Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Мартиненко О.В., Чкана Я.О. Про різні методи знаходження скінченних сум // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Випуск 4(14). – С. 59-67.

Martynenko E.V., Chkana Ya. O. On Different Methods of Calculating Final Sums // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2017. – Issue 4(14). – P. 59-67.

УДК 517.52(075.8)

О.В. Мартиненко, Я.О. Чкана
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
elenamartova120@gmail.com, chkana_76@ukr.net

ПРО РІЗНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ СКІНЧЕННИХ СУМ

Анотація. *При дослідженні різних наукових аспектів можна отримати одну й ту ж саму математичну модель, яка відповідає певній математичній задачі, якщо розглядати її з точки зору формальної постановки. Не менш актуальним є питання відшукання різних методів її розв'язування і вибору в певному розумінні оптимального з низки можливих. Ця проблема завжди цікавила математиків. Однією з таких задач є задача на знаходження скінченних сум, формулювання якої зустрічається в математичному аналізі, дискретній математиці, теорії ймовірностей тощо. Завдання на підсумовування пропонують на математичних олімпіадах різних рівнів.*

У роботі розглянуто різні методи розв'язування задачі знаходження скінченних сум, а саме: метод елементарних перетворень над виразами, методи диференціального та інтегрального числень, метод зведення до вже відомих сум, застосування скінченних різниць та різницевих рівнянь, теорії комплексних чисел. Описано можливості й особливості їх застосування, також обґрунтовано доцільність вибору обраного методу в умовах окремої задачі.

Ключові слова: *метод, задача, сума, підсумовування, рекурентність, різницеве рівняння.*

Постановка проблеми та аналіз актуальних досліджень. Кожна задача потребує правильного вибору методу її розв'язування, тому важливо для кожного класу задач виділити так званий «свій» метод. Ця проблема завжди цікавила математиків. Але очевидно, що при описанні зовсім різних процесів ми можемо прийти до однієї математичної моделі, яка виражається у формі задачі, тому не менш актуальним є питання відшукання різних методів для однієї задачі з точки зору її загальної постановки.

До знаходження скінченних сум нас зокрема приводять потреби самої математики та дослідження багатьох явищ у природознавстві; завдання на підсумовування завжди пропонують на математичних олімпіадах різних рівнів. Існує багато методів розв'язування даної задачі, кожен з них є самодостатнім, відноситься до певного розділу математики і потребує відповідних знань, гарного володіння технікою тотожних перетворень, розуміння особливостей його застосування в даних умовах. Нажаль, описання окремих методів підсумовування подано в різній математичній літературі, тому розуміння їх вцілому, як і використання, є досить проблематичним.

Мета статті. Розглянути різні методи розв'язування задачі знаходження скінченних сум, обґрунтувати доцільність їх вибору та описати особливості застосування, показати можливості та переваги кожного з методів в умовах окремої задачі.

Виклад основного матеріалу.

1. Методи, що базуються на властивостях скінченних сум

В основу цього методу покладено прийом перегрупування членів із подальшим вивченням поведінки відповідних сум. Нехай $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, тоді

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}a_k=a_0+\sum_{k=1}^{n+1}a_k=[k\to k+1]=a_0+\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}$$

або $S_n=a_0+\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}-a_{n+1}$. Очевидно, що сума $\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}$ формально схожа на S_n.

Отже, якщо ми зможемо застосовуючи властивості скінченних сум виразити $\sum_{k=0}^{n}a_{k+1}$ через S_n, то, виконавши відповідні тотожні перетворення виразів, отримаємо замкнений відносно S_n вираз для шуканої суми.

Приклад. Знайти суму квадратів перших n натуральних чисел.

Позначимо через $S_n=\sum_{k=0}^{n}k^3$ і розглянемо $S_n+(n+1)^3$. Маємо, що

$$S_n+(n+1)^3=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3=\sum_{k=0}^{n}\left(k^3+3k^2+3k+1\right)=S_n+3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1=S_n+3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1).$$

Отже, $S_n+(n+1)^3=S_n+3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$, звідси

$$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Приклад. Знайти $\sum_{k=0}^{n}k\cdot 2^k$.

Знаходження скінченних сум такого типу значно спростить застосування спеціальних функцій – квазімногочленів $f(x)=x\cdot a^x$. Під квазімногочленами в математиці прийнято вважати функції, що є лінійними комбінаціями добутків многочленів та показникових функцій. Виділення їх в окрему математичну структуру обумовлено кількома причинами, серед яких на особливу увагу заслуговує можливість описання за допомогою квазімногочленів реальних фізичних, хімічних та біологічних процесів.

Нехай $S_n=\sum_{k=0}^{n}k\cdot 2^k$. За загальною схемою даного методу маємо, що

$$S_n+(n+1)\cdot 2^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot 2^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}k\cdot 2^{k+1}+\sum_{k=0}^{n}2^{k+1}=$$

$$=2S_n+\frac{2^{n+2}-2}{2-1}=2S_n+2^{n+2}-2.$$

Отже, $S_n=\sum_{k=0}^{n}k\cdot 2^k=2^{n+1}(n-1)+2$.

2. Застосування диференціального та інтегрального числення

Часто при знаходженні скінченних сум безпосереднє виконання тотожних перетворень є досить складним, але для даного виразу можна побудувати функцію $f(x)$, де зміст змінної x визначається умовами конкретної задачі. Ця функція є такою, щоб її похідна $f'(x)$ або первісна $F(x)$ краще спрощувались. Після виконання відповідних перетворень у $f'(x)$ або в $F(x)$, потрібно повернутися до вихідної функції $f(x)$ і початкового значення змінної x у $f(x)$.

Приклад. Подати суму $1+2^2\cdot 3+...+2^{2n-2}\cdot(2n-1)$ у згорнутому вигляді.

Очевидно, що змінною x ми позначаємо один і той же вираз, що входить до кожного доданка, тому потрібно відшукати інваріант, притаманний всім доданкам суми. В умовах даної задачі це - число 2. Розглянемо функцію $f(x)=1+3x^2+5x^4+...+(2n-1)x^{2n-1}$ і знайдемо її первісну: $F(x)=x+x^3+x^5+...+x^{2n-1}$. Члени цієї суми складають геометричну прогресію із знаменником $q=x^2$, сума її перших n членів дорівнює $F(x)=\frac{x\left(x^{2n}-1\right)}{x^2-1}$.

Повернемося до вихідної функції $f(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\frac{(2n-1)x^{2n+2}-(2n+1)x^{2n}+x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2},\ x\neq\pm 1.$$

Звідси, при $x=2$ отримаємо значення шуканої суми:

$$1+2^2\cdot 3+\ldots+2^{2n-2}\cdot(2n-1)=\frac{(2n-1)\cdot 2^{2n+2}-(2n+1)\cdot 2^{2n}+5}{9}=\frac{2^{2n}(6n-3)+5}{9}.$$

У деяких задачах потрібно знайти скінчену суму доданків, що містять дві змінних, одну з яких можна вважати певним параметром. У цьому випадку іноді доцільно застосувати метод знаходження сум диференціюванням по параметру.

Приклад. Обчислити суму $\sum\limits_{k=1}^{n} ka^k,\ a\neq 1$.

В умовах даної задачі будемо вважати параметром основу a. Маємо $\sum\limits_{k=1}^{n} ka^k=a\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a^k\right)'_a=a\left(\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}\right)'_a=\frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}$.

Приклад. Обчислити суму $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cos kx,\ x\neq 2\pi m,\ m\in Z$.

Вважаючи параметром змінну x отримаємо, що

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos kx=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right)=\frac{d}{dx}\left(\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-1}\right)=$$

$$=(n+1)\sin\frac{(2n+1)x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{-1}-\sin^2\frac{(n+1)x}{2}\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-1}.$$

3. Геометрична інтерпретація сум

Можливість інтерпретувати алгебраїчні задачі мовою геометричних об'єктів у деяких випадках значно спрощує їх розв'язування, робить його більш наочним. Методи, в основу яких покладена геометрична інтерпретація, використовують властивість адитивності сум; ця властивість також притаманна і поняттю площі.

Приклад. Знайти суму квадратів перших n натуральних чисел.

Розглянемо прямокутники зі сторонами $a=1, b=k^3,\ k=\overline{1,n+1}$ (рис. 1).

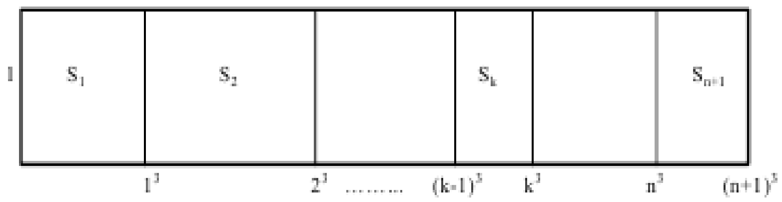

Рис. 1

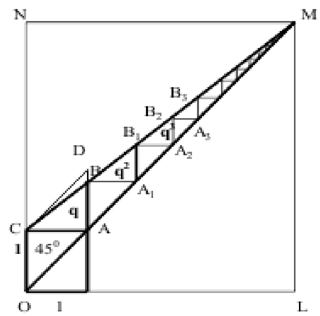

Рис. 2

Очевидно, що $S_1+S_2+\ldots+S_n=(n+1)^3\cdot 1$.

За побудовою $S_k=k^3-(k-1)^3$, тому попередню рівність перепишемо у вигляді :

$$1+\left(2^3-1^3\right)+\left(3^3-2^3\right)+\ldots+\left((n+1)^3-n^3\right)=(n+1)^3\cdot 1$$

Оскільки $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$, то отримаємо, що

$$1+\left(3\cdot 1^2+3\cdot 1+1\right)+\left(3\cdot 2^2+3\cdot 2+1\right)+\left(3n^2+3n+1\right)=(n+1)^3.$$

Перегрупуємо члени в останній рівності:

$$3\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+3(1+2+\ldots+n)+(n+1)=(n+1)^3,$$

звідси $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-\frac{3}{2}n(n+1)-(n+1)\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Приклад. Знайти суму нескінченної спадної геометричної прогресії зі знаменником $|q|<1$.

Розглянемо рисунок 2: довжини відрізків $OC=1$, $AB=q$, $A_1B_1=q^2$, $A_2B_2=q^3$ і т.д. складають геометричну прогресію. Ці рівності слідують з подібності відповідних трикутників. Наприклад, $\Delta ACB \sim \Delta A_1BB_1$, тому $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1B}{AC}$; $\frac{A_1B_1}{q}=\frac{q}{1}\Rightarrow A_1B_1=q^2$.

Аналогічними міркуваннями доводимо, що $A_kB_k=q^k$, $k=2,3,\ldots$.

З умови $OC+AB+A_1B_1+\ldots+A_nB_n+\ldots=ML$ випливає, що довжина відрізка ML дорівнює шуканій сумі. Для знаходження ML скористаємось подібністю трикутників $\Delta BCL \sim \Delta OCM$ та $\Delta ACL \sim \Delta LOM$:

$\frac{BD}{OC}=\frac{CD}{OM}=\frac{AD}{ML}$; $\frac{BD}{OC}=\frac{AD}{ML}$, отже $ML=\frac{OC\cdot AD}{BD}=\frac{1}{1-q}$.

Сума нескінченної спадної геометричної прогресії зі знаменником $|q|<1$ буде визначатись формулою

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots=\frac{1}{1-q},\ |q|<1.$$

Зауважимо, що метод геометричної інтерпретації в даному прикладі був застосований для знаходження нескінченної суми, оскільки саме він давав «красиве» і наочне розв'язання.

Також цікавий метод знаходження скінченних сум з використанням геометричної інтерпретації визначеного інтеграла був описаний в роботі [1].

4. Зведення шуканої суми до вже відомих сум

Приклад. Знайти суму $\frac{1^2}{1}+\frac{1^2+2^2}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2}{3}+\ldots+\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n}$.

Очевидно, що чисельник k-го доданку є сумою квадратів k перших натуральних чисел, тому, за отриманим вище співвідношенням, k-й доданок можна подати у вигляді:

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+k^2}{k}=\frac{1}{k}\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{2k^2+3k+1}{6}=\frac{k^2}{3}+\frac{k}{2}+\frac{1}{6}.$$

Застосувавши цю формулу до кожного доданку суми, отримаємо, що

$$\frac{1^2}{1}+\frac{1^2+2^2}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2}{3}+\ldots+\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n}=\left(\frac{1^2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{2^2}{3}+\frac{2}{2}+\frac{2}{6}\right)+$$

$$+\left(\frac{3^2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{3}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{n^2}{3}+\frac{n}{2}+\frac{n}{6}\right)=\frac{1}{3}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+\frac{1}{2}(1+2+\ldots+n)+n\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n}{36}\left(4n^2+15n+17\right).$$

Приклад. Знайти суму $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+100\cdot 2^{99}$. [4]

Позначимо через S шукану суму та виконаємо наступні перетворення:

$$S=1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+100\cdot 2^{99}=1+(1+1)\cdot 2+(1+2)\cdot 2^2+\ldots+$$
$$+(1+99)\cdot 2^{99}=\left(1+2+2^2+\ldots+2^{99}\right)+2\left(1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\ldots+99\cdot 2^{98}\right)=$$
$$=2^{100}-1+2\left(S-100\cdot 2^{99}\right).$$

Приходимо до рівняння відносно суми S:

$$S=2^{100}-1+2\left(S-100\cdot 2^{99}\right).$$

Звідси $S=99\cdot 2^{100}+1$.

5. Суми та рекурентні послідовності

Нехай задано деяку послідовність дійсних чисел $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$. Розглянемо суму її членів $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, яку можна подати виразом $S_n=S_{n-1}+a_n$ або у вигляді рекурентного співвідношення

$$\begin{cases}S_1=a_1,\\ S_k=S_{k-1}+a_k,\ k>0\end{cases} \quad (1)$$

Наприклад, для геометричної прогресії можна скласти дві рекурентності:

1) $\begin{cases}S_1=a,\\ S_k=S_{k-1}+aq^{k-1},\end{cases}$

2) $$\begin{cases} S_1 = a, \\ S_2 = aq, \\ S_{k+2} = (1+q)S_{k-1} - qS_k. \end{cases}$$

Відмітимо, що в першій рекурентності номер деякого елемента суми k можна вважати параметром, її вигляд зумовлює застосування так званого репертуарного методу розв'язання рекурентних рівнянь. У другій рекурентності третє співвідношення є різницевим рівнянням.

При розв'язуванні рекурентності за допомогою репертуарного методу застосовується метод невизначених коефіцієнтів.

Нехай рекурентність (1) задана у вигляді

$$\begin{cases} S_1 = \alpha, \\ S_k = S_{k-1} + \beta + \gamma k,\ k > 0, \end{cases} \tag{2}$$

де a_k – загальний член суми, який дорівнює сумі сталої величини і деякого виразу, кратного k. Загальний розв'язок такої рекурентності шукаємо у вигляді $S_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma$, де $A(n), B(n), C(n)$ – невизначені коефіцієнти. Для їх знаходження зробимо послідовні підстановки:

1) якщо покласти $S_n = 1$, то $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$ і $A(n) = 1$;

2) при $S_n = n$ отримаємо, що $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0$ і $B(n) = n$;

3) при $S_n = n^2$ отримаємо, що $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = 2$ і $C(n) = \dfrac{n^2+n}{2}$.

Отже $S_n = \alpha + \beta n + \gamma \dfrac{n^2+n}{2}$.

Приклад. Знайти суму $\sum\limits_{k=1}^{n}(a+bk)$.

Цю суму можна подати через рекурентне співвідношення (2) у вигляді

$$\begin{cases} S_1 = a, \\ S_k = S_{k-1} + a + bk. \end{cases}$$

Звідси маємо, що $\alpha = a,\ \beta = a,\ \gamma = b$ і

$$S_n = a + an + b\frac{n^2+n}{2} = \frac{(n+1)(2a+nb)}{2}.$$

Розглянемо рекурентність

$$\begin{cases} S_1 = \alpha, \\ S_k = S_{k-1} + (-1)^k\left(\beta + \gamma k + \delta k^2\right),\ k > 0, \end{cases}$$

її загальний розв'язок шукатимемо у вигляді $S_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta$, де $A(n), B(n), C(n), D(n)$ – невизначені коефіцієнти. Використовуючи допоміжні підстановки, отримаємо:

1) якщо $S_n = 1$, то $A(n) = 1$;

2) при $S_n = (-1)^n$ отримаємо, що $A(n) + 2B(n) = (-1)^n$;

3) якщо $S_n = (-1)^n n$, то $-B(n) + 2C(n) = (-1)^n n$;

4) для $S_n = (-1)^n n^2$ будемо мати, що $B(n) - 2C(n) + 2D(n) = (-1)^n n^2$.

