Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Беседін Б.Б., Кадубовський О.А. Про алгоритмічний підхід до розв'язання рівнянь та нерівностей (з однією змінною) другого степеня з параметром. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 2(16). С. 18-22.

Besedin B., Kadubovskyi O. On The Algorithmic Approach To Solving Of The Second-Degree Equations And Inequalities (With One Variable) With The Parameter. Physical and Mathematical Education. 2018. Issue 2(16). P. 18-22.

УДК 37.016:512.13

Б.Б. Беседін[1], О.А. Кадубовський[2]
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», Україна
[1]besedin_boris@ukr.net, [2]kadubovs@ukr.net
DOI 10.31110/2413-1571-2018-016-2-003

ПРО АЛГОРИТМІЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ (З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ) ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ПАРАМЕТРОМ

Анотація. *Помилково було б вважати, що важливість задач з параметром обумовлена лише підготовкою учнів до успішного проходження державної підсумкової атестації (у класах з поглибленим вивченням математики) і зовнішнього незалежного оцінювання і тому доцільно починати вчитись розв'язувати задачі з параметром безпосередньо на завершальному етапі до їх підготовки. Але ж загально визнано, що саме задачі з параметром є досить потужним засобом систематизації знань учнів, активізації їх пізнавальної активності. Вони сприяють підвищенню рівня математичної культури учнів. Саме тому задачі з параметрами є важливою складовою шкільного курсу математики поглибленого рівня. Їм присвячені окремі пункти підручників, значна кількість задачного матеріалу.*

При розв'язуванні навіть цілих раціональних рівнянь та нерівностей (відносно незалежної змінної x) з параметром a, не дивлячись на поради-застереження щодо «необхідності врахування області допустимих значень параметра a», досить поширеними помилками серед учнів та майбутніх вчителів математики є: «сприймання» виразів, що виступають «коефіцієнтами» многочлену стандартного вигляду (у лівій частині рівняння / нерівності) як незалежних одна від іншої «величин-параметрів» та відсутність аналізу на предмет області їх визначення.

В статті висвітлюється авторський досвід застосування алгоритмічного підходу під час навчання методам розв'язання рівнянь та нерівностей (з однією змінною) другого степеня з параметром. В термінах, що не виходять за межі програмного змістового модуля «Множини та операції над ними» для учнів 8 класу з поглибленим вивченням математики, в статті запропоновано дві граф-схеми та два алгоритми до розв'язання рівнянь та нерівностей другого степеня з параметром.

Маємо надію, що наведені в роботі алгоритми не призведуть до «формалізму» під час розв'язування рівнянь та нерівностей другого степеня з параметром, а навпаки – доповнять граф-схеми добре відомих відповідних алгоритмів супровідним типом задач та забезпечуватимуть дотримання належного рівня математичної строгості.

Ключові слова: *рівняння та нерівності другого степеня з параметром, алгоритми розв'язання.*

Постановка проблеми. Формування вмінь та навичок розв'язання задач з параметром передбачається програмою курсу алгебри для класів з поглибленим вивченням математики [1], [2]. Учні інших класів, в кращому випадку, знайомляться з такими задачами у випускному класі з метою підготовки до незалежного оцінювання. Таким чином, залишається нереалізованим той міцний потенціал для формування і розвитку логічного мислення і математичної культури учнів, що містять задачі з параметром. Включення їх в систему задач, запропоновану авторами підручників, на етапі узагальнення та систематизації знань дає вчителю можливість підняти математичну підготовку учнів на якісно вищий рівень. Учні, які вміють розв'язувати задачі з параметрами, під час розв'язання інших задач мислять не формально, за шаблоном, а намагаються виявити логічні зв'язки між структурними елементами задачі і, тому, справляються з нею успішно.

