdot 0\cdot(dz)^2 = 2dxdz$$

На даному етапі досліджень не можемо зробити висновків щодо знаку $d^2L(M_1)$. Скористаємось умовою зв'язку, якій задовольняють dx, dy, dz:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)dx + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)dy + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)dz = 0 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x_0;y_0;z_0)dx + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x_0;y_0;z_0)dy + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}(x_0;y_0;z_0)dz = 0 \end{cases}:$$

$$\begin{cases} (z - x - 1)'_{x_{(M_1)}}dx + (z - x - 1)'_{y_{(M_1)}}\cdot dy + (z - x - 1)'_{z_{(M_1)}}\cdot dz = 0 \\ (y - zx - 1)'_{x_{(M_1)}}\cdot dx + (y - zx - 1)'_{y_{(M_1)}}\cdot dy + (y - zx - 1)'_{z_{(M_1)}}\cdot dz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -dx + dz = 0 \\ 0\cdot dx + dy - (-1)dz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} dz = dx \\ dy + dz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} dz = dx \\ dy = -dx \end{cases}$$

Продовжимо дослідження $d^2L(M_1)$:

$$d^2L(M_1) = 2dxdz = 2dxdx = 2(dx)^2 > 0$$

Із цього випливає, що точка $M_1(-1;1;0)$ є точкою локального мінімуму функції Лагранжа, а відповідно умовним мінімумом функції *u.*

Провівши аналогічні дослідження, приходимо до висновку, що точка $M_2\left(-\frac{5}{3};\frac{19}{9};-\frac{2}{3}\right)$ є точкою локального максимуму функції Лагранжа, а відповідно умовним максимумом функції *u.*

Другий спосіб (прямий метод)

$u = x + y + z^3 \to extr$ при умовах $z - x = 1$, $y - zx = 1$

Використовуючи першу та другу умови зв'язку виразимо змінні y і z та підставимо отримані вирази у цільову функцію:

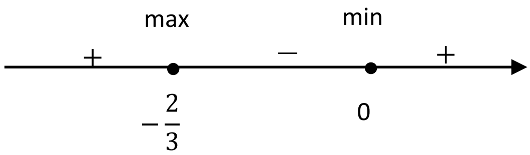
$$\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 1 + z(z-1) \\ u = x + y + z^3 \to extr \end{cases} \quad \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 1 + z(z-1) \\ u = z - 1 + 1 + z(z-1) + z^3 \to extr \end{cases}$$

Отримали задачу на знаходження екстремуму функції однієї змінної. Розв'яжемо її засобами диференціального числення функції однієї змінної:

$$u = z - 1 + 1 + z(z-1) + z^3 \to extr$$

$$u' = \left(z - 1 + 1 + z(z-1) + z^3\right)' = 3z^2 + 2z$$

$$3z^2 + 2z = 0$$



Обчисливши інші координати знайдених екстремальних точок, приходимо до висновку, що точка $M_1(-1;1;0)$ – точка умовного мінімуму, а точка $M_2\left(-\frac{5}{3};\frac{19}{9};-\frac{2}{3}\right)$ – точка умовного максимуму.

<u>*Відповідь*</u>*:* $z_{ум.\max}\left(-\frac{5}{3};\frac{19}{9};-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$; $z_{ум.\min.}(-1;1;0) = 0$

У якості висновків зауважимо, що інтеграція математичних знань та умінь на сьогодні відіграє значущу роль в організації навчальної діяльності студентів.

Інтегративний підхід є актуальним та важливим аспектом сучасної вищої морської освіти. Він дає можливість розглядати зміст навчання окремої дисципліни саме у процесі взаємодії з іншими навчальними дисциплінами (або темами в межах однієї навчальної дисципліни). Під час розв'язування інтегративних задач відбувається найбільш повне розгортання навчальної проблеми (задачі). Розв'язування задач інтегративного змісту формує інтегративні знання як знання більш високого рівня порівняно с простою сукупністю одно предметних знань, розвиває пошуково-дослідницькі, творчі здібності, формує творчий потенціал, математичну й інформаційну культуру суб'єктів учіння [4,5,6], які усі разом у свою чергу стають міцним підґрунтям для формування стійких умінь та навичок професійної інтегративної діяльності.

Список використаних джерел

1. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – 480 с.
2. Герганов Л.Д. Профессиональная подготовка плавсостава Придунавья в условиях международной интеграции // Професійне навчання на виробництві: Збірник наукових праць. – К.: Науковий світ, 2009. – Вип. 3. – С. 88-97.
3. Грисенко М.В. Математика для економістів. Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. К.: Либідь, 2007. – 720 с.
4. Кушнір В.А. Задачі з математики інтегративного змісту // Інформаційні технології в освіті. – 2014. – №21. – С. 7-24.

5. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв'язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – №5. – С. 13-17.
6. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Розв'язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп'ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – №10. – С. 34-39.
7. Михеев А.И. К вопросу о причинах аварийности торгового флота // Водний транспорт: Збірник наукових праць. – К.: КДАВТ, 2015. – №1(22). – С. 28-33.