Розв'язавши систему відносно невідомих коефіцієнтів, знайдемо шукану суму:

$$S_n = \alpha + \frac{(-1)^n - 1}{2}\beta + \frac{1}{4}\left((-1)^n(1+2n) - 1\right)\gamma + (-1)^n\frac{n^2+n}{2}\delta.$$

Наприклад, сума $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$ (тут $\alpha = \beta = \gamma = 0, \delta = 1$) буде дорівнювати $S_n = (-1)^n\dfrac{n^2+n}{2}$.

Репертуарний метод не є універсальним, тому постає питання, чи не можна якимось чином його узагальнити для застосування до більш широкого класу сум. Відповідь на це запитання дає наступне твердження [5]: нехай задано послідовність $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Якщо існує натуральне число k і числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ такі, що

$$a_{n+k} = \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k a_n,\ (n \geq k \geq 1), \tag{3}$$

то

$$S_{n+k+1} = (1+\alpha_1)S_{n+k} + (\alpha_2 - \alpha_1)S_{n+k-1} + \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1})S_{n+1} - \alpha_k S_n. \tag{4}$$

Отже, коли послідовність (a_n) може бути задана рекурентно виразом (3), то послідовність n–тих частинних сум задовольняє рекурентне рівняння (4), яке вже не містить членів послідовності в явному вигляді. Розв'язуванням таких рівнянь займається теорія скінченних різниць, на її застосуванні ми зупинимося далі. На даному етапі нашою задачею є зведення суми до рекурентного рівняння k-го порядку (порядок рекурентного рівняння дорівнює кількості членів послідовності, через які виражається кожний наступний її член) .

Приклад. Побудувати рекурентні рівняння (3) та (4) для

1) арифметичної прогресії;
2) геометричної прогресії;
3) послідовності квадратів натуральних чисел;
4) послідовності чисел Фібоначчі.

1) За означенням арифметичної прогресії $a_{n+1} = a_n + d$, де d – різниця прогресії. Зведемо це рівняння до типу (3). Для цього достатньо розглянути систему двох рекурентних рівнянь $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d \\ a_{n+2} = a_{n+1} + d \end{cases}$, з якої отримаємо співвідношення $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. За (3) маємо, що $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0$ і $S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n$.

2) Для геометричної прогресії $a_{n+1} = a_n q$, тому очевидно, що $\alpha_1 = q, \alpha_2 = 0$. Рекурентне рівняння другого порядку для суми геометричного ряду має вигляд: $S_{n+2} = (1+q)S_{n+1} - qS_n$.

3) Розглянемо послідовність, загальний член якої $a_n = n^2$. Запишемо систему рекурентних рівнянь

$$\begin{cases} a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = a_n + 2n + 1, \\ a_{n+2} = (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2 = (n+1)^2 + 2n + 3 = a_{n+1} + 2n + 3, \end{cases}$$

звідки $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ і $a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2$. З різниці двох останніх виразів $a_{n+3} - a_{n+2}$ отримаємо рекурентне співвідношення потрібного вигляду: $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$, де $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -3, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 0$. На основі цього рекурентне співвідношення для сум набуває вигляду

$$S_{n+4} = 4S_{n+3} - 6S_{n+2} - 4S_{n+1} - S_n.$$

4) Послідовність чисел Фібоначчі задається рекурентним рівнянням $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, з якого маємо, що $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$, а вираз для суми $S_{n+3} = 2S_{n+2} - S_n$.

Розглянуті нами вище методи підсумовування є досить штучними, кожен з них потребує виконання своїх тотожних перетворень. З іншого боку, розв'язування кожного окремого прикладу має певну специфіку, що безпосередньо впливає на вибір методу. Тому цілком природньо виникає питання про знаходження деякого загального методу розв'язування широкого класу задач на знаходження сум. Одним із таких є метод скінченних різниць, що ґрунтується на теорії різницевих рівнянь.

З точки зору різницевих рівнянь рекурентна послідовність порядку k є розв'язком лінійного однорідного різницевого рівняння k–го порядку зі сталими коефіцієнтами. Задання перших k членів рекурентної послідовності рівносильне заданню початкових умов задачі Коші. Теорія розв'язування лінійних однорідних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами є аналогічною теорії розв'язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь (ЛОДР) зі сталими коефіцієнтами, вона дозволяє знайти формулу загального члена рекурентної послідовності.

