Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Корольський В.В., Шокалюк С.В., Мельниченко Ю.А. Теоретично-методичні засади геометричного моделювання числових рядів. Фізико-математична освіта. 2018. Випуск 4(18). С. 81-89.

Korolskyi V., Shokaliuk S., Melnychenko Yu. Theoretical And Methodological Principles Of Geometric Modeling Numerical Series. Physical and Mathematical Education. 2018. Issue 4(18). P. 81-89.

DOI 10.31110/2413-1571-2018-018-4-013
УДК 378.016:517

В.В. Корольський[1], С.В. Шокалюк[2], Ю.А. Мельниченко[3]
Криворізький державний педагогічний університет, Україна
[1]*k_mathemathics@kdpu.edu.ua*, [2]*shokalyuk@kdpu.edu.ua*, [3]*yulia.melnichenko.995@gmail.com*

ТЕОРЕТИЧНО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Анотація. *Проблема візуалізації абстрактних математичних понять та об'єктів, пошук їх геометричних інтерпретацій, зокрема із залученням сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, різних Інтернет-сервісів та мобільних застосунків, набуває неабиякого поширення у різних науково-методичних колах. У нових публікаціях та навчальних посібниках з вищої математики чи математичного аналізу можна віднайти достатню кількість різноманітних прикладів унаочнення математичних абстракцій за розділами «Дослідження неперервності функції», «Диференціювання функції» чи «Інтегрування функції» тощо. При цьому приклади візуалізації числових рядів, точніше скінченної кількості їх елементів, є досить одноманітними й методично непривабливими, незважаючи на їх практичну значущість.*

Саме здійснення геометричного моделювання числових рядів надає можливість будувати нові числові ряди різних видів, добирати порівнювані числові ряди, з'ясовувати їх специфічні, непомітні при використанні традиційних знакових моделей закономірності поведінки членів ряду та їх застосування в теорії і практиці.

У статті наведено всі етапи геометричного моделювання числових рядів на прикладі двох – гармонічного ряду та ряду геометричної прогресії.

Для гармонічного ряду розглянуто зразки лінійної та квадратичної інтерпретації, виведено формули загальних членів отриманих рядів. Для ряду геометричної прогресії розглянуто випадки, коли знаменник прогресії дорівнює одиниці, менше за одиницю та більше за одиницю.

Колектив авторів працює над реалізацією програмного засобу для автоматизації демонстрацій розглянутих геометричних моделей числових рядів за різних значень параметрів. В якості інструментального засобу програмної реалізації обрано хмаро орієнтоване середовище математичного призначення – CoCalc. Основним структурним компонентом середовища CoCalc є мережна система комп'ютерної математики SageMath. Режим доступу до середовища – http://cocalc.com.

Ключові слова: *гармонічний ряд, геометрична прогресія, математичний аналіз, моделювання, числові ряди.*

Постановка проблеми. Математичний аналіз позиціонується як фундаментальна наука логічно побудованих структур, які можуть бути моделями реальних об'єктів, явищ та процесів. Будуються ці структури за допомогою формально визначених понять, наприклад функція, похідна, інтеграл тощо. Але в сучасних умовах вивчення як шкільного курсу математики, так і математичного аналізу у закладах вищої освіти, базовим поняттям стає «модель». У контексті сказаного ми розуміємо, що математичний аналіз в своїй змістовій структурі побудований на знакових моделях. Знакові моделі і застосування їх при вивченні математичного аналізу (візуалізація та дослідження отриманих геометричних моделей) заслуговують окремої уваги.

Аналіз актуальних досліджень. Теоретично-методичні засади реалізації принципу наочності при вивченні окремих розділів математичного аналізу (границя функцій, дослідження неперервності, диференціювання, інтегрування тощо) не є новою науковою проблемою, зокрема із залученням сучасних засобів інформаційно-комунікаційних технологій, у тому числі Інтернет-сервісів та мобільних застосунків [1; 4; 5]. У той же час при вивченні розділу «Числові ряди» принцип наочності майже не має місця. Але результати наших попередніх досліджень [2; 3] показують, що його реалізація може бути здійснена шляхом використання геометричних моделей багатьох видів числових рядів. Застосування їх в змісті розділу «Числові ряди» не тільки наочно ілюструє останні, але і допомагає з'ясувати їх специфічні, непомітні при використанні знакових моделей закономірності поведінки членів ряду і їх застосування в теорії і практиці. Більш того, застосування геометричних інтерпретацій дозволяє будувати різні види числових рядів.

Мета статті. Розкрити можливості застосування геометричних моделей при вивченні розділу «Числові ряди» в межах курсу «Математичний аналіз» при підготовці фахівців з інформатики і фізико-математичного профілю, а також спрямувати одержані результати на посилення ефективності лабораторних занять з методів наближених обчислень.

Методи дослідження. При виконанні означеного дослідження були використані переважно теоретичні методи, зокрема, аналіз та синтез наукової та спеціальної літератури з питань візуалізації абстрактних математичних понять, а також метод моделювання для унаочнення числових рядів.