Серед інших задач з параметрами одне з найважливіших місць посідають квадратні рівняння і нерівності. Це обумовлено застосуванням під час розв'язування ірраціональних, тригонометричних, показникових та логарифмічних рівнянь, нерівностей і їх систем методу заміни змінної і переходу до квадратних рівнянь та нерівностей. Тому вміння та навички розв'язання і дослідження квадратних рівнянь та нерівностей важко переоцінити. Одним із шляхів вдосконалення згаданих навичок є застосування алгоритмічного підходу до розв'язання таких задач.

Аналіз актуальних досліджень. Особливостям розв'язання задач з параметрами, розгляду методів та прийомів, які можуть бути застосовані при цьому, присвячена велика кількість публікацій. В більшості робіт математиків та методистів [3], [5-7], в шкільних підручниках [1, 2] методи розв'язування вправ з параметром розподіляються на графічні та аналітичні.

Автори статті вважають доцільним та можливим залучення задач з параметром до формування і розвинення алгоритмічної культури учнів. Представлена стаття є логічним продовженням роботи авторів [3], присвяченої застосуванню алгоритмічного підходу під час навчання методам розв'язання лінійних рівнянь та нерівностей з параметром. Проте відразу мусимо наголосити, що алгоритми не є самоціллю та не повинні стати зазубреним керівництвом до розв'язання рівнянь та нерівностей з параметром. Навпаки, вони повинні бути результатом переосмислення відповідних граф-схем та покликані наштовхнути на розуміння необхідності виконання відповідних кроків, пов'язаних зі знаходженням необхідних значень параметра.

З огляду на це **метою** статті є розробка алгоритмів розв'язання рівнянь та нерівностей другого степеня з параметром із застосуванням понять та символів теорії множин.

Для досягнення зазначеної мети було використано такі **методи дослідження** як: узагальнення та систематизація задачного матеріалу; застосування аналогій в дослідженнях лінійних та квадратних рівнянь і нерівностей з параметром; порівняльний аналіз розв'язання квадратних рівнянь та квадратних нерівностей.

Виклад основного матеріалу.

Означення 1. ([6], [7]) Нехай $f(a)$, $g(a)$ і $h(a)$ – аналітично задані функції параметра a, x – змінна. Тоді рівнянням другого степеня із параметром будемо називати рівняння виду

$$h(a)\cdot x^2 + f(a)\cdot x + g(a) = 0, \tag{1}$$

нерівністю другого степеня із параметром – нерівність виду

$$h(a)\cdot x^2 + f(a)\cdot x + g(a) * 0, \tag{2}$$

де $*$ – один із чотирьох знаків порівняння: $>$, $\geq$, $<$, $\leq$.

Зауваження 1. Наведене означення, на відміну від класичного, передбачає можливість умови $h(a)=0$ **.**

Під час роботи з рівняннями виду (1) та нерівностями (2) учням доцільно запропонувати наступні граф-схеми алгоритмів їх розв'язання:

