Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Ковальчук М. Б. Розв'язування задач математичної фізики у середовищі maple // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Випуск 1(11). – С. 56-61.

Kovalchuk M. Solving Problems Of Mathematical Physics In The Maple Environment // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2017. – Issue 1(11). – Р. 56-61.

УДК 517.9+004

М.Б. Ковальчук
Вінницький національний технічний університет, Україна
maya.kovalchuk@qmail.com

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ У СЕРЕДОВИЩІ MAPLE

Анотація. *Серед основних тенденцій розвитку математичної освіти в технічному вузі можна виділити модернізацію методів, прийомів і засобів навчання у формуванні тих базових знань і вмінь, які є значимими для застосування у подальшій професійній діяльності. Особливо важливо майбутньому інженеру вміти застосовувати алгоритм дій або самому його розробляти з використанням сучасних інформаційних технологій. Дана стаття присвячена аналізу педагогічної і методичної доцільності використання системи аналітичних розрахунків Maple при розв'язуванні задач математичної фізики, зокрема, коливання струни. Розглянуто основні команди, які дозволяють розв'язувати задачу Коші методом характеристик (формула Д'Аламбера) і методом Фур'є (метод відокремлення змінних) для вимушених і вільних коливань струни. Наведено методичні коментарі щодо використання операторів Maple в процесі знаходження основних характеристик і візуалізації процесу коливання струни.*

Зроблено висновки стосовно методичної і педагогічної доцільності вибору системи аналітичних розрахунків Maple з метою формування вмінь і навичок студентів, які передбачені змістовним модулем «Диференціальні рівняння».

Ключові слова: *математична фізика, диференціальні рівняння, аналітичні розрахунки задача Коші, метод Фур'є, формула Д'Аламбера.*

Постановка проблеми. Метою викладання математики у вищій технічній школі з використанням інформаційних технологій є оволодіння математичним апаратом, необхідним для вивчення загально-інженерних та спеціальних дисциплін, розвиток здібностей свідомого сприйняття математичного матеріалу, характерного для спеціальності інженера; оволодіння основними математичними методами, необхідними для аналізу і моделювання пристроїв, процесів і явищ, пошуків оптимальних рішень з метою підвищення ефективності виробництва і вибору найкращих способів реалізації цих рішень, опрацювання і аналізу результатів експериментів.

Навчальна дисципліна «Вища математика» за напрямом підготовки «Електротехніка та електротехнології» і «Електромеханіка» складається з 6 модулів, що містять 10 змістових модулів:

1. Елементи лінійної алгебра та аналітичної геометрії.
2. Диференціальне числення функції однієї змінної.
3. Інтегральне числення функції однієї змінної.
4. Функції кількох змінних.
5. Звичайні диференціальні рівняння
6. Числові і функціональні ряди
7. Операційне числення
8. Кратні інтеграли
9. Криволінійні та поверхневі інтеграли
10. Спеціальні глави вищої математики

Змістовий модуль «Звичайні диференціальні рівняння» передбачає вивчення основних задач математичної фізики.

Диференціальні рівняння в частинних похідних – потужний засіб теоретичного дослідження навколишніх процесів і посідають чи не найголовніше місце у теорії коливань. Побудова та дослідження математичних моделей фізичних явищ складають предмет математичної фізики. Математична фізика – це математичний апарат вивчення фізичних полів.

В межах теми «Рівняння математичної фізики» студенти мають вміти:

– зводити загальну форму рівнянь у частинних похідних другого порядку до канонічної форми у випадках гіперболічного, еліптичного, параболічного типів;

– розв'язувати хвильове рівняння методами Д'Аламбера та Фур'є;
– розв'язувати рівняння теплопровідності методом Фур'є;
– знаходити наближений розв'язок рівняння теплопровідності методом сіток.

З метою формування даних вмінь використовуються різні засоби, серед яких можна виділити спеціалізовані комп'ютерні середовища типу Maple. Дані засоби передбачають моделювання фізичних явищ, зокрема коливання струни, і спрощують аналітичні розрахунки характеристик. Разом з тим методична підтримка використання таких засобів у вищій математиці не розкрита на належному рівні. У провідних фахових виданнях ця проблема майже не висвітлюється. Це ускладнює застосування викладачами і студентами засобів даного типу до розв'язування типових задач «Рівнянь математичної фізики».

Аналіз актуальних досліджень. Дослідження комплексу проблем, які пов'язані із застосуванням нових інформаційних технологій (НІТ) навчання математики, започатковані в роботах А.П.Єршова, М.І.Бурди, М.І. Жалдака, Е.І. Кузнєцова, О.А. Кузнєцова, В.М.Монахова Дидактичні і психологічні аспекти застосування НІТ у навчальному процесі розглядались у працях М.І. Жалдака, С.А. Ракова, Ю.С. Рамського, Н.В.Морзе, В.А. Пенькова, Ю.В. Горошка, В.І. Клочка, В.Т. Зайцевої, Є.М.Смірнової, О.Б.Жильцова та ін.

Аналіз науково-методичних джерел щодо використання інформаційних технологій при вивченні рівнянь математичної фізики, а також відповідних засобів комп'ютерної математики та наявного у них інструментарію дозволяє стверджувати, що одним із найбільш зручних у використанні та найбільш вдалим з точки зору візуалізації результатів та аналітичних обчислень є система аналітичних розрахунків Maple.

В курсі вищої математики рівняння математичної фізики представлені лише деякими диференціальними рівняннями з частинними похідними, які допускають фізичну інтерпретацію: хвильові рівняння і рівняння теплопровідності з деякими крайовими умовами. Розв'язування цих рівнянь пов'язане з громіздкими математичними перетвореннями. Це спонукало провести методичний аналіз розв'язань типових хвильових рівнянь з наданням рекомендацій щодо застосування Maple.

Мета статті навести приклади розв'язування задачі Коші методом характеристик (формула Д'Аламбера) і методом Фур'є (метод відокремлення змінних) для рівнянь коливання струни з використанням системи аналітичних розрахунків Maple, надати методичні коментарі щодо її застосування.

Виклад основного матеріалу. Можливості системи аналітичних розрахунків типу Maple, дозволяють застосовувати її в декількох позиціях:

1) *як засіб комп'ютерної графіки* для відтворювання динаміки процесів коливання струни і мембрани, розгляду їх профілів у різні моменти часу;
2) *як засіб для аналітичних перетворень* в чисельних методах розв'язування задач.

Роботу з командами Maple проілюструємо на розв'язуваннях задач Коші методом характеристик (формула Д'Аламбера) і методом Фур'є (метод відокремлення змінних) для вимушених і вільних коливань струни.

Відмітимо, що методом характеристик називається метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку шляхом інтегрування їх канонічних форм.

Метод Фур'є, або метод відокремлення змінних, є одним із найбільш розповсюджених методів розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних. Цей метод базується на узагальненому принципі суперпозиції.

Одночасне застосування засобів Maple і алгоритмів розв'язування задач даного типу полегшить студентам процес знаходження загального розв'язку.

Алгоритм розв'язування задач

1. Визначаємо спосіб коливання струни (вимушені чи вільні).
2. В залежності від способу коливання вибираємо формулу Д'Аламбера.
3. Знаходимо складові формули Д'Аламбера засобами Maple.
4. Записуємо розв'язок задачі Коші.

Задача 1. Коливання струни описується рівнянням $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ з початковими умовами $U(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$, де $f(x) = \sin(x)$, $\psi(x) = 0$, $-\infty \prec x \prec \infty$, $t \geq 0$. Знайти розв'язок задачі Коші за формулою Д'Аламбера.

Розв'язання. Задамо рівняння.