Виклад основного матеріалу. Не будемо розглядати означення структури, моделі і т.п. Відмітимо лише те, що якщо ми маємо модель певного об'єкта, то вся інформація про нього вкладена в його структурі і відображається певними математичними зв'язками між параметрами елементів структури. В контексті нашого дослідження ми маємо певну геометричну структуру, параметрами якої можуть бути лінії, периметри, площі чи об'єми. Числові значення цих параметрів відображаються елементами (членами) відповідної знакової моделі, якою і є певний числовий ряд. Зміст вищезазначеного пояснимо на прикладах геометричної інтерпретації гармонічного ряду (1) та числового ряду геометричної прогресії (13).

Знакова модель гармонічного ряду має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\quad n\in N \tag{1}$$

Візуалізацію знакової моделі (1) можна реалізувати за допомогою інтеграла

$$\int_0^1 x^{n-1}dx \tag{2}$$

і квадрата з параметром 1, розміщеного в системі координат *Oxy* (рис. 1).

Криволінійна сторона *OB* трикутників *OAB*, вписаних у квадрат *OABC*, задається функцією $f(x)=x^{n-1}$, $x\in[0;1]$, $n\in N$. За допомогою інтеграла (2) обчислюємо площі квадратів *OABC* і трикутників *OAB*.

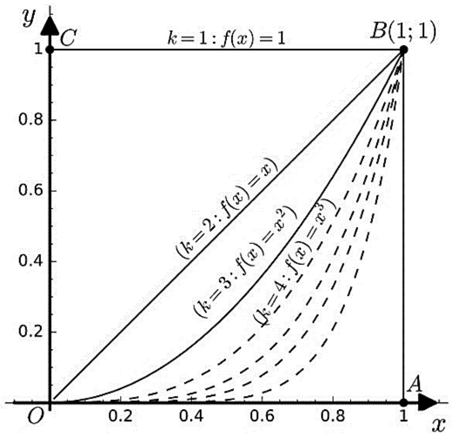

Рис. 1. Квадрат з параметром a = 1, в який вписані криволінійні трикутники OAB

$$\left.\begin{array}{l}
S_1(1,x^{1-1})=\int_0^1 x^{1-1}dx = x\Big|_0^1 = 1 \\
S_2(1,x^{2-1})=\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\
S_3(1,x^{3-1})=\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \\
\ldots \\
S_n(1,x^{n-1})=\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}x^n\Big|_0^1 = \frac{1}{n} \\
\ldots
\end{array}\right\} \tag{3}$$

Враховуючи, що $n=\overline{1,\infty}$ одержуємо нескінченну суму значень площ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n(1,x^{n-1}) \tag{4}$$

Зрозуміло, що має місце рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n(1,x^{n-1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \tag{5}$$

Таким чином, одержуємо геометричну модель числового ряду (1), елементами якого є послідовність наступних площ (рис. 2).

Геометрична модель представлена на рис. 2 дозволяє розглядати площі представлені на рис. 3.

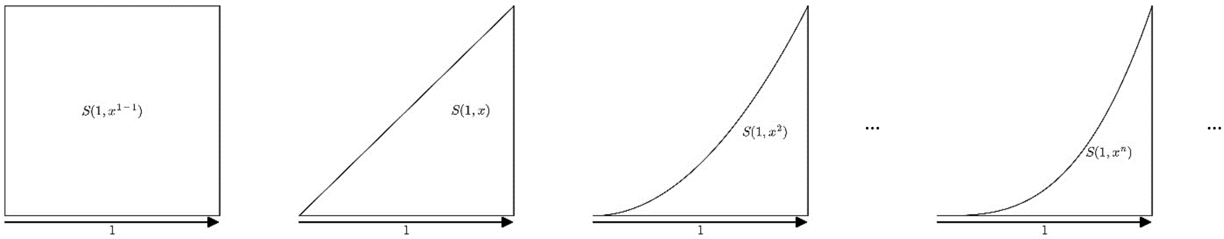

Рис. 2. Геометричні моделі членів гармонічного ряду;
значення площ S(1, x^{n-1}) послідовно відображають значення членів ряду

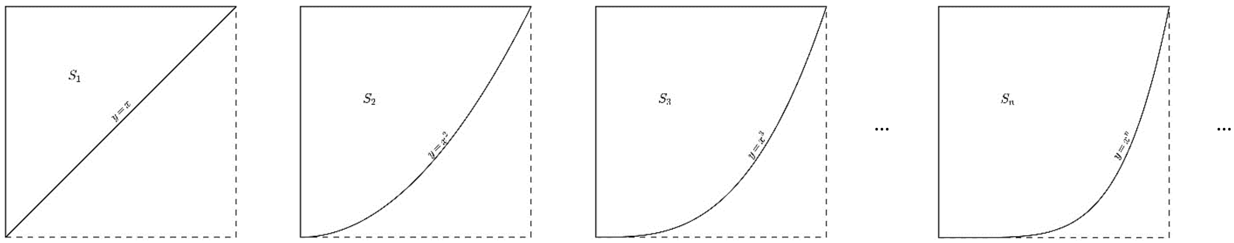

Рис. 3. Площі криволінійних трикутників, вписаних в квадрат з параметром a = 1, криволінійні сторони задаються в межах квадрата функціями $f(x)=x^{n-1}$, $n\in\mathrm{N}$, $x\in(0;1)$