Нехай маємо рекурентне співвідношення для суми

$$S_{n+k+1} = (1+\alpha_1)S_{n+k} + (\alpha_2 - \alpha_1)S_{n+k-1} + \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1})S_{n+1} - \alpha_k S_n$$

або

$$S_{n+k+1} - (1+\alpha_1)S_{n+k} - (\alpha_2 - \alpha_1)S_{n+k-1} - \ldots - (\alpha_k - \alpha_{k-1})S_{n+1} + \alpha_k S_n = 0.$$

Рівняння $\lambda^{k+1} - (1+\alpha_1)\lambda^k - (\alpha_2 - \alpha_1)\lambda^{k-1} - \ldots - (\alpha_k - \alpha_{k-1})\lambda + \alpha_k = 0$ називається характеристичним рівнянням. Легко переконатися, що $\lambda = 1$ є розв'язком цього рівняння.

Аналогічно теорії ЛОДР-n можна побудувати загальний розв'язок різницевого рівняння в залежності від коренів характеристичного рівняння.

1) Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in R$ і $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$, тоді загальний розв'язок матиме вигляд $C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \ldots C_k\lambda_k^n$;

2) якщо $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in R$ є коренями кратності $s_1, s_2, \ldots, s_k$ відповідно, то кореню λ_i, $i = 1, 2, \ldots k$ відповідатиме сума $\left(C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \ldots + C_{s_i} n^{s_i - 1}\right)\lambda_i^n$;

3) якщо λ_1, λ_2 – пара спряжених комплексних чисел, то загальний розвязок різницевого рівняння буде мати вигляд $\rho^n(C_1\cos\alpha n + C_2\sin\alpha n)$, де ρ – модуль, α – аргумент одного з коренів [3].

Приклади. 1) Раніше було з'ясовано, що різницеве рівняння для суми геометричної прогресії можна подати як $S_{n+2}=(1+q)S_{n+1}-qS_n$ або $S_{n+2}-(1+q)S_{n+1}+qS_n=0$. Його характеристичне рівняння $\lambda^2-(1+q)\lambda+q=0$ має корені $\lambda_1=q, \lambda_2=1$, а загальний розв'язок запишеться у вигляді $S_n=C_1q^n+C_2$. Коефіцієнти C_1,C_2 знаходимо з початкових умов $S_1=1, S_2=1+q$: $c_1=\dfrac{1}{q-1}$, $c_2=\dfrac{1}{1-q}$. Отже, остаточно отримаємо, що $S_n=\dfrac{1}{q-1}q^n+\dfrac{1}{1-q}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

2) Різницеве рівняння для знаходження суми членів арифметичної прогресії має вигляд $S_{n+3}=3S_{n+2}-3S_{n+1}+S_n$. Число $\lambda_{1,2,3}=1$ є трикратним коренем відповідного характеристичного рівняння $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$, тому вираз $S_n=(C_1+C_2n+C_3n^2)\cdot 1^n=C_1+C_2n+C_3n^2$ задає загальний розв'язок різницевого рівняння. Враховуючи, що $S_1=a,\ S_2=a+d,\ \ S_3=a+2d$, отримаємо такі значення сталих: $C_1=0$, $C_2=a-\dfrac{1}{2}d$, $C_3=\dfrac{d}{2}$. Звідси

$$S_n=\left(a-\frac{1}{2}d\right)n+\frac{1}{2}dn^2=\frac{2a+(n-1)d}{2}\cdot n.$$

3) Для суми послідовності чисел Фібоначчі було отримане співвідношення $S_{n+3}=2S_{n+2}-S_n$. Коренями характеристичного рівняння $\lambda^3-2\lambda^2+1=0$ є числа $1,\ \dfrac{1+\sqrt5}{2},\ \dfrac{1-\sqrt5}{2}$, отже, вираз для суми має вигляд $S_n=C_1\cdot 1^n+C_2\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+C_3\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$.

З початкових умов $S_1=0,\ S_2=1,\ S_3=2$ знайдемо, що $C_1=-1,\ C_2=\dfrac{5+\sqrt5}{10}$, $C_2=\dfrac{5-\sqrt5}{10}$, тому

$$S_n=\left(\frac{5+\sqrt5}{10}\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\left(\frac{5-\sqrt5}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n-1=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-1.$$

Приклад. Обчислити суму $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\alpha$.

Маємо $u_n=\sin n\alpha$, де $\alpha\neq\pi m, m\in Z$. Тоді

$$u_{n+1}=\sin(n+1)\alpha=\sin n\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos n\alpha=u_n\cos\alpha+\sin\alpha\cos n\alpha$$

і

$$u_{n+2}=\sin(n+2)\alpha=\sin n\alpha\cos 2\alpha+\cos n\alpha\sin 2\alpha=u_n-2\sin^2\alpha\cdot u_n+\sin 2\alpha\cos n\alpha.$$

Якщо друге співвідношення помножити на $-2\cos\alpha$ і всі три додати, то отримаємо рекурентне рівняння $u_{n+2}-2\cos\alpha\cdot u_{n+1}+u_n=0$ та відповідне рекурентне співвідношення для суми при $\alpha_1=2\cos\alpha, \alpha_2=-1, \alpha_3=0$:

$$S_{n+3}=(1+2\cos\alpha)S_{n+2}-(1+\cos\alpha)S_{n+1}+S_n.$$

Характеристичне рівняння $\lambda^3-(2\cos\alpha+1)\lambda^2+(2\cos\alpha+1)\lambda-1=0$ має корені $\lambda_1=1, \lambda_{2,3}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$, а замкнений вираз для суми матиме вигляд $S_n=C_1+C_2\sin n\alpha+C_3\cos n\alpha$. Для знаходження невідомих коефіцієнтів C_1,C_2,C_3 використаємо початкові умови $S_0=0, S_1=\sin\alpha, S_2=\sin\alpha+\sin 2\alpha$.

Розв'язком відповідної системи

$$\begin{cases} C_1+C_3=0,\\ C_1+C_2\sin\alpha+C_3\cos\alpha=\sin\alpha,\\ C_1+C_2\sin 2\alpha+C_3\cos 2\alpha=\sin\alpha+\sin 2\alpha \end{cases}$$

є такі значення сталих: $C_1=\dfrac{1+\cos\alpha}{2\sin\alpha}$, $C_2=\dfrac{1}{2}$, $C_3=-\dfrac{1+\cos\alpha}{2\sin\alpha}$.

Остаточно отримаємо, що

$$S_n = \frac{1}{2}\sin n\alpha + \frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos n\alpha)}{2\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Одним із спеціальних методів підсумовування можна вважати використання антирізниць. Поняття антирізниці є в певному розумінні аналогом поняття первісної. Антирізницею $\Delta^{-1}f(x)$ функції $f(x)$ будемо називати таку функцію $F(x)$, що $\Delta F(x) = f(x)$, де під $\Delta F(x)$ розуміємо скінченну різницю функції $F(x)$. Знайшовши різниці для всіх основних елементарних функцій, можна скласти таблицю антирізниць і вивести певний аналог формули Ньютона-Лейбніца [3]:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = F(k)\Big|_0^n = F(n) - F(0).$$

Приклад. Знайти суму

$$arctg\frac{1}{1+1+1^2} + arctg\frac{1}{1+2+2^2} + ... + arctg\frac{1}{1+n+n^2}.$$ **[4]**

Оскільки $\Delta^{-1} arctg\frac{1}{1+x+x^2} = arctg$, то

$$\sum_{k=1}^{n} arctg\frac{1}{1+k+k^2} = \Delta^{-1} arctg\frac{1}{1+k+k^2}\Bigg|_1^{n+1} = arctg\, k\Big|_1^{n+1} = arctg(n+1) - arctg1 = arctg(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

При знаходженні деяких сум доцільно застосувати формулу $\sum_{i=n_0}^{n}\Delta a_i b_i = a_i b_i\Big|_{n_0}^{n+1} - \sum_{i=n_0}^{n} a_{i+1}\Delta b_i$, яка називається формулою підсумовування частинами і є певним аналогом відомої формули інтегрального числення, а також іншим записом перетворення Абеля [7].

Приклад. Обчислити суму $S_n = \sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha$, $\alpha \neq 2\pi m, m \in Z$.

Оскільки функція $-\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ є антирізницею для $\sin\alpha x$, то застосувавши формулу підсумовування частинами, отримаємо, що

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha = \sum_{k=1}^{n}\Delta\left(-\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right) = -\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\Bigg|_1^{n+1} = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

6. Застосування теорії комплексних чисел

Одним із цікавих методів підсумовування є використання теорії комплексних чисел. Покажемо його на прикладі обчислення суми $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2}\right)^k \sin\frac{\pi k}{4}$.

Розглянемо комплексне число $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Маємо, що

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2}\right)^k \sin\frac{\pi k}{4} = \mathrm{Im}\left(z + z^2 + z^n\right) = \mathrm{Im}\frac{z\left(z^n - 1\right)}{z-1} =$$

$$= \mathrm{Im}\frac{(1+i)\left((1+i)^n - 1\right)}{i} = \mathrm{Im}\left((1-i)\left((1+i)^n - 1\right)\right) =$$

$$= 1 + \mathrm{Im}\left(\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\frac{\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4}\right)\right) =$$

$$= 1 + \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin\frac{\pi(n-1)}{4}.$$

Цю суму можна також обчислити за допомогою дискретного перетворення Лапласа [8].

Висновки. Розглянуті в даній роботі методи підсумовування далеко не вичерпують усіх можливих, тому було б доцільним продовжити пошук інших способів знаходження скінченних сум та прикладів, при розв'язуванні яких вони застосовуються.

Список використаних джерел

1. Мартиненко О.В., Чкана Я.О. Диференціальне та інтегральне числення в задачах на послідовності // Фізико-математична освіта: науковий журнал. 2015. Вип. 3(6). С. 33-40.
2. Бекишев Г.А., Кратко М.І. Підсумовування послідовностей. К.: Вища школа, Головне видавництво. 1981. 64 с.
3. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики: навчальний посібник. Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ ім.. В. Винниченка. 2000. 176 с.
4. Вышенский В.А. Сборник задач киевских математических олимпиад. К.: Вища школа. 1984. 240 с.
5. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная информатика. М.: Мир. 1998. 703 с.
6. Ласунский А.В. Некоторые методы суммирования числовых последовательностей// Математика в высшем образовании. 2013. № 11. С. 31-42.
7. Воробьев Н.Н. Теория рядов. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. 1979. 408 с.
8. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. М.: Высшая школа. 1976. 184 с.

References

1. Martynenko, Ya. O. Chkana. Differential and integral calculus in problems on sequences// Physical & Mathematical Education: scientific journal. 2015. Rel. 3(6). P. 33-40.
2. Bekishev G. A., Kratko M. I. On summation of sequences. K.: Vischa shkola. 1981. 64 p.
3. Volkov Yu. I., Voynalovich N. M. The elements of discrete mathematics. Kirovograd. 2000. 176 p.
4. Vishensky V. A. The collection of problems of the Kiev mathematical olympiads. K.: Vischa shkola. 1984. 240 p.
5. Graham R., Knut D., Patashnick O. Specific informatics. M.: Mir. 1998. 703 p.
6. Lasunsky A.V. On some methods of summation of numerical sequences // Mathematics in higher education. 2013. #11. P. 31-42.
7. Vorob'ýov N.N. Theory of series. M.:Nauka. 1979. 408 p.
8. Shelkovnikov Ph. A., Takayshvili K.G. The collection of exercises on operational calculus. M.: Visshaya shkola.1976. 184 p.

ON DIFFERENT METHODS OF CALCULATING FINAL SUMS

E.V. Martynenko, Ya. O. Chkana

Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine

Abstract. *The research of different scientific aspects leads to the same mathematical model corresponding to a definite mathematical task if viewed from the point of its formal statement. To find different methods of calculating it, choosing the optimal one among the number of possible choices, seems to be quite acute. The problem has always been in the focus of mathematicians. One of such tasks found in mathematical analysis, discrete mathematics, probability calculus and other sciences is the calculation of the final sum. Summing tasks are offered at the mathematical Olympiads of different stages.*

The research deals with different methods of calculating the final sums, namely: the method of elementary transformations over expressions, the methods of differential and integral calculus, the method of reduction to already known sums, the application of finite differences and difference equations, the theory of complex numbers. The article deals description of possibilities and peculiarities of applying them, grounding the appropriateness of a definite method according to the task.

Key words: *method, point, sum, summing, recurrence property, finite-difference equation.*