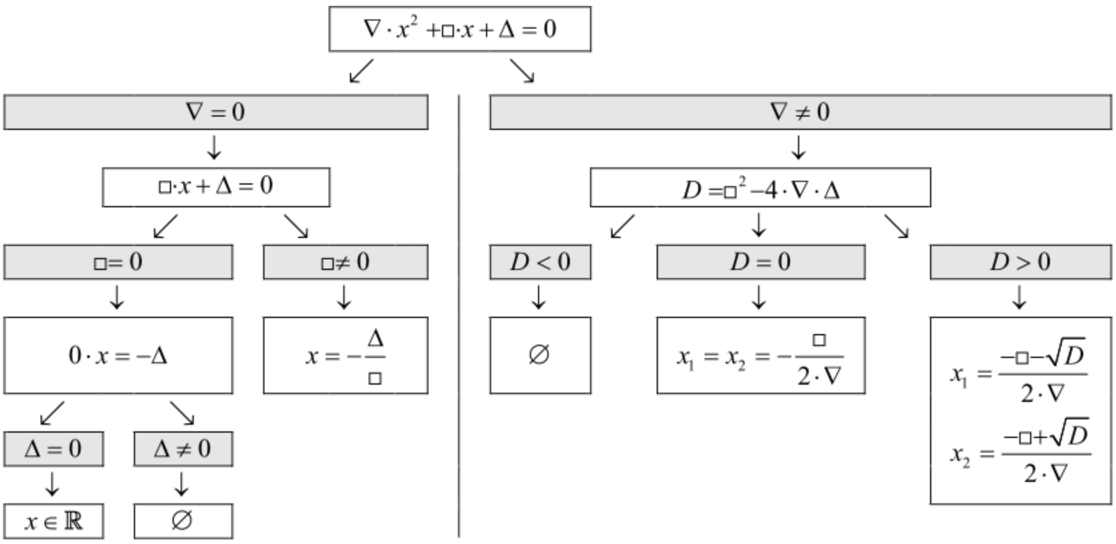

Рис. 1. Граф-схема алгоритму розв'язання рівняння 2-го степеня з параметром

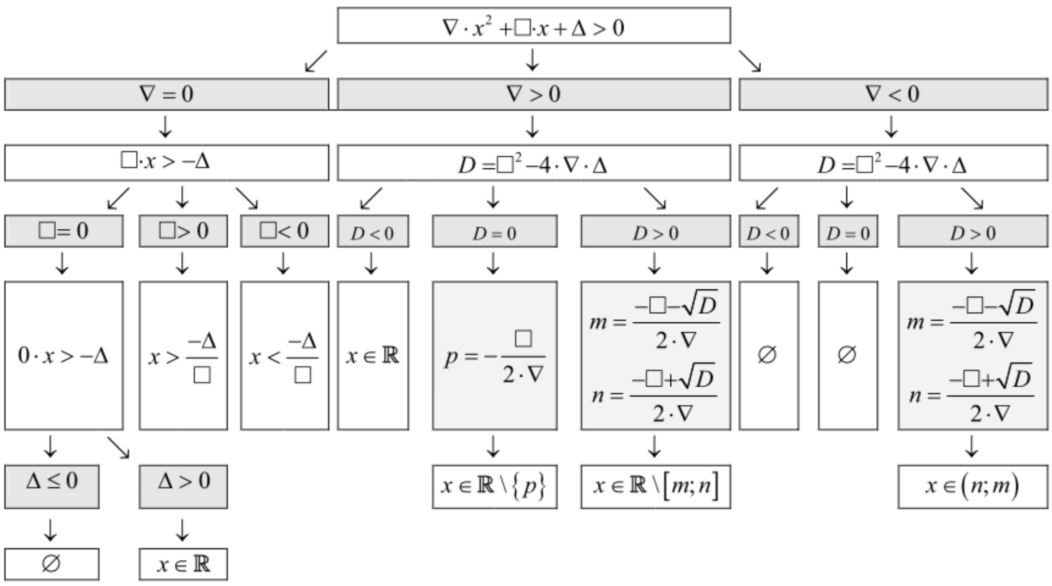

Рис. 2. Граф-схема алгоритму розв'язання (строгої) нерівності 2-го степеня з параметром

Очевидно, що для рівняння (1) та нерівності (2) областю допустимих значень (ОДЗ) змінної x є вся числова вісь, тобто $x \in (-\infty; +\infty)$. Проте, оскільки (за визначенням) $f = f(a)$, $g = g(a)$ і $h = h(a)$, тобто f, g і h є функціями від параметра (змінного) a, то в загальному випадку, та навіть для лінійних рівнянь і нерівностей, необхідно розглядати область допустимих значень параметра a [3].

Означення 2. Областю $D_{f,g,h}(a)$ допустимих значень параметра a рівняння (1) (нерівності (2)) будемо називати перетин областей визначення $D_f(a)$, $D_g(a)$ і $D_h(a)$ функцій $f(a)$, $g(a)$ та $h(a)$ відповідно, тобто

$$D_{f,g,h}(a) = D_f(a) \cap D_g(a) \cap D_h(a).$$

Зауваження 2. ([3]) Якщо ввести позначення для множин $A \equiv \{a \mid f(a) = 0\}$, $B \equiv \{a \mid f(a) < 0\}$, $C \equiv \{a \mid f(a) > 0\}$ і $D \equiv \{a \mid f(a) \text{ не існує}\}$, то доповнення $\overline{A}$ множини A до «прямої параметра» (як «універсальної множини») становить $\overline{A} = B \cup C \cup D$. Тому значення параметра a, які є розв'язками системи $\begin{cases} f(a) = 0 \\ g(a) \neq 0, \end{cases}$ доцільно інтерпретувати, як елементи множини $D_g(a) \cap \{a \mid f(a) = 0\} \setminus \{a \mid g(a) = 0\}$.

Заради зручності та подальшого використання введемо (інтуїтивно зрозумілі) позначення для наступних множин:

$$D_{f,g}(a) = D_f(a) \cap D_g(a), \quad A_{\varnothing} = R \setminus D_{f,g,h}(a), \quad D(a) = f^2(a) - 4 \cdot g(a) \cdot h(a);$$

$$F_- \equiv \{a \mid f(a) < 0\}, \quad F_0 \equiv \{a \mid f(a) = 0\}, \quad F_+ \equiv \{a \mid f(a) > 0\};$$

$$G_- \equiv \{a \mid g(a) < 0\}, \quad G_0 \equiv \{a \mid g(a) = 0\}, \quad G_+ \equiv \{a \mid g(a) > 0\};$$

$$H_- \equiv \{a \mid h(a) < 0\}, \quad H_0 \equiv \{a \mid h(a) = 0\}, \quad H_+ \equiv \{a \mid g(a) > 0\};$$

$$D_- \equiv \{a \mid D(a) < 0\}, \quad D_0 \equiv \{a \mid D(a) = 0\}, \quad D_+ \equiv \{a \mid D(a) > 0\}.$$

Алгоритм 1. До розв'язання рівняння 2-го степеня з параметром

$$h(a) \cdot x^2 + f(a) \cdot x + g(a) = 0. \tag{3}$$

1) Нехай $h(a) = 0$. Тоді при всіх a, що задовольняють умови $\begin{cases} a \in D_{f,g}(a) \\ h(a) = 0, \end{cases}$ рівняння (3) набуває вид

$$f(a) \cdot x = -g(a), \tag{4}$$

яке слід розглядати як **лінійне рівняння з параметром.**

З урахуванням **Алгоритму 1** до розв'язання рівняння $f(a) \cdot x = g(a)$, викладеного в [3], для (розв'язання рівняння (4)) формулювання відповіді (у випадку $h(a) = 0$), введемо наступні множини:

$$A_{11} \equiv \left(D_{f,g}(a) \cap H_0\right) \setminus F_0, \quad A_{12} \equiv \left(D_g(a) \cap H_0 \cap F_0\right) \setminus G_0, \quad A_{13} \equiv H_0 \cap F_0 \cap G_0.$$

2) Нехай тепер $h(a) \neq 0$. Тоді при всіх a, що задовольняють умови $\begin{cases} a \in D_{f,g,h}(a) \\ h(a) \neq 0, \end{cases}$ рівняння (3) можна розв'язувати за допомогою дискримінанта $D(a) = f^2(a) - 4 \cdot h(a) \cdot g(a)$ з урахуванням відповідних, добре знайомих підвипадків, властивих квадратним рівнянням: $D(a) < 0$, $D(a) = 0$ і $D(a) > 0$.

Для зручності введемо наступні позначення:

$$A_{21} \equiv \left(D_{f,g,h}(a) \cap D_-\right) \setminus H_0, \quad A_{22} \equiv \left(D_{f,g,h}(a) \cap D_0\right) \setminus H_0, \quad A_{23} \equiv \left(D_{f,g,h}(a) \cap D_+\right) \setminus H_0.$$

2.1) Якщо $a \in A_{21}$, то дане рівняння немає (дійсних) коренів.

2.2) Якщо $a \in A_{22}$, то дане рівняння має два рівних (дійсних) корені $x_1 = x_2 = -\dfrac{f(a)}{2 \cdot h(a)}$.

2.3) Якщо $a \in A_{23}$, то дане рівняння має два різні (дійсні) корені $x_1 = \dfrac{-f(a) - \sqrt{D(a)}}{2 \cdot h(a)}$, $x_2 = \dfrac{-f(a) + \sqrt{D(a)}}{2 \cdot h(a)}$.

Відповідь: якщо $a \in A_{\varnothing}$, то рівняння немає сенсу;

якщо $a \in A_{12} \cup A_{21}$, то дане рівняння немає (дійсних) коренів;

якщо $a \in A_{11}$, то рівняння має єдиний корінь $x = -\dfrac{g(a)}{f(a)}$;

якщо $a \in A_{22}$, то дане рівняння має два рівних корені $x_1 = x_2 = -\dfrac{f(a)}{2 \cdot h(a)}$;

якщо $a \in A_{23}$, то дане рівняння має два різних (дійсних) коренів $x_{1,2} = \dfrac{-f(a) \mp \sqrt{D(a)}}{2 \cdot h(a)}$.

якщо $a \in A_{13}$, то $x \in R$.

Зауваження 2. Якщо одна із зазначених вище множин A_{ij} є порожньою множиною ($\varnothing$), то відповідну складову у відповіді писати не потрібно.

Алгоритм 2. До розв'язання «нестрогої» нерівності 2-го степеня з параметром

$$h(a)\cdot x^2+f(a)\cdot x+g(a)\ge 0\,. \tag{5}$$

1) Нехай $h(a)=0$. Тоді при всіх a, що задовольняють умови $\begin{cases} a\in D_{f,g}(a) \\ h(a)=0, \end{cases}$ нерівність (5) набуває вид

$$f(a)\cdot x\ge -g(a)\,, \tag{6}$$

яку слід розглядати як **нестрогу лінійну нерівність з параметром.**

З урахуванням **Алгоритму 3** до розв'язання нерівності $f(a)\cdot x\ge g(a)$, викладеного в [3], для (розв'язання нерівності (6)) формулювання відповіді (у випадку $h(a)=0$) введемо наступні множини:

$A_{11}\equiv D_g(a)\cap H_0\cap F_+$, $A_{12}\equiv D_g(a)\cap H_0\cap F_-$; $A_{13}\equiv H_0\cap F_0\cap(G_+\cup G_0)$, $A_{14}\equiv H_0\cap F_0\cap G_-$.

2) Нехай тепер $h(a)>0$. Тоді при всіх a, що задовольняють умови $\begin{cases} a\in D_{f,g}(a) \\ h(a)>0, \end{cases}$ нерівність (5) можна розв'язувати за допомогою дискримінанта $D(a)=f^2(a)-4\cdot h(a)\cdot g(a)$ з урахуванням відповідних, добре знайомих підвипадків, властивих нерівностям 2-го степеня: $D(a)<0$, $D(a)=0$ і $D(a)>0$.

Для зручності введемо наступні позначення:

$A_{21}\equiv D_{f,g}(a)\cap H_+\cap D_-$, $A_{22}\equiv D_{f,g}(a)\cap H_+\cap D_0$, $A_{23}\equiv D_{f,g}(a)\cap H_+\cap D_+$.

2.1) Якщо $a\in A_{21}$, то $x\in(-\infty;+\infty)$.

2.2) Якщо $a\in A_{22}$, то $x\in(-\infty;+\infty)$.

2.3) Якщо $a\in A_{23}$, то відповідне рівняння $h(a)\cdot x^2+f(a)\cdot x+g(a)=0$ має два різних (дійсних) корені $x_1=\dfrac{-f(a)-D(a)}{2\cdot h(a)}$, $x_2=\dfrac{-f(a)+D(a)}{2\cdot h(a)}$ (причому $x_1<x_2$), а розв'язками нерівності (5) будуть

$$x\in\left(-\infty;\frac{-f(a)-D(a)}{2\cdot h(a)}\right]\cup\left[\frac{-f(a)+D(a)}{2\cdot h(a)};+\infty\right).$$

3) Нехай тепер $h(a)<0$. Тоді при всіх a, що задовольняють умови $\begin{cases} a\in D_{f,g}(a) \\ h(a)<0, \end{cases}$ нерівність (5) можна розв'язувати за аналогією із випадком $h(a)>0$. Для зручності введемо наступні позначення:

$A_{31}\equiv D_{f,g}(a)\cap H_-\cap D_-$, $A_{32}\equiv D_{f,g}(a)\cap H_-\cap D_0$, $A_{33}\equiv D_{f,g}(a)\cap H_-\cap D_+$.

3.1) Якщо $a\in A_{31}$, то дана нерівність немає розв'язків.

3.2) Якщо $a\in A_{32}$, то дана нерівність має єдиний розв'язок $x=-\dfrac{f(a)}{2\cdot h(a)}$.

3.3) Якщо $a\in A_{33}$, то відповідне рівняння $h(a)\cdot x^2+f(a)\cdot x+g(a)=0$ має два різних (дійсних) корені $x_1=\dfrac{-f(a)-D(a)}{2\cdot h(a)}$, $x_2=\dfrac{-f(a)+D(a)}{2\cdot h(a)}$ ($x_1>x_2$), а розв'язками (5) будуть $x\in\left[\dfrac{-f(a)+D(a)}{2\cdot h(a)};\dfrac{-f(a)-D(a)}{2\cdot h(a)}\right]$.

Відповідь: якщо $a\in A_{\varnothing}$, то нерівність не має сенсу;

якщо $a\in A_{11}$, то розв'язками даної нерівності є $x\in\left[-\dfrac{g(a)}{f(a)};+\infty\right)$;

якщо $a\in A_{12}$, то розв'язками даної нерівності є $x\in\left(-\infty;-\dfrac{g(a)}{f(a)}\right]$;

якщо $a\in A_{13}\cup A_{21}\cup A_{22}$, то $x\in(-\infty;+\infty)$;

якщо $a\in A_{14}\cup A_{31}$, то дана нерівність немає розв'язків;

якщо $a\in A_{23}$, то розв'язками даної нерівності є $x\in\left(-\infty;\dfrac{-f(a)-D(a)}{2\cdot h(a)}\right]\cup\left[\dfrac{-f(a)+D(a)}{2\cdot h(a)};+\infty\right)$;

якщо $a\in A_{32}$, то дана нерівність має єдиний розв'язок $x=-\dfrac{f(a)}{2\cdot h(a)}$;

якщо $a\in A_{33}$, то розв'язками даної нерівності є $x\in\left[\dfrac{-f(a)+D(a)}{2\cdot h(a)};\dfrac{-f(a)-D(a)}{2\cdot h(a)}\right]$.

Висновки. Вважаємо, що запропонований матеріал може використовуватися не тільки на уроках математики, а і вчителями інформатики з метою формування в учнів навичок побудови алгоритмів та їх реалізації. Навіть поверхневе ознайомлення з посібником [5] дозволяє припустити, що досить цікавими та цілком досяжними можуть бути подальші розвідки щодо перенесення запропонованого підходу до виокремлення та розв'язування «найбільш типових» дробово-раціональних нерівностей з параметром, що містять ірраціональні, логарифмічні або показникові вирази, за допомогою *узагальненого методу інтервалів* [4].

Список використаних джерел

1. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручник для 8 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. Харків : Гімназія, 2016. 384 с.
2. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручник для 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.
3. Беседін Б. Б., Кадубовський О. А., Фролов К. П. Про алгоритмічний підхід до розв'язування лінійних рівнянь та нерівностей (з однією змінною) з параметром. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2018. № 8. С. 122–133.
4. Голубев В. И., Тарасов В. И. Эффективные пути решения неравенств : пособие по математике для учителей средней школы и абитуриентов. Львов : Квантор, 1991. 94 с.
5. Голубев В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. Москва : ИЛЕКСА, 2007. 252 с.
6. Прус А. В., Швець В. О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики основної школи. Частина 1. Харків : Основа, 2016. 107 с.
7. Прус А. В., Швець В. О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики основної школи. Частина 2. Харків : Основа, 2016. 137 с.