За допомогою рівностей (3) одержуємо значення площ на рис. 3

$$S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{2}{3},\ S_3=\frac{3}{4},\ S_4=\frac{4}{5},\ \ldots,\ S_n=\frac{n}{n+1}\ \text{і т. д.}$$

Таким чином одержуємо рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1} \tag{6}$$

У правій частині рівності (6) маємо відомий числовий ряд з загальним членом $a_n=\frac{n}{n+1}$. Геометричні моделі членів ряду показані на рис. 3.

Геометрична інтерпретація числових рядів (1) і (2) дозволяє пояснити студентам розбіжність обох рядів і звернути їх увагу на те, що при цьому необхідна умова збіжності рядів $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ (6) виконується для ряду (1) і не виконується для ряду (6):

(1): $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,

(6): $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Примітка 1. Для рядів (1) і (6) має місце наступна рівність

$$S_{n(1)}+S_{(n-1)(6)}=n \tag{7}$$

Примітка 2. Ряд (1) породжує ряд (6), тому що відношення між сусідніми членами ряду (1) дорівнює послідовним членам ряду (6):

$$\frac{1}{2}\div 1=\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\div\frac{1}{2}=\frac{2}{3};\ \frac{1}{4}\div\frac{1}{3}=\frac{3}{4};\ \ldots;\ \frac{1}{n}\div\frac{1}{n-1}=\frac{n-1}{n};\ \frac{1}{n+1}\div\frac{1}{n}=\frac{n}{n+1}\ \text{і т.д.}$$

Примітка 3. На рис. 3 відповідними є S_1 ряду (6) і S_2 ряду (1), S_2 ряду (6) і (1 – $S_{3\,(1)}$), $S_{3\,(6)}$ і (1 – $S_{4\,(1)}$) і т.д.

Використовуючи рис. (2) і (3) і зміст приміток (1–3) маємо можливість візуалізувати аналіз характеру змін членів рядів (1) і (6), а також зв’язок між цими рядами.

У розглянутих випадках числових рядів (1) і (6) ми ототожнювали величини площ з відповідним значенням членів цих рядів. Тому в цьому разі ми можемо говорити про квадратурну геометричну інтерпретацію числових рядів.

В окремих випадках для одного і того ж числового ряду можна провести різні квадратурні інтерпретації. Так, для числового ряду (1), такою квадратурною інтерпретацією можуть бути величини площ послідовність прямокутників, породжуємих квадратом з параметром a = 1, показаних на рис. 4

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \tag{8}$$

Враховуючи, що $n\to\infty$, одержуємо гармонічний ряд (1) з квадратурною геометричною інтерпретацією у вигляді сум площ прямокутників з основою $a=1$ і змінною висотою $h=\frac{1}{n}$.

Для гармонічного ряду (1) можна показати його лінійну геометричну інтерпретацію, представлену на рис. 5.

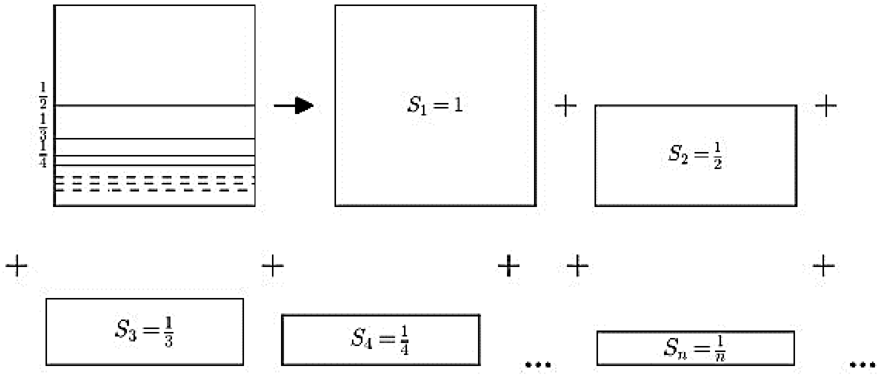

Рис. 4. Площі прямокутників з основою $a = 1$ ***і висотами*** $h = \frac{1}{n}$, $n \in N$

