Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Хворостіна Ю.В., Хілобок С.П. Підходи до побудови неперервних ніде не диференційовних функцій // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Випуск 1(11). – С. 120-123.

Khvorostina Yu., Hilobok S. Approaches To The Construction Of Continuous Nowhere Differentiable Functions // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2017. – Issue 1(11). – P. 120-123.

УДК 517.51

Ю.В. Хворостіна, С.П. Хілобок
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна

ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ НЕПЕРЕРВНИХ НІДЕ НЕ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Анотація. *У статті розглядається встановлення зв'язків між поняттями неперервності та ніде не диференційовності, історія формування самого поняття неперервної ніде не диференційовної функції, перші спроби побудови функцій даного типу. Аналізується три основні підходи до означення неперервних ніде не диференційовних функцій: перший підхід полягає в узагальненні функції Вейєрштрасса; другий підхід є геометричним і базується на системі ітерованих функцій; третій підхід полягає у встановленні певного зв'язку між цифрами аргументу і цифрами відповідних значень, записаних в іншій системі числення. Розглядаються властивості неперервних дійсних функцій дійсної змінної зі складною локальною поведінкою засобами фрактального аналізу та фрактальної геометрії, зокрема дається огляд функції Ва-дер-Вардена і дослідження властивостей даної функції. Також вказана актуальність дослідження і практичність застосування неперервних ніде не дифернційовних функцій в різних математичних моделях.*

Ключові слова: *неперервна ніде не диференційовна функція, функція Ван-дер-Вандера, ітерована функція, фрактальна функція, сингулярні функції.*

Постановка проблеми. Для опису тих чи інших природних явищ вибудовуються власні геометричні образи та поняття, інколи унікальні, пристосовані до вимог відповідного розділу. У переважній більшості випадків для побудови таких об'єктів використовуються традиційні геометрії. Проте математики вже наприкінці XIX на початку XX ст. для побудови неперервних ніде не диференційованих функцій вивчали та вводили математичні поняття, що виходили за межі традиційної геометрії. Зокрема, останнім часом широко вивчаються фрактали – геометричні об'єкти різьбляної форми, яким властивий особливий характер однорідності та самоподібності.

Сім'я неперервних ніде не диференційованих функцій утворює одну з сімей функцій зі складною локальною будовою. Їх перші конструкції були яскравими контрприкладами аналізу. Підвищений інтерес до таких функцій з'явився в 30-х роках XX ст., коли Банах і Мазуркевич довели, що множина ніде не диференційовних в просторі $C[0:1]$ неперервних на $[0:1]$ функцій з рівномірною метрикою є множиною другої категорії Бера. В останній час такі функції все частіше фігурують в наукових дослідженнях, як чисто теоретичних, так і прикладних. Варто зазначити, що ще у 1911 р. французький фізик Ж.-Б.Перрен в його роботі «Атоми» напевно першим висловив припущення, що «...криві, що не мають дотичних, можуть вважатись правилом, в той час як правильні криві—такі, наприклад, як коло—цікавим, але вельми частковим випадком... Напевно ми скоро зіткнемось з такими випадками, для опису яких виявиться простіше використовувати недиференційовні функції, аніж ті, що мають похідну. Коли таке відбудеться, практична цінність математичних досліджень іррегулярних континуумів стане очевидною усім». Сьогодні неперервні ніде не диференційовні функції з'являються в різноманітних математичних моделях. Наприклад, вони використовуються в радіоелектроніці для конструювання фрактальних антен, а також для моделювання мовних сигналів та цифрової обробки зображень та сигналів. Застосуванню фрактальних множин та функцій в фізиці та інших природничих науках присвячено чимало робіт. Фрактальні неперервні функції використовуються в економічній теорії при аналізі коливання цін на фондовому ринку, в медицині при діагностиці серцебиття та інших науках. Фрактальні функції виникають також в суміжних з фрактальним аналізом розділах математики, зокрема в дробовому численні, теорії динамічних систем, теорії наближень. В останнє десятиліття розвивається як індивідуальна, так і загальна теорія таких функцій. Потужними засобами їхнього аналізу є міри Хаусдорфа дробових порядків та метричні розмірності (Хаусдорфа–Безиковича, Хаусдорфа–Біллінгслі, клітинкова тощо). Продовжують досліджуватись властивості не тільки класичних, але і нових прикладів недиференційовних функцій засобами теорії фракталів. Фрактальні властивості функцій вивчаються в двох напрямках—це властивості їхніх рівнів та графіків. Варто зазначити, що на сьогодні зовсім не для всіх функцій проведено глибокий фрактальний аналіз (наприклад, і досі залишається відкритим питання про розмірність Хаусдорфа–Безиковича графіка функції Вейєрштрасса). Триває процес створення методології дослідження. Особливо гостро стоїть проблема аналітичного задання та дослідження фрактальних властивостей таких функцій. В теорії недиференційовних функцій раніше використовувалось кілька підходів до їхнього задання:

1) геометрично-описовий спосіб (приклади Больцано, Безиковича);

2) метод «згущення особливостей» (функції Вейєрштрасса, Дарбу, Такаґі– Ван дер Вардена тощо);

3) метод систем ітерованих функцій (фрактальні інтерполяційні функції);

4) функція як перетворювач цифр аргументу (приклади Сінгха, Вундерліха, Кінні, неперервні канторівські проектори).

Мета статті: розглянути історію формування поняття неперервної ніде не диференційовної функції та проаналізувати основні підходи до побудови неперервних ніде не диференційовних функцій.

Виклад основного матеріалу. Ніде не диференційовна функція – це функція, яка не має диференціала, а у випадку функції однієї змінної – це функція, що немає похідної ні в одній точці. Багато математичних понять пройшли довгий діалектичний шлях розвитку, перед тим як отримати строгі визначення або сформуватися в нині існуючому вигляді. Коли вдається дати загальне визначення поняттю то виявляється, що воно може охоплювати уже множину об’єктів, значно більш ширшу, ніж те, що привело до даного визначення, тобто містить об’єкти, які ще не розглядалися, або навіть ті, про існування яких раніше не здогадувалися. Ці загальні закономірності легко спостерігати на розвитку понять функції, її неперервності та диференційованості.

Встановлення зв’язків між поняттями неперервності та диференційовності функцій має цікаву історію. Похибки, що зустрічалися у роботах математиків мали за часту об’єктивний характер. Після відкриття диференціального числення в сили вузькості класу інтуїтивно склалася думка, що кожну функцію можна диференціювати будь–яку кількість разів – це підтверджувала практика знаходження похідної будь-якої запропонованої функції, побудову дотичних до кривих, які розглядаються. Таке хибне представлення у 1806 році Ампер намагався навіть узаконити, аргументуючи це існуванням і єдності похідної для кожної функції. Ампер розумів функцію, як «аналітичну функцію» за виключенням скінченного числа точок. І саме для таких функцій його ствердження було правильним. Пізніше поняття про функції змінилося і ствердження Ампера перенесли на неперервні функції в сьогоднішньому розумінні. Глибоко це не аналізуючи, багато вважали його фундаментом всього диференціального числення, наводили свої доведення цього ствердження і користувались цим при доведенні інших фактів.

З часом думка про нерозривність зв’язку неперервності функції та її диференційовності почала піддаватися сумніву. У роботі «Вчення про функції», опублікованій у 1930 році, Больцано будує приклад неперервної ніде не диференційовної функції. У 1834 – 1835 роках деякий зв'язок між цими поняттями починає розуміти Лобачевський. Діріхле у 1834 році, на лекціях у Берлінському університеті, зазначає, що в загальному випадку не можливо довести існування похідної у довільній неперервній функції, а також стверджує існування неперервної функції без похідної. У 1861 році Ріман зазначає приклад функції відносно якої Дюбуа – Реймон стверджує, що вона не диференційована на всій щільній множині, а Вейєрштрасс, у 1882 році, пише з цього приводу наступне: « До останнього часу взагалі припускалося, що однозначна й неперервна функція однієї змінної завжди має першу похідну, значення якої може бути не визначеним або нескінченно великим лише в окремих точках. Навіть в листах Гаусса, Коші, Діріхле мені не вдалося однозначно виявити, що ці математики, які піддавали суровій критиці все у своїй науці, висловлювали інші погляди. Як я дізнався від деяких слухачів Рімана, він вперше висловив думку, що це припущення хибне, і наприклад функція, представлення нескінченним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2\cdot x)}{n^2}$$

не підтверджує такого припущення. Проте, доведення Рімана не було опубліковано, але широко розповсюджувалось, і математики вважали, що достатньо довести існування функції, яка в будь – якому завгодно малому інтервалі має точки в яких вона не диференційовна. Легко довести, що існує функції такого роду, які не мають похідної ні для одного свого аргументу. Доведення того, що функція такого вигляду є функцією представленою тригонометричним рядом, мені все ж таки здається важким…» [6, с.71-72] .

Тільки у 1918 році Харді показав, що побудована функція Рімана не має скінченної похідної ні в якій точці $\varepsilon\cdot\pi$, де ε – раціональне або ірраціональне число вигляду $\frac{2m}{4n+1}$, $\frac{2m+1}{2(2n+1)}$, де m, n – цілі, і зробив узагальнення прикладу Рімана [4,с.104]. У 1970 році Герберт показав відсутність скінченної похідної функції Рімана $\varepsilon\cdot\pi$, де ε – раціональне число вигляду $\frac{2m+1}{2^n}$ ($m, n\in N$) і рівність похідної $\frac{1}{2}$ в точках $\varepsilon\cdot\pi$, коли ε є раціональним числом з непарним знаменником і чисельником.