> Eqn:=diff(u(x,t),t$2)-a^2*diff(u(x,t),x$2)=0;

$$Eqn := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)\right) - a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\right)$$

Для розв'язання цього рівняння використовуємо процедуру **pdsolve()** і одержимо наступне.

> pdsolve(Eqn);

$$u(x,t) := \_F1(at+x) + \_F2(at-x)$$

В даному випадку функції $\_F1(\ )$ і $\_F2(\ )$ є довільними двічі диференційованими функціями. Таким чином, загальний розв'язок рівняння ***Eqn*** подається у вигляді суперпозиції двох функцій з відповідними аргументами. Відповідно, щоб повністю розв'язати задачу, необхідно визначити вид цих функцій. Функції визначаються із початкових умов. Але перш за все задаємо *u(x,t)* як функцію двох параметрів *x i t.*

> u:=unapply(rhs(%),x,t);

$$u := (x,t) \to \_F1(at+x) + \_F2(at-x)$$

Далі використовуємо те, що похідна по часу від функції $u(x,t)$ в початковий момент дорівнює нулю.

Зауваження: похідна по другому аргументу функції $u(x,t)$ обчислюється за допомогою оператора диференціювання з позначенням в квадратних дужках індексу змінної, по якій обчислюється похідна **(D[2](u))**.

> D[2](u)(x,0)=0;

$$D(\_F1)(x)\,a + D(\_F2)(-x)\,a = 0$$

Одержане таким чином диференціальне рівняння будемо розв'язувати відносно функції $\_F1(\ )$.

> dsolve(%,_F1(x));

$$\_F1(x) = \_F2(-x) + \_C1$$

Бачимо, що функції $\_F1(\ )$ і $\_F2(\ )$ з точністю до знака аргументу і константи _C1 співпадають. Константу можна прирівняти до нуля, а функцію _F1 позначити як F.

> _F1:=F;

$$\_F1 := F$$

> _F2:=x->F(-x);

$$\_F2 := x \to F(-x)$$

Відповідно, шукати розв'язок рівняння потрібно в такому вигляді:

> u(x,t);

$$F(at+x)+F(-at+x)$$

> u(x,0);

$$2F(x)$$

> f:=x->sin(x);

$$f := x \to \sin(x)$$

> F:=1/2*f;

$$F := \frac{1}{2}f$$

> a:=1;

$$a := 1$$

> u(x,t);

$$\frac{1}{2}\sin(t+x) - \frac{1}{2}\sin(t-x)$$

Тепер за допомогою процедури **animate** відтворимо процес коливання струни (рис. 1, рис. 2).

>plots[animate](u(x,t),x=-10..10,t=0..15, view=-2..2, scaling= unconstrained, numpoints=100,titlefont=[HELVETICA,BOLD,12]);

На даних рисунках відображається коливання струни в різні моменти часу. Коливання струни в момент часу *t=1c* – рис. 1, в момент часу *t=4c* – рис. 2.

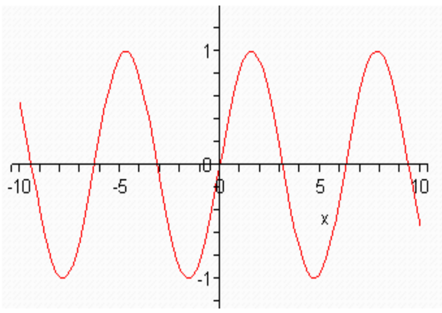

Рис. 1.

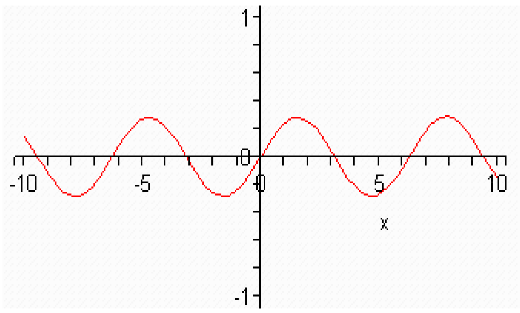

Рис. 2.

Задача 2. Знайти розв'язок рівняння коливання струни $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, яке задовольняє початкові умови $U(x,t)\big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\big|_{t=0} = \varphi(x)$, коли $t \succ 0$ та $0 \le x \le l$ і крайові умови $U(x,t)\big|_{x=0} = 0$, $U(x,t)\big|_{x=l} = 0$ [1, c. 192].

Розв'язання. Визначимо рівняння.

> Eq:=diff(u(x,t),t$2)=a^2*diff(u(x,t),x$2);

$$Eq := \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right).$$

Розв'язок будемо шукати методом розділення змінних.

> pdsolve(Eq,HINT=X(x)*T(t));

$$(u(x,t) = X(x)T(t))\ \ \&where\left[\left\{\frac{d^2}{dt^2}T(t) = a^2\,\_c_1 T(t),\ \frac{d^2}{dx^2}X(x) = \_c_1 X(x)\right\}\right].$$

В одержаному результаті виконання команди *вираження* спочатку вказано, в якому вигляді шукається функція $U(x,t)$, а потім в квадратних дужках після ключового слова ***where*** перераховуються умови, які задовольняють функції **X(x)** і **T(t).**

Задаємо рівняння для функції **X(x),** замінивши в ньому для зручності змінну середовища $\_c_1$ на $-\lambda^2$.

> Eq1:=diff(X(x),`$`(x,2))=-lambda^2*X(x);

$$Eq1 := \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -\lambda^2 X(x).$$

Розв'язуємо це рівняння відносно *X(x)*, врахувавши початкові умови, а саме: оскільки *U(0,t)=X(0)T(t)=0*, то *X(0)=0*. Одержимо

> dsolve({Eq1,X(0)=0},X(x));

$$X(x) = \_C1\sin(\lambda x).$$

Параметр λ має бути таким, щоб виконувалась і умова **X(l)=0**. Але перш ніж розв'язувати відповідне рівняння (відносно λ), присвоюємо змінній середовища $\_EnvAllSolutions$, яка відповідає за пошук всіх розв'язків рівняння, значення $true$.

> _EnvAllSolutions:=true;

$$\_EnvAllSolutions = true$$

> solve(sin(lambda*l)=0,lambda);

$$\frac{\pi\,\_Zl\sim}{l}.$$

В цьому виразі змінна $\_Z1$ середовища «нумерує» власні числа. Задамо залежність, яка визначає власні числа крайової задачі.

> nu:=n->Pi*n/l;

$$v := n \to \frac{\pi n}{l}.$$

Визначимо власні функції – такі функції, які відповідають власним числам задачі.

> X:=(x,n)->sin(x*nu(n));

$$X := (x,n) \to \sin(x\,v(n)).$$

Повертаємось до функції *T(t)*, задаємо і розв'язуємо рівняння для неї.

> Eq2:=diff(T(t),`$`(t,2))=-a^2*lambda^2*T(t);

$$Eq2 := \frac{d^2}{dt^2} T(t) = -a^2\,\lambda^2 T(t),$$

> dsolve({Eq2,D(T)(0)=0},T(t));

$$T(t) = \_C2\cos(\lambda a t),$$

> T:=(t,n)->cos(nu(n)*a*t);

$$T := (t,n) \to \cos(v(n)\,a t).$$

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді ряду за власними функціями.