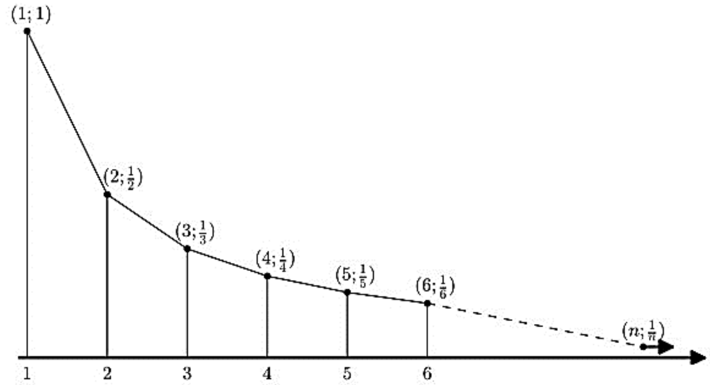

Рис. 5. Лінійна інтерпретація гармонічного ряду

Якщо з’єднати точки з координатами (1;1), (2; $\frac{1}{2}$), (3; $\frac{1}{3}$) і т.д., отримаємо ряд прямокутних трапецій з однаковою висотою $h = 1$. Значення площ цих трапецій складають наступний числовий ряд

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{12}+\frac{7}{24}+\frac{9}{40}+\frac{11}{60}+\frac{13}{84}+\frac{15}{112}+\ldots=\frac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{3}{1}+\frac{5}{3}+\frac{7}{6}+\frac{11}{15}+\frac{13}{21}+\frac{15}{28}+\frac{17}{36}+\ldots\right)}_{(9)}$$

Загальний член ряду (9) має вигляд

$$a_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \tag{10}$$

При з’єднанні точок (1; 0) і (2; $\frac{1}{2}$); (2; 0) і (3; $\frac{1}{3}$) і т.д. одержуємо числовий ряд довжин діагоналей прямокутних трапецій

$$\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{3}+\frac{\sqrt{17}}{4}+\frac{\sqrt{26}}{5}+\frac{\sqrt{37}}{6}+\ldots \tag{11}$$

Загальний член ряду

$$a_n = \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{n+1} \tag{12}$$

Числовим рядом геометричної прогресії називають ряд

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}+\ldots \tag{13}$$

де $a \in R$, $q \in R$ – знаменник прогресії , $n \in N$.

Сума *S* ряду (13) може бути обчислена за допомогою формули

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{14}$$

де $S_n = a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}$ – частинна сума ряду (13).

При вивченні числових рядів задача обчислення суми є однією з основних. Але розв’язання цієї задачі важко сприймається більшістю студентської аудиторії. Тому, на нашу думку, варто надати наочності при розв’язанні задач на обчислення сум числових рядів взагалі і окремо при обчисленні сум числових рядів виду (13).

Значення суми залежить від значення знаменника прогресії – параметра *q*.

Розглянемо випадки: 1) *q* = 1; 2) *q* > 1: 3) *q* < 1.

(1) q = 1. Геометрична інтерпретація цього випадку відображена на рис. 6.

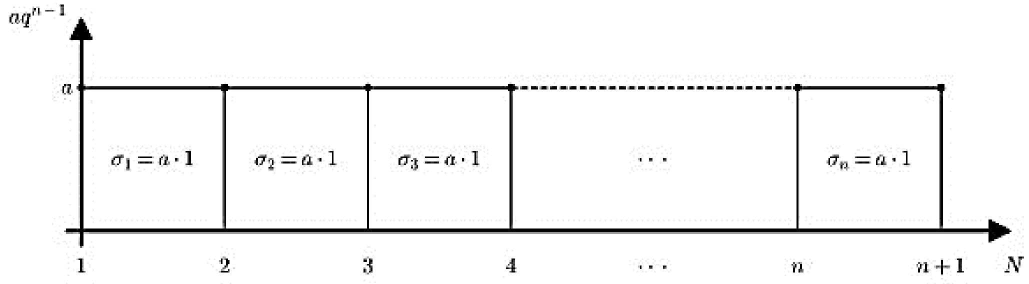

Рис. 6. Ряд геометричної прогресії q = 1, членами якого є значення площ $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$

З рис. 6 наочно видно, що S_n – n-а частинна сума ряду (13) має значення суми площ прямокутників зі сторонами 1 і a

$$S_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n \qquad (15)$$

За формулою (14) одержуємо суму ряду (13) за умови, що $q = 1$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty \qquad (16)$$

Висновок: ряд розбіжний.

(2) $q > 1$. В цьому випадку геометрична інтерпретація ряду (13) має вигляд, показаний на рис. 7.