У 1873 році Шварц побудував наступний приклад неперервної монотонної функції, що немає похідної на всі щільній множині точок:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(2^n\cdot x)}{4^n},$$

де $\varphi(x)=[x]-\sqrt{x-[x]},\ x<0,\ [x]$ – ціла частина x. Цю функцію Шварц вважав недеференційовною, але як виявилося пізніше вона майже скрізь має скінченну похідну.

Проте побудований у 1871 році приклад функції Вейєрштрасса раз і на завжди вирішив суперечку в існуванні недиференційоних функцій

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cdot\cos(b_n\cdot\pi x)$$

де $0<a<1$, b – непарне ціле число, більше 1 і таке, що $a\cdot b<1+\frac{3}{2\pi}$. Значно пізніше було виявлено, що функція Вейєрштрасса має похідну рівну $+\infty$ або $-\infty$ на нескінченній скрізь щільній навіть незчисленній множині точок.

Бажання побудувати більш широкі класи неперервних недиференційовних функцій призвело до питання про «масивність» множини таких функцій у просторі всіх неперервних функцій. У 1931 році, використовуючи метод категорій, на це питання незалежно і різними способами знайшли відповіді Банах і Мазуркевич, довівши, що майже всі, в розумінні категорій Бера, неперервні функції ніде недиференційовані. Множина таких функцій має категорію Бера у просторі $C[0:1]$ всіх неперервних на $[0:1]$ функцій з рівномірною метрикою. Доведено, що ця множина утворює коаналітичну неборилевську підмножину простору $C[0:1]$.

Сьогодні існує багато прикладів ніде не диференційовних функцій, для означення яких виокремлюють три основних підходи. Перший підхід полягає в узагальненні функції Вейєрштрасса. Історично першим це зробив Т. Такаґі у 1903 році, функція має наступний вигляд:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n \cdot x)}{2^n},$$

де $\varphi(x) = inf|x - m|$ – періодична функція, період якої дорівнює 1. Згодом аналогічні функції побудував К.Кнопп (1918), Ж. де Рам (1957) та інші.

Детально розглянемо приклад неперервної ніде не диференційованої функції, що є модифікацією прикладу функції, побудованого в 1930 році голландським математиком Ван-дер-Варденом [3].

Нехай $f_0(x)$, $x \in P$ – функція, що дорівнює відстані від точки x до найближчої цілочисельної точки, тобто

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{при } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 - x, \text{при } \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases}$$

де $f_0(x+1) = f_0(x)$, для $\forall x \in R$.

Розглянемо властивості даної функції. Зрозуміло, що $f_0(x)$ – функція, неперервна на всій числовій осі, період дорівнює 1, лінійна на кожному відрізку $\left[\frac{s-1}{2}; \frac{s}{2}\right]$, де $s \in Z$, і кутовий коефіцієнт графіка цієї функції на кожному такому відрізку дорівнює ± 1.

Покладемо

$$f_n(x) = \frac{f_0(4^n x)}{4^n} \text{ для } n > 0.$$

Очевидно, що $f_n(x)$ –відстань між точкою x і прилеглою до неї точкою $m \cdot 4^n$, де $m \in Z$. Для кожного $x \in N$, $f_n(x)$ – неперервна періодична з періодом $\frac{1}{4^n}$ і максимальним значенням $\frac{1}{2\cdot 4^n}$ функція лінійна на кожному відрізку $\left[\frac{s_n-1}{2\cdot 4^n}; \frac{s_n}{2\cdot 4^n}\right]$, $s_n \epsilon Z$, і кутовий коефіцієнт графіка цієї функції на кожному такому відрізку дорівнює ± 1.

Для будь-якого дійсного числа x визначимо

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_0(4^n x)}{4^n}.$$

Так як $0 \le f_n(x) \le \frac{1}{4^n}$, то ряд, що визначає $f(x)$ рівномірно сходиться до R за ознакою Вейєрштрасса і з неперервності $f_n(x)$ слідує неперервність $f(x)$.

Ніде не диференційовність функції Ван-дер-Вардена доводиться наступним чином. Нехай x –довільне дійсне число. Існує послідовність вкладених один в одного відрізків

$$\Delta_n = \left[\frac{s_n - 1}{2 \cdot 4^n}; \frac{s_n}{2 \cdot 4^n}\right], s_n \epsilon Z,$$

що містять точку x.

На такому відрізку Δ_n , довжина якого $\frac{1}{2\cdot 4^{n+1}}$, завжди знайдеться така точка x_n така, що $|x_n - x| = \frac{1}{4^{n+1}}$. Склавши відповідні співвідношення для $k > n$ і $k \le n$, знаходиму їх суму і отримуємо

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)$$

є цілим числом, яке парне при непарному n і непарне при парном n. Відповідно, кінцева границя різностороннього даного відношення при $n \to \infty$ не існує, а тому не існує і $f(x)$.

Другий підхід є геометричним і базується на системі ітерованих функцій [3]. Означення функції через побудову графіка є основним, зокрема аналітичне подання є другорядною задачею. Поняття класу ітерованих функцій ввів Дж.Хатчинсон, а пізніше це питання дослідили і розвинули М.Бернелі, Д.П.Хардін та ін.

Третій підхід до побудови фрактальних неперервних функцій полягає у встановленні певного зв'язку між цифрами аргументу (поданого в певній системі числення) і цифрами відповідних значень, записаних в іншій системі числення. Ідея використовувати для задання функцій різні способи зображення чисел і певним чином перетворювати елементи цих зображень з'являється у роботах В.Серпінського , А.Сінгха, В.Вундерліха, Дж.Кінні та ін.

Класи неперервних ніде не диференційовних функцій постійно розширюються і поповнюються новими представниками. Але досі залишається відкритою загальна проблема зручного аналітичного задання таких функцій і ефективного апарату їх дослідження.

Список використаних джерел

1. Безикович А.С. Исследование непрерывных функций в связи с вопросом об их дифференцируемости // Мат. Сб. – 1924. – №4. – С. 529-556.
2. Медвєдєв Ф.А. Очерки истории теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1975. – 248 с.

3. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М.В. Працьовитий. – Київ, Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 47 с.
4. Турбин А.Ф. Фрактальные множества. Функции распределения / А.Ф. Турбин, Н.В. Працевитый. – К.: Наукова думка, 1992. – С.104-108.
5. Waerden B.L. Van der. Ein einfaches Deispiel einer nicht differentierbaren steligen Funktion // Math. Z. – 1930. – 32. – S. 474-475.
6. Weierstrass K. Uber contnurliche Funktionen ienrs reelen Arguments die fur keine Werth des letziert einen bestimmten Differentialquotienten besitzen (1872) // Math. Werke. – 1895. – Bd. 2. – S. 71-74.

References

1. Bezikovich A.S. Issledovanie nepreryvnyh funkcij v svjazi s voprosom ob ih differenciruemosti // Mat. Sb. – 1924. – №4. – S. 529-556. (in Russian)
2. Medvєdєv F.A. Ocherki istorii teorii funkcij dejstvitel'nogo peremennogo. – M.: Nauka, 1975. – 248 s. (in Russian)
3. Pratsovytyi M.V. Fraktalnyi pidkhid u doslidzhenniakh synhuliarnykh rozpodiliv / M.V. Pratsovytyi. – Kyiv, Natsionalnyi pedahohichnyi universytet im. M.P. Drahomanova, 1998. – 47 s. (in Ukrainian)
4. Turbin A.F. Fraktal'nye mnozhestva. Funkcii raspredelenija / A.F. Turbin, N.V. Pracevityj. – K.: Naukova dumka, 1992. – C. 104-108. (in Russian)
5. Waerden B.L. Van der. Ein einfaches Deispiel einer nicht differentierbaren steligen Funktion // Math. Z. – 1930. – 32. – S. 474-475.
6. Weierstrass K. Uber contnurliche Funktionen ienrs reelen Arguments die fur keine Werth des letziert einen bestimmten Differentialquotienten besitzen (1872) // Math. Werke. – 1895. – Bd. 2. – S. 71-74.

APPROACHES TO THE CONSTRUCTION OF CONTINUOUS NOWHERE DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Yurii Khvorostina, Svitlana Hilobok

Sumy Makarenko State Pedagogical University, Ukraine

Abstract. *In the article the making connections between the concepts of continuity and nowhere differentiable, the history of the formation of the concept of continuous nowhere differentiable functions, the first attempt to build functions of this type. We analyze three main approaches to the definition of continuous nowhere differentiable functions: the first approach is a generalization of Weierstrass functions; the second approach is based on geometric and iterated function system; the third approach is to establish some connection between the numbers i argument numbers corresponding values recorded in another numeration system. We consider the properties of continuous real functions of a real variable with complex behavior of local means of fractal analysis and fractal geometry, in particular, provides an overview of the Va-der-Worden's function and study the properties of this function. Also indicated the relevance of research and practical application of continuous nowhere differentiable functions.*

Key words: *the continuous nowhere differentiable function, the Va-der-Worden's function, an integrated function, fractal function, singular functions.*