References

1. Merzliak A. H., Polonskyi V. B., Yakir M. S. Alhebra dlia zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv z pohlyblenym vyvchenniam matematyky : pidruchnyk dlia 8 kl. zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Kharkiv : Himnaziia, 2016. 384 s. (in Ukrainian)
2. Merzliak A. H., Polonskyi V. B., Yakir M. S. Alhebra dlia zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv z pohlyblenym vyvchenniam matematyky : pidruchnyk dlia 9 kl. zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv. Kharkiv : Himnaziia, 2017.416 s. (in Ukrainian)
3. Besedin B. B., Kadubovskyi O. A., Frolov K. P. On the algorithmic approach to solving linear equations and inequalities (with one variable) with a parameter. Zbirnik naukovih prac' fiziko-matematicnogo fakul'tetu DDPU. 2018. № 8. P. 122–133. (in Ukrainian)
4. Golubev V. I., Tarasov V. I. Jeffektivnye puti reshenija neravenstv : posobie po matematike dlja uchitelej srednej shkoly i abiturientov. L'vov : Kvantor, 1991. 94 s. (in Russian)
5. Golubev V. I. Reshenie slozhnyh i nestandartnyh zadach po matematike. Moskva : ILEKSA, 2007. 252 s. (in Russian)
6. Prus A. V., Shvets V. O. Zadachi z parametramy v shkilnomu kursi matematyky osnovnoi shkoly. Chastyna 1. Kharkiv : Osnova, 2016. 107 s. (in Ukrainian)
7. Prus A. V., Shvets V. O. Zadachi z parametramy v shkilnomu kursi matematyky osnovnoi shkoly. Chastyna 2. Kharkiv : Osnova, 2016. 137 s. (in Ukrainian)

ON THE ALGORITHMIC APPROACH TO SOLVING OF THE SECOND-DEGREE EQUATIONS AND INEQUALITIES (WITH ONE VARIABLE) WITH THE PARAMETER

Boris Besedin, Oleksandr Kadubovskyi

State Higher Educational Institution «Donbas state pedagogical university», Slovyansk, Ukraine.

Abstract. *It is a mistake to assume that the importance of a sum with a parameter is determined just by the preparation of schoolchildren for the successful passing of final certification (in classes with intensive study of mathematics) and external testing; therefore it is reasonable to begin learning of solving sums with a parameter directly in the final stage of their preparation. But it is generally recognized that sums with a parameter is rather a powerful tool for systematization of knowledge of schoolchildren and activization of their cognitive activity. They contribute to promote the level of mathematical culture of schoolchildren. That is why tasks with parameters are the important part of the advanced school math course. Separate items of textbooks, a significant amount of the didactic material are devoted to them.*

When solving even of entire rational equations and inequalities (relatively to a independent variable x*) with the parameter* a*, despite the advice and warnings about the "need of incorporatation of permissible area of values* a*", quite a common mistakes among schoolchildren and future teachers of mathematics is a "perception" of expressions which are "coefficients" of a standard polynomial form (in the left side of the equation / inequality) as independent from each other "values-parameters" and the lack of analysis on the subject area of their definition.*

The article covers the author's experience in applying of the algorithmic approach during learning of methods for solving equations and inequalities of the second degree with the parameter. In terms which are beyond the scope of the program content module "Sets and operations on them" for the schoolchildren of the 8th form with advanced study of mathematics; two graph schemes and two algorithms for the solution of equations and inequalities of the second degree with the parameter are proposed.

We hope that the algorithms given in the work will not lead to "formalism" when solving the equations and inequalities of the second degree with the parameter, on the contrary, the algorithms will broaden graph schemes of well-known corresponding algorithms with the accompanying type of tasks and will ensure the required level of mathematical rigor.

Key words: *equations and inequalities of the second degree with the parameter, solution algorithm.*