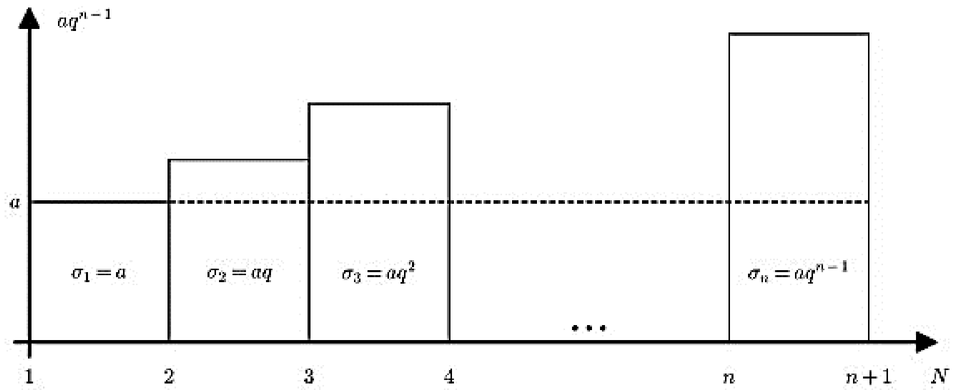

Рис. 7. Геометрична інтерпретація ряду (13) за умови, що q > 1;
членами ряду є значення площ $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$

Зрозуміло, якщо порівнювати геометричні інтерпретації ряду (13) на рис. 6 і 7, і враховуючи висновок про розбіжність ряду на рис. 6, то одразу можна стверджувати, що ряд геометричної прогресії зі знаменником $q > 1$ – розбіжний і його сума прямує до ∞, коли $n \to \infty$.

(3) $q < 1$. Геометрична інтерпретація ряде показана на рис. 8.

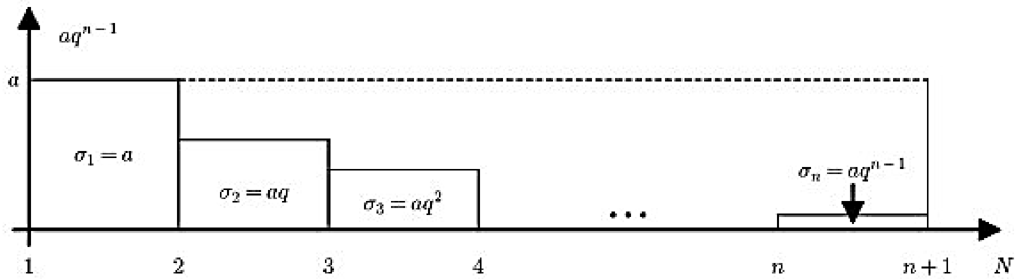

Рис. 8. Ряд геометричної прогресії зі знаменником q < 1,
членами якого є значення площ $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$

У цьому випадку ми спостерігаємо, що виконується необхідна умова збіжності числових рядів

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} aq^{n-1} = 0 \qquad (17)$$

Але виконання необхідної умови не гарантує збіжності ряду. Тому використаємо для з'ясування збіжності чи розбіжності ряду одну з відомих достатніх умов, якою є умова Даламбера. Відповідно до цієї умови обчислимо таку границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{aq^n}{aq^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} q = q < 1 \qquad (18)$$

Достатня умова збіжності числового ряду виконується для ряду (13) у випадку коли знаменник прогресії $q < 1$ на відміну від випадків 1 і 2.

Примітка. Зрозуміло, що дослідження ряду геометричної прогресії можна здійснювати і за допомогою достатньої ознаки $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Для цього використовується формула, за якою задається S_n. Для одержання цієї формули помножимо рівність (19) на q:

$$S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} \tag{19}$$

і далі обчислимо різницю між одержаною рівністю і рівністю (19)

$$S_n(q-1) = a(q_n - 1) \;\;\Rightarrow\;\; S_n = \frac{a(q^n-1)}{q-1} \tag{20}$$

Далі обчислюємо суму ряду S:

$$S = \begin{cases} \textit{перший випадок } (q=1): \;\; \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(q^n-1)}{q-1} \quad - \quad \textit{невизначен а границя}; \\ \textit{другий випадок } (q>1): \;\; \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{q-1}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(q^n-1\right) = \infty, \quad \textit{ряд розбіжний}; \\ \textit{третій випадок } (q<1): \;\; \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{q-1}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(q^n-1\right) = \dfrac{a}{1-q}, \quad \textit{ряд збіжний.} \end{cases}$$

Розглянута геометрична інтерпретація числового ряду нескінченної геометричної прогресії пов’язана з площами прямокутників, тобто є квадратурною. Але можна розглянути і лінійну геометричну інтерпретацію, представлену на рис. 9-11.