> U:=(x,t)->Sum(A[n]*X(x,n)*T(t,n),n=1..infinity);

$$U := (x,t) \to \sum_{n=1}^{\infty} A_n X(x,n) T(t,n).$$

Загальний розв'язок хвильового рівняння згідно з узагальненим принципом суперпозиції шукається за формулою:

> U:=(x,t)->Sum((C[n]*cos(a*Pi*n*t/l)+ +D[n]*sin(a*Pi*n*t/l))*sin(Pi*n*x/l),n=1..infinity);

$$U := (x,t) \to \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos\left(\frac{a\,\pi\,n\,t}{l}\right) + D_n \sin\left(\frac{a\,\pi\,n\,t}{l}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{l}\right),$$

> a:=1;l:=Pi;

$$a := 1,$$
$$l := \pi,$$

> U(x,t);

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos(n t) + D_n \sin(n t)\right)\sin(n x).$$

Задовольняємо початкові умови

> U1:=U(x,0);

$$U1 := \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n x),$$

> f:=x->(x<=0,0,x<=Pi/2,x,x<=Pi,Pi-x,o);

$$f := x \to x \le 0, 0, x \le \frac{1}{2}\pi, x \le \pi, \pi - x, 0.$$

Умови Діріхле для функції $f(x)$ виконуються (функція неперервна і кусково-монотонна на проміжку $[0, \pi]$), тому її можна розкласти в ряд Фур'є.

> U(x,o)=f(x);

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos(n0) + D_n \sin(n0)\right)\sin(nx) = f(x),$$

> assume(n::posint);

> f1(x):=x;

$$f1(x) := x,$$

> f2(x):=Pi-x;

$$f2(x) := \pi - x,$$

> A[n]:=2/Pi*{int(f1(x)*sin(n*x),x=0..Pi/2)+ +int(f2(x)*sin(n*x),x=Pi/2..Pi)};

$$A_{n\sim} := \frac{2\left\{-\frac{-2\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\sim\right)+\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\sim\right)n\sim\pi}{2n\sim^2}+\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\sim\right)n\sim\pi+2\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\sim\right)}{2n\sim^2}\right\}}{\pi},$$

> simplify(%);

$$\frac{2\left\{-\frac{-2\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\sim\right)+\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\sim\right)n\sim\pi}{2n\sim^2}+\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\sim\right)n\sim\pi+2\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\sim\right)}{2n\sim^2}\right\}}{\pi},$$

> d:=combine(%,tgig);

$$d := \frac{2\left\{\frac{2\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\sim\right)}{n\sim^2}\right\}}{\pi},$$

> sin(1/2*Pi*n):=(-1)^n;

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\sim\right) := (-1)^{n\sim},$$

> C[n]:=d;

$$C_{n\sim} := \frac{2\left\{\frac{2(-1)^{n\sim}}{n\sim^2}\right\}}{\pi},$$

> U1;

$$\sum_{n\sim=1}^{\infty}\frac{2\left\{\frac{2(-1)^{n\sim}}{n\sim^2}\right\}\sin(n\sim x)}{\pi}$$

Це розв'язок рівняння коливання струни, який задовольняє початкові і крайові умови

Зауваження: для парних значень $n\sim=2n$ коефіцієнт C_n дорівнює нулю, тому для $n\sim=2n+1$ коефіцієнт розкладу набуде вигляду

$$C_{2n+1} = \frac{2\left\{\frac{2(-1)^{(2n+1)}}{(2n+1)^2}\right\}}{\pi},$$

відповідно

$$U1 = U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left\{\frac{2(-1)^{(2n+1)}}{(2n+1)^2}\right\}\sin((2n+1)x)}{\pi}$$

розв'язок рівняння коливання струни, який задовольняє початкові і крайові умови.

Проаналізуємо одержаний розв'язок, відобразивши його графічно. Оскільки ряд для функції *U(x,t)* нескінченний, то для графічного відображення необхідно залишити скінченну кількість доданків. Відповідний вираз визначимо таким чином (коефіцієнти записані в явному вигляді, N – число доданків в ряді).

> S:=(x,t,N)->sum(2*(2*(-1)^n/n^2)*sin(n*x)/Pi,n=1..N);

$$S := (x,t,N) \to \sum_{n=1}^{N} \frac{4\,(-1)^n \sin(n\,x)}{n^2\,\pi}.$$

Тепер за допомогою процедури **animate** відтворимо процес коливання струни (рис. 3).

> plots[animate](S(x,t,10),x=0..15,t=0..1, numpoints=100, titlefont=[HELVETICA,BOLD,12]);

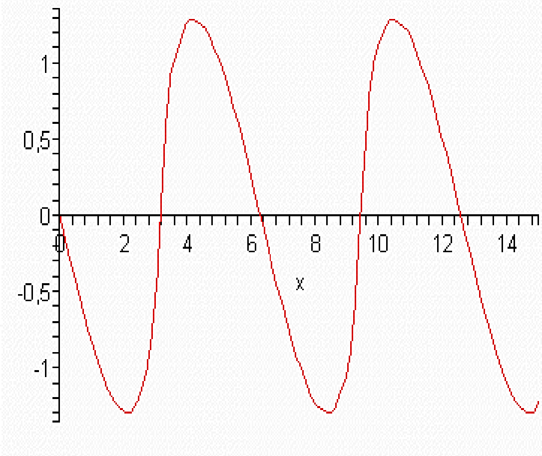

Рис. 3.

Висновки. За результатами дослідження можна зробити такі висновки.

1. Система аналітичних розрахунків Maple є потужним інструментом візуалізації результатів та спрощення аналітичних розрахунків.
2. Аналіз способів використання даного засобу показує, що його використання надає навчальному процесу дослідницького характеру. Це значно посилює навчально-пізнавальні можливості студентів.
3. Можливості використання системи аналітичних розрахунків Maple в курсі вищої математики не обмежуються задачами даного типу.

Список використаних джерел

1. Матросов А.В. Maple 6.Решение задач высшей математики и механики / А. В. Матросов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001.– 528 с.
2. Петрук В.А. Вища математика з комп'ютерною підтримкою. Рівняння математичної фізики./ В.А. Петрук, Н.В. Сачанюк-Кавецька, М.Б. Ковальчук// Рекомендовано МОН України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямками «Електромеханіка» та «Електротехніка». Лист №1/11-1662 від 1.03.2011 р.) Вінниця: ВНТУ, 2012. – 157 с.

References

1. Matrosov A.V. Maple 6. Solving problems of higher mathematics and mechanics / AV Matrosov. – SPb .: BHV-Petersburg, 2001. – 528 s. (in Russian)
2. Petruk VA Higher mathematics with computer support. The equations of mathematical physics. / VA Petruk, NV Sachanyuk-Kavetsky, MB Kovalchuk // Education of Ukraine recommended as a textbook for university students studying "Electrician" and "Electrical engineering". Letter №1 / 11-1662 from 1.03.2011 g.) Vinnitsa: NTB, 2012. – 157 s. (in Ukrainian)

SOLVING PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS IN THE MAPLE ENVIRONMENT

Maya Kovalchuk

Vinnytsia National Technical University, Ukraine

Abstract. *Among the main trends of mathematics education in a technical college we can identify methods, techniques and training aids modernization in the formation of the basic knowledge and skills that are important for application in future professional activities. It is especially important for future engineers to be able to apply the algorithm of actions or to develop it on one's own using modern information technology. This article is devoted to the pedagogical and methodological feasibility of Maple analytical calculations system in solving problems of mathematical physics, including string vibrations. The basic commands to solve the problem of Cauchy by characteristics method (d'Alember formula) and Fourier method (method of variables separation) for free and forced vibrations of strings are examined. A methodical analysis of Maple operators in the process of the main characteristics searching and visualization of string fluctuations process is done. Conclusions regarding the methodological and pedagogical appropriateness of Maple analytical calculations to form students skills which are provided by meaningful module "Differential equations" are done.*

Key words: *mathematical physics, differential equations, analytical calculations, Cauchy problem, Fourier method, the formula of d'Alember.*