Анотація. Кліндухова В.М. Інтегративний характер задач умовної оптимізації та його роль у курсі вищої математики студентів морських спеціальностей.

Стаття присвячена деяким питанням підвищення рівня математичної підготовки студентів, шляхом розв'язання ними задач інтегративного характеру. Зокрема, підкреслюється значимість математичних інтегративних задач при підготовці студентів морських спеціальностей. Імплементація таких задач у навчальний процес, залучення студентів у відповідну інтегративну навчальну діяльність сприяє не лише підвищенню якості математичної культури студентів, а і формуванню в них професійних інтегративних навичок.

За основу узято класичні задачі умовної оптимізації. Увага до них не випадкова. Задачі умовної оптимізації є невід'ємною складовою курсу вищої математики і об'єктивно містять елементи інтегративності. Для їх розв'язування необхідно актуалізувати та застосувати знання і уміння із різних розділів математики, зокрема: шкільного курсу математики; елементи лінійної алгебри; в деяких задачах – елементи аналітичної геометрії; диференціальне числення функції однієї змінної; диференціальне числення функції декількох змінних. Усе це робить задачі умовної оптимізації вдалим прикладом природного, гармонійного «вплітання» інтегративних задач в математичну підготовку студентів.

У статті, в основному, приділена увага практичним питанням. Запропоновано декілька груп задач, які є посильними для студентів. Описані особливості розв'язування цих задач. Усі задачі є розв'язаними. Деякі задачі розв'язані двома способами. Операційна модель класичної задачі умовної оптимізації містить цільову функцію n змінних і m умов зв'язку на ці змінні. В першій групі запропонованих задач n=2, m=1; у другій: n=3, m=1; у третій n=3, m=2. Більш складним випадкам планується приділити увагу у наступних роботах.

Ключові слова: *вища математика, інтегративна задача, умовна оптимізація, метод Лагранжа.*

Аннотация. Клиндухова В.Н. Интегративный характер задач условной оптимизации и их роль в курсе высшей математики студентов морских специальностей.

Статья посвящена некоторым вопросам повышения уровня математической подготовки студентов посредством решения ими задач интегративного характера. В частности, подчеркивается значимость математических интегративных задач при подготовке студентов морских специальностей. Имплементация таких задач в учебный процесс, вовлечение студентов в соответствующую интегративную учебную деятельность способствуют не только повышению качества математической культуры студентов, а и формированию у них профессиональных интегративных навыков.

За основу взяты классические задачи условной оптимизации. Внимание к ним не случайно. Задачи условной оптимизации являются неотъемлемой частью курса высшей математики и объективно содержат элементы интегративности. Для их решения необходимо актуализировать и применить знания и умения из различных разделов математики, в частности: школьный курс математики; элементы линейной алгебры; в некоторых задачах - элементы аналитической геометрии; дифференциальное исчисление функции одной переменной; дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Все это делает задачи условной оптимизации удачным примеров естественного, гармоничного «вплетения» интегративных задач в математическую подготовку студентов.

В статье, в основном, уделено внимание практическим вопросам. Предложено нескольких групп задач, посильных для студентов, описаны особенности решения этих задач. Все задачи представлены с решениями, некоторые решены двумя способами. Операционная модель классической задачи условной оптимизации содержит целевую функцию n переменных и m условий связи на эти переменные. В первой группе предложенных задач n=2; m=1; во второй: n=3; m=1; в третьей: n=3; m=2. Более сложным случаям планируется уделить внимание в следующих работах.

Ключевые слова: *высшая математика, интегративная задача, условная оптимизация, метод Лагранжа.*

Abstract. Klindukhova V. The Integrative Nature Of The Task Of Conditional Optimization And Their Role In The Course Of Higher Mathematics Of Students Of Marine Specialties.

The article is devoted to the problem of improving the level of mathematical training of students. One means of solving this problem are integrative tasks. The integrative solution of mathematical tasks is very important in the training of students of marine specialties. It is expedient to introduce such tasks in the learning process. It is important to engage students in integrative learning activities. This helps to improve the quality of mathematical culture of students. It also contributes to the formation of students ' professional integrative skills.

The basis is the classical problem of conditional optimization. Attention to them is no accident. The task of conditional optimization is part of a course of higher mathematics. They objectively contain elements of integrity. For their solution it is necessary to apply knowledge and skills from various branches of mathematics. In particular: from a school course of mathematics; linear algebra; sometimes of analytical geometry; differential calculus of functions of one variable; differential calculus of functions of several variables. Therefore, the task of conditional optimization is a good example of a natural implementation of integrative tasks in the mathematical preparation of students.

In the article the attention is paid to practical issues. We considered several groups of tasks that are feasible for students. The characteristics of these tasks. All tasks are done. Some of the tasks solved in two ways. The operating model of classical conditional optimization problem consists of objective function in n variables and m additional conditions. In the first group: n=2, m=1. In the second group: n=3, m=1. In the third group: n=3, m=2. More complicated cases will be given attention in future works

***Keywords**: higher mathematics, integrative task. conditional optimization. Lagrange's method*