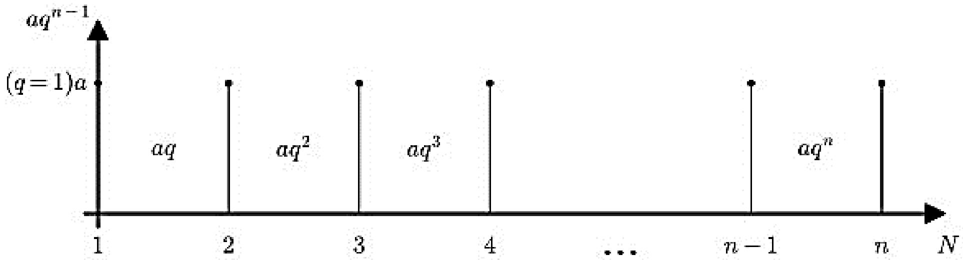

Рис. 9. Довжина відрізків, поставлених у т.т. “n” відображає члени ряду (13) зі знаменником q = 1

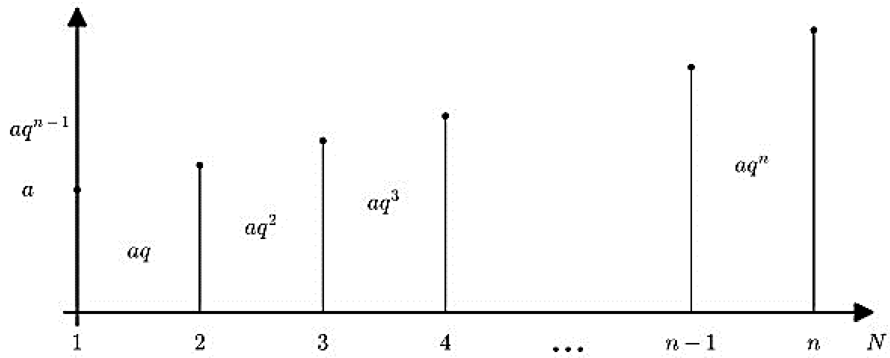

Рис. 10. Довжина відрізків, поставлених у т.т. “n” відображає члени ряду (13) зі знаменником q > 1

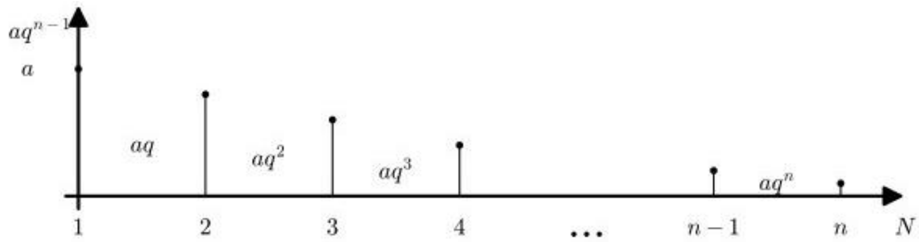

Рис. 11. Довжина відрізків, поставлених у т.т. “n” відображає члени ряду (13) зі знаменником q < 1

Розглянемо іншу інтерпретацію ряду геометричної прогресії (13). При цьому врахуємо, що параметр a є спільним множником і завжди може бути врахований. Будемо розглядати ряд (13) з припущенням, що a = 1:

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... \tag{21}$$

Знову будемо розглядати три випадки:

(1) q = 1:

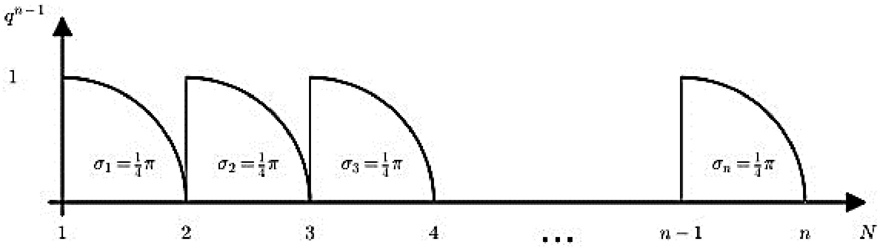

Рис. 12. Значення площ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ є членами ряду геометричної прогресії зі знаменником q = 1

Сума ряду $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{4}\pi = \infty$. Ряд розбіжний.

(2) $q > 1$:

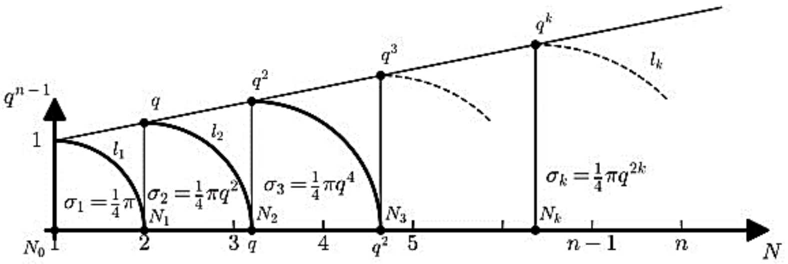

Рис. 13. Значення площ σ_1, σ_2, …, σ_{n-1} є членами ряду геометричної прогресії зі знаменником q > 1

Сума ряду $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Маємо ряд зі знаменником q^2

$$\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi q^2 + \frac{1}{4}\pi q^4 + \ldots + \frac{1}{4}\pi q^{2n} + \ldots \tag{22}$$

Ряд (22) є рядом з квадратурною геометричною інтерпретацією.

З іншого боку маємо:

$N_0N_1 = 1$; $N_0N_1 = q \implies N_0N_2 = 1+q$ і т. д. $\implies ON_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$ (23) $\implies$

$ON = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{N-1} + q^N + \ldots$ (24)

Таким чином, ряд геометричної прогресії (24) зі знаменником q > 1 породжує ряд іншої геометричної прогресії (22) зі знаменником q^2.

Можна також розглядати ряд, членами якого є значення довжин l_1, l_2, …, l_{n-1},…,

де $l_1 = \frac{1}{2}\pi$; $l_2 = \frac{1}{2}\pi q$; $l_3 = \frac{1}{2}\pi q^2$; …; $l_n = \frac{1}{2}\pi q^{n-1}$; …

$$\frac{1}{2}\pi(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots) \tag{25}$$

Ряд (25) є рядом лінійної геометричної інтерпретації.

Далі розглянемо ряд, який складається зі значень площ прямокутних трапецій (див. рис. 13):

$$S_{N_0 1 q N_2},\ S_{N_1 q q^2 N_2},\ \ldots,\ S_{N_n q^n q^{n+1} N_{n+1}},\ \ldots \tag{26}$$

Для спрощення запису площі (26) позначимо через S_0, S_1, …, S_{n+1},… Обчислимо значення вказаних площ

$$\left.\begin{array}{c} S_0 = \dfrac{1+q}{2} = \dfrac{1}{2}(1+q) \\ S_1 = \dfrac{q+q^2}{2} = \dfrac{1}{2}q(1+q) \\ S_2 = \dfrac{q^2+q^3}{2} = \dfrac{1}{2}q^2(1+q) \\ \ldots \\ S_n = \dfrac{1}{2}q^n(1+q) \\ \ldots \end{array}\right\} \tag{27}$$

Маємо ряд

$$\frac{1}{2}(1+q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots) \tag{28}$$

(3) $q < 1$. Геометрична інтерпретація представлена на рис. 14:

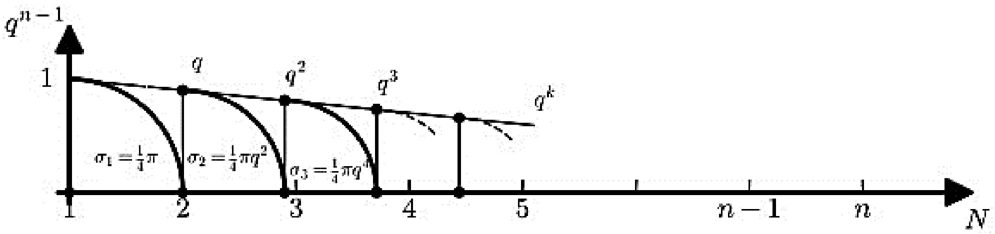

Рис. 14. Значення площ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ є членами ряду геометричної прогресії зі знаменником q < 1

$$\frac{1}{4}\pi(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots) \quad (29)$$

Ряд (29) є числовим рядом квадратурної інтерпретації.

Ряд, членами якого є довжини кривих $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}, \ldots$ має вигляд

$$\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi q+\frac{1}{2}\pi q^2+\cdots+\frac{1}{2}\pi q^{n-1}+\cdots=\frac{1}{2}\pi(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots) \quad (30)$$

Ряд (30) – це числовий ряд лінійної інтерпретації. Ряди (25) і (30) ідентичні, але ряд (25) розбіжний, а ряд (30) – збіжний.

Аналогічно ряду (28) можна побудувати числовий ряд для сум величин площ прямолінійних трапецій $12N_2N_1$, $23N_3N_2$, $34N_4N_3$ і т. д. Значення площ цих трапецій складають наступний числовий ряд:

$$\frac{1+q}{2}+\frac{q+q^2}{2}+\frac{q^2+q^3}{2}+\cdots+\frac{q^{n-1}+q^n}{2}+\cdots \quad (31) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}q^0+q+q^2+q^3+\cdots+\frac{q^n}{2}+\cdots \quad (32)$$

$$q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+\frac{1+q^n}{2}+\cdots \quad (33) \Rightarrow$$

$$S_n=S_{n-1}+\frac{1+q^n}{2} \quad (34)$$

$$S_{n-1}=\frac{q(1-q^{n-2})}{1-q}+\frac{1+q^n}{2} \quad (35)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{q(1-q^{n-2})}{1-q}+\frac{1+q^n}{2}\right]=\frac{q}{1-q}+\frac{1}{2}=\frac{2q+1-q}{2(1-q)}=\frac{q+1}{2(1-q)} \quad (36)$$

Ряд (31) збіжний і має суму $\frac{q+1}{2(1-q)}$, $q < 1$.

Висновки. Отже, геометричне моделювання числових рядів (або у лінійній, або у квадратурній інтерпретації) надає можливість унаочнити характер змін членів ряду, виконання (або невиконання) необхідної умови його збіжності, а також обчислити суму ряду.

Триває робота колективу авторів щодо реалізації програмного засобу для автоматизації демонстрацій розглянутих геометричних моделей числових рядів за різних значень параметрів у хмаро орієнтованому середовищі математичного призначення CoCalc (скорочення від Collaborative Calculation in the Cloud; режим доступу: http://cocalc.com; основний структурний компонент – мережна система комп'ютерної математики SageMath).

Список використаних джерел

1. Ботузова Ю. В. Диференціальне числення функції кількох змінних: розробки практичних занять в аспекті використання комп'ютерних, мобільних технологій та Інтернет-ресурсів у вивченні математичного аналізу. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / Кіровоград : Авангард, 2016. 144 с.
2. Корольський В. В. Геометрична інтерпретація числових рядів. Новітні комп'ютерні технології. 2017. Том XV. С. 57-62.
3. Корольський В. В., Габ С.С. Лінійна, квадратурна та кубатурна геометрична інтерпретація числових рядів засобами моделювання. Новітні комп'ютерні технології. Кривий Ріг : Видавничий центр ДВНЗ «Криворізький національний університет», 2018. Том XVI. С. 67-73.
4. Семеріков С. О., Словак К.І. Теорія та методика застосування мобільних математичних середовищ у процесі навчання вищої математики студентів економічних спеціальностей. Інформаційні технології і засоби навчання. 2011. Том 21, № 1. 18 с. URL: http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/download/413/369.
5. Словак К. І., Попель М. В. Технологія створення лекційних демонстрацій для ММС «Вища математика». Теорія та методика електронного навчання. Том 3. 2011. С. 335-345.

References

1. Botuzova Yu. V. Dyferentsialne chyslennia funktsii kilkokh zminnykh: rozrobky praktychnykh zaniat v aspekti vykorystannia kompiuternykh, mobilnykh tekhnolohii ta Internet-resursiv u vyvchenni matematychnoho analizu. Navchalnyi posibnyk dlia studentiv fizyko-matematychnykh fakultetiv pedahohichnykh universytetiv / Kirovohrad : Avanhard, 2016. 144 s.
2. Korolskyi V. V. Heometrychna interpretatsiia chyslovykh riadiv. Novitni kompiuterni tekhnolohii. 2017. Tom XV. S. 57-62.
3. Korolskyi V. V., Hab S.S. Liniina, kvadraturna ta kubaturna heometrychna interpretatsiia chyslovykh riadiv zasobamy modeliuvannia. Novitni kompiuterni tekhnolohii. Kryvyi Rih : Vydavnychyi tsentr DVNZ «Kryvorizkyi natsionalnyi universytet», 2018. Tom XVI. S. 67-73.

4. Semerikov S. O., Slovak K.I. Teoriia ta metodyka zastosuvannia mobilnykh matematychnykh seredovyshch u protsesi navchannia vyshchoi matematyky studentiv ekonomichnykh spetsialnostei. Informatsiini tekhnolohii i zasoby navchannia. 2011. Tom 21, № 1. 18 s. URL: http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/download/413/369.
5. Slovak K. I., Popel M. V. Tekhnolohiia stvorennia lektsiinykh demonstratsii dlia MMS «Vyshcha matematyka». Teoriia ta metodyka elektronnoho navchannia. Tom 3. 2011. S. 335-345.

THEORETICAL AND METHODOLOGICAL PRINCIPLES OF GEOMETRIC MODELING NUMERICAL SERIES

V. Korolskyi, S. Shokaliuk, Yu. Melnychenko

Kryvyi Rih State Pedagogical University, Ukraine

Abstract. *The problem of visualizing abstract mathematical concepts and objects, searching for their geometric interpretations, in particular with the use of modern information and communication technologies, various Internet services and mobile applications, acquires an enormous spread in various scientific and methodical fields. New publications and manuals on higher mathematics or mathematical analysis show sufficient number of various examples for the description of mathematical abstractions by sections "Investigating the continuity of a function", "Differentiating a function" or "Integrating a function," etc. In this case, examples of visualization of numerical rows, more precisely the finite number of their elements, are rather monotonous and methodically unattractive, in spite of their practical significance.*

The implementation of the geometric modeling of numerical series gives the opportunity to construct new numerical series of different types, to find comparable numerical series, to find out their specific, imperceptible when using traditional sign models of the regularities of the behavior of the members of a series and their application in theory and practice.

In the article all stages of geometric modeling of numerical series are shown on the two examples - harmonic series and a series of geometric progression.

For harmonic series we consider examples of linear and quadratic interpretation, and derive the formulas of the general terms of the obtained series. For a number of geometric progressions we consider cases where the progressive denominator is equal to one, less than one and more than one.

The team of authors is working on the implementation of a software tool for automating the demonstrations of the geometric models of numerical series under consideration at various parameter values. As a tool of software implementation we use CoCalc, a cloud-oriented environment for mathematical purposes. The main structural component of the CoCalc environment is SageMath's network system of computer mathematics. mode of access by environment – http://cocalc.com.

Key words: *harmonic series, geometric progression, calculus, simulation, numerical series.*