Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Друшляк М.Г., Лукашова Т.Д., Скасків Л.В. Навчання майбутніх вчителів математики розв`язувати задачі теорії графів із використанням GEOGEBRA. Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 1(19). С. 35-40.

Drushlyak M.G., Lukashova T.D., Skaskiv L.V. Learning Future Math Teachers To Solve The Problems Of Graph Theory Using Geogebra. Physical and Mathematical Education. 2019. Issue 1(19). P. 35-40.

DOI 10.31110/2413-1571-2019-019-1-006
УДК 378.14: 371.214.46:[004.78:51]

М.Г. Друшляк
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
marydru@fizmatsspu.sumy.ua
ORCID: 000-0002-9648-2248
Т.Д. Лукашова
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
tanya.lukashova2015@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1465-9530
Л.В. Скасків
Національний університет державної фіскальної служби України, Україна
lila_yonyk@ua.fm
ORCID: 0000-0001-9090-6700

НАВЧАННЯ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ РОЗВ`ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ GEOGEBRA

АНОТАЦІЯ

Підготовка фахівців у галузі математики, комп'ютерних та технічних наук, учителів природничо-математичних спеціальностей передбачає вивчення різних розділів сучасної математики, серед яких теорія графів займає особливе місце в силу своєї затребуваності у різних галузях людської діяльності.

Формулювання проблеми. *Теорія графів позиціонується як наука про абстрактні об'єкти та зв'язки між ними, що, у свою чергу, обумовлює формалізацію умов типових задач, їх відрив від реальності, й у багатьох випадках передбачає виконання громіздких обчислень, результат яких не лише «не відчувається» студентами, але й часто відштовхує своєю формалізованістю. Це спричиняє труднощі у сприйнятті студентами навчального матеріалу з теорії графів, а тому виникає потреба у пошуку шляхів їх уникнення. Метою статті є опис методичного підходу у навчанні майбутніх вчителів математики розв`язувати задачі теорії графів, умови яких «прив'язуються» до місцевого матеріалу і передбачають формування у майбутніх фахівців уміння застосовувати набуті знання на практиці, із використаннямпрограми GeoGebra.*

Матеріали і методи. *Аналіз та систематизація науково-педагогічної літератури з використання спеціалізованих програмних засобів при вивченні різних галузей вищої математики, зокрема, дискретної математики. Емпіричний аналіз комп`ютерного інструментарію програмних засобів предметного спрямування у контексті розв`язування задач теорії графів та візуалізації результатів.*

Результати. *Аналіз комп'ютерного інструментарію окремих програм динамічної математики дозволив виділити специфічні комп'ютерні інструменти, орієнтовані на теорію графів Нами пропонується використання GeoGebra, де розробниками закладено різноманітні інструменти для роботи з графами, які зосереджені у розділі Дискретная математика: діаграма Вороного, триангуляція Делоне, задача комівояжера, найкоротша відстань, мінімальне кістякове дерево, опукла оболонка. Зауважимо, що використання програми GeoGebra дозволяє не тільки розв`язати типові задачі курсу, а і пов'язати кожну задачу з реальною життєвою ситуацією через використання місцевого матеріалу та його візуалізацію.*

Висновки. *Попередні результати навчання підтверджують ефективність описаного підходу та доцільність використання саме програми GeoGebra при вивченні теорії графів.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: теорія графів, діаграма Вороного, триангуляція Делоне, задача комівояжера, найкоротша відстань, мінімальне кістякове дерево, програми динамічної математики, GeoGebra.

ВСТУП

Постановка проблеми. Підготовка фахівців у галузі математики, комп'ютерних та технічних наук, учителів природничо-математичних спеціальностей передбачає вивчення різних розділів сучасної математики, серед яких теорія графів займає особливе місце в силу своєї затребуваності у різних галузях людської діяльності (транспортні і комп'ютерні мережі, будівельне проектування, молекулярне моделювання тощо). Водночас, цей розділ математики позиціонується як наука про абстрактні об’єкти та зв’язки між ними, що, у свою чергу, обумовлює формалізацію умов типових задач, їх відрив від реальності, й у багатьох випадках передбачає виконання громіздких обчислень, результат яких не лише «не відчувається» студентами, але й часто відштовхує своєю формалізованістю. Це спричиняє труднощі у сприйнятті студентами навчального матеріалу з теорії графів, а тому виникає потреба у пошуку шляхів їх уникнення.

З іншого боку, сучасна математична освіта пронизана ідеєю використання спеціалізованих комп’ютерних засобів математичного спрямування, серед яких окремою групою виділяють програми динамічної математики (ПДМ) і системи комп’ютерної математики (СКМ). Традиційно використання перших пов’язують із застосуванням у елементарній математиці та розв’язуванням задач шкільного курсу. Використання систем комп’ютерної математики у більшій мірі спрямоване на розв’язування задач вищої математики. Водночас, прискіпливий аналіз інструментарію окремих ПДМ, які на відміну від СКМ більш прості у використанні, дозволяє виділити специфічні комп’ютерні інструменти, орієнтовані на різні галузі вищої математики – аналітичну геометрію, лінійну алгебру, теорію множин, теорію ймовірностей і математичну статистику (Semenikhina & Drushlyak, 2015) тощо.

Тому вбачаємо перспективним використання ПДМ й при вивченні теорії графів.

Аналіз актуальних досліджень. Про використання спеціалізованих програмних засобів у математичній освіті зазначали науковці М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, Н. В. Морзе, С. А. Раков, С. О. Семеріков, О. В. Співаковський, Ю. В. Триус. Зокрема, у роботах Г. О. Михаліна, С. О. Семерікова, Ю. В. Триуса обґрунтовано доцільність використання СКМ Maple, Maxima, Sage та інших при вивченні курсів математичного аналізу, диференціальних рівнянь, вищої алгебри тощо. Проведений нами аналіз команд цих програм, дотичних до теорії графів, хоч і виявив широкий спектр можливостей їх застосування, але підтвердив формалізованість і типовість комп’ютерного інструментарію. У більшості з них стандартний набір інструментів дозволяє схематично зобразити граф вказаного виду, побудувати його діаграму за переліком вершин і ребер, визначити найкоротші шляхи між заданими парами вершин, побудувати кістякове дерево, визначити правильні розфарбування вершин і ребер графа тощо. При цьому розробниками передбачається, що користувач може правильно інтерпретувати надані програмою результати та усвідомлює аргументи у синтаксисі команд.

Нами пропонується ще один програмний засіб для підтримки вивчення теорії графів – ПДМ GeoGebra, де окрім набору типових команд є можливість пов’язати кожну задачу з реальною життєвою ситуацією через використання місцевого матеріалу та його візуалізацію. Про ефективність останнього підходу в освітньому процесі зазначали А. Дістервег, Я. А. Коменський, Н. І. Новіков, Ж. Ж. Руссо, Д. Д. Семенов, А .У. Уртенова, К. Д. Ушинський та ін.

Метою даної статті є опис методичного підходу у навчанні майбутніх вчителів математики розв`язувати задачі теорії графів, умови яких «прив’язуються» до місцевого матеріалу і передбачають формування у майбутніх фахівців уміння застосовувати набуті знання на практиці, із використанням *GeoGebra.*

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Аналіз та систематизація науково-педагогічної літератури з використання спеціалізованих програмних засобів при вивченні різних областей вищої математики, зокрема, дискретної математики. Емпіричний аналіз комп`ютерного інструментарію програмних засобів предметного спрямування у контексті розв`язування задач теорії графів та візуалізації результатів розв`язання.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Зазвичай використання комп’ютерних програм при вивченні теорії графів зводиться до простої побудови вершин та ребер графа, визначенні деяких характеристик графа (планарності, ейлеровості тощо) та виконанні ряду елементарних дій (визначенні степенів вершин, побудові каркасного дерева, пошуку найкоротших шляхів між вершинами у зваженому графі).

Розробниками ПДМ *GeoGebra* (GeoGebra Wiki) закладено більш різноманітні інструменти для роботи з графами, які зосереджені у розділі Дискретная математика: *Диаграмма Вороного, Триангуляция Делоне, Коммивояжер, Кратчайшее Расстояние, Минимальное Остовное Дерево, Выпуклая Оболочка, Оболочка,* і які реалізуються через рядок вводу (Есаян, Добровольский, Седова & Якушин, 2017; Falcón & Ríos, 2015; Falcón, Moreno & Ríos, 2016).

Вказані команди дозволяють розв’язати широке коло задач, причому побудова графу може здійснюватися із прив’язкою до готових схем, планів та карт місцевості. Це вигідно відрізняє ПДМ *GeoGebra* від інших СКМ, дозволяє продемонструвати прикладний аспект теорії графів (у тому числі з орієнтацією на місцевий матеріал) і тим самим викликати особистий інтерес у студентів до вивчення теорії графів.

Наведемо приклади задач, розв’язання яких передбачає використання перелічених вище команд.

1. Команда – *ДиаграммаВороного(<Список точек>).*

Пояснення. Нехай на площині задана скінченна множина точок *P*. Діаграмою Вороного множини *P* називається таке розбиття площини, при якому кожна область розбиття (комірка Вороного) є геометричним місцем точок, що знаходяться до одного з елементів множини *P* ближче, ніж до будь-якого іншого елемента цієї ж множини.

Приклад. На карті міста Суми точками відмічені поштові відділення. Позначте своє місце розташування і з’ясуйте, яке з поштових відділень знаходиться до Вас найближче.

Методичний коментар. Для розв’язання задачі потрібно побудувати діаграму Вороного для множини поштових відділень, тобто розкреслити карту міста так, щоб в кожній комірці знаходилося тільки одне поштове відділення і для всіх точок відповідної комірки воно б було найближчим.

Отримане розбиття є діаграмою Вороного поштових відділень міста (рис. 1).

Відповідь: Найближчим є відділення, що відповідає вершині *D*.

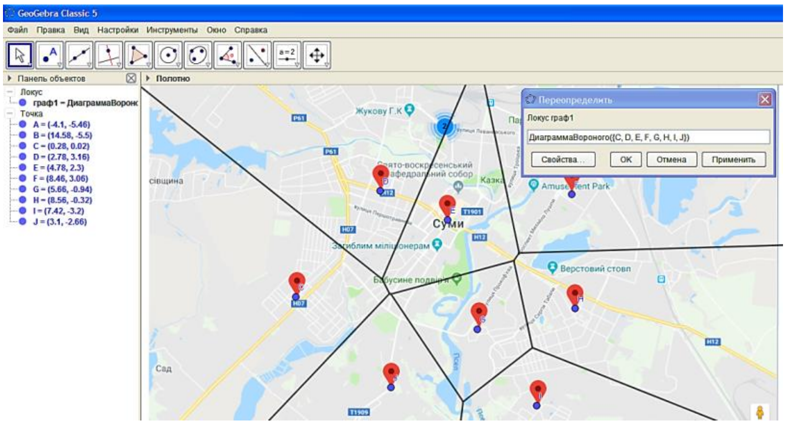

Рис. 1. Діаграма Вороного для множини поштових відділень

2. Команда – *ТриангуляцияДелоне(<Список точек>).*

Пояснення. Нехай на площині задана скінченна множина *P* точок площини (що не лежать на одній прямій). Тріангуляція Делоне – це таке розбиття площини на трикутні області, при якій жодна з точок множини *P* не міститься усередині кола, описаного навколо довільного з утворених трикутників.

Якщо в діаграмі Вороного точки множини *P* усіх сусідніх областей з'єднати відрізками, то отримаємо неорієнтований граф, який і є тріангуляцією Делоне.

Приклад. Для торгівельного залу супермаркету потрібно визначити мінімальну кількість камер спостереження.

Методичний коментар. Одним із застосувань тріангуляції Делоне є побудова зон видимості за заданим положенням спостерігача: необхідно визначити, які ділянки поверхні він бачить, а які ні. Така проблема виникає, зокрема, при побудові пожежних веж, радарних станцій, теле-, радіовеж, розміщенні камер спостереження тощо. При цьому, принцип побудови триангуляції Делоне виключає виникнення так званих сліпих зон, тобто ділянок, які будуть невидимі для спостерігача.

Торгівельна зала представлена многокутником, у вершинах якого повинні бути розміщені камери. Щоб розв'язати задачу, потрібно многокутник тріангулювати і розфарбувати вершини трьома різними кольорами так, щоб кожен трикутник містив всі три кольори. Після цього найменший набір вершин того ж кольору визначає положення камер. Цей набір має не більше $[n/3]$ вершини, де *n* – кількість вершин многокутника.

На рис. 2 побудована тріангуляція Делоне для торгівельного залу супермаркету. Зауважимо, що будь-який з трьох отриманих наборів вершин одного кольору (кольоровий клас) визначає один із способів розподілу камер спостереження, оскільки всі такі класи містять по 8 вершин.

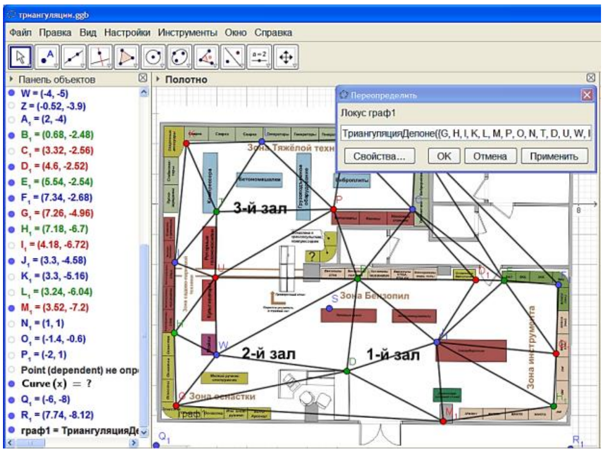

Рис. 2. Тріангуляція Делоне для торгівельного залу супермаркету

4. Команда – *Коммивояжёр(<Список точек>).*

Пояснення. Задача комівояжера (англ. Travelling salesman problem, скорочено TSP) полягає у знаходженні найвигіднішого маршруту, що проходить через зазначені міста по одному разу. В умові задачі вказується критерій вигідності маршруту (найкоротший, найдешевший тощо).

Нехай маємо *n* (*n*>1) населених пунктів і кожна пара цих пунктів сполучена шляхом. Комівояжер, вирушаючи зі свого населеного пункту, повинен відвідати *n*–1 інших населених пунктів, побувавши у кожному з них по одному разу, і повернутися назад. Задача комівояжера полягає у знаходженні найкоротшого з таких маршрутів.

При невеликих *n* задача розв'язується перебором усіх замкнутих маршрутів, що проходять по одному разу через кожен з населених пунктів.

Що являє собою задачі комівояжера в умовах сучасного міста? Наприклад, поїздка по магазинах побутової електроніки. Покупець виїжджає з дому, об'їжджає 5 магазинів і повертається назад. Як правило, людина в цьому випадку інтуїтивно використовує «жадібний» алгоритм, тобто, перша поїздка до найближчого від будинку магазину, від нього до найближчого наступного і т.д. Але відзначимо, що загальна кількість варіантом, якими можна переміститися між магазинами становить факторіал 5 рівний 120 варіантів, і «жадібний» алгоритм може програти в відстані в середньому 10% -20% оптимальному.

Безумовно, реальне життя накладає різні обмеження на пошук оптимального варіанту. Розглянемо кілька практичних застосувань задачі комівояжера: доставка продуктів в магазини з оптового складу виробника (в цьому випадку може бути більш доречна постановка транспортної задачі – доставка в кілька магазинів з декількох складів); доставка бутильованої води; поповнення банкоматів готівкою; збір співробітників для доставки вахтовим методом.

Приклад. Скласти маршрут відпочинку по парку імені Івана Кожедуба (рис. 3).

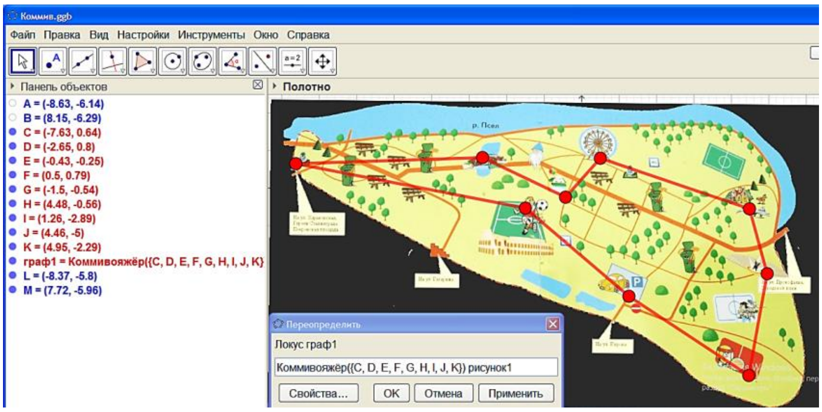

Рис. 3. Маршрут відпочинку

Методичний коментар. У *GeoGebra* задача комівояжера формулюється для мережі, що є повним неорієнтованим зваженим графом, ребрам якого ставляться у відповідність їх евклідові довжини. Вимога задачі полягає у відшуканні замкнутого шляху (цикла) мінімальної довжини, що проходить через всі вершини по одному разу. При цьому у результаті команди виводяться тільки ребра маршруту, а не всі ребра мережі. Якщо ж потрібно вивести всі ребра мережі, то про це необхідно зазначити окремо.

Последовательность[Последовательность[Отрезок[Элемент[список_1,i],
Элемент[список_1,j]],i,1,Длина[список_1]],j,1,Длина[список_1]]
Sequence[Sequence[Segment[Element[lis,i], Element[lis,j]],
i, 1, Length[lis]], j, 1, Length[lis]].

Якщо розв'язок задачі неоднозначний, то новий розв'язок іноді вдається отримати простою перекомпіляцією коду.

4. Команда – *КратчайшееРасстояние(<Список отрезков>, <Начальная точка>, <Конечная точка>, <Логическое выражение для веса ребра>).*

В роботі [5] автори розв'язують проблему проектування плану евакуації з будівлі. Проблема цих карт в тому, що вони зазвичай фіксовані і статичні. Вони не залежать від причини аварійної ситуації, наприклад, від місця пожежі. В таких ситуаціях корисно мати динамічні плани евакуації, які б у режимі реального часу показували потрібний у даній ситуації план евакуації. Автори використовують програму GeoGebra (команда *КратчайшееРасстояние)* для створення динамічного плану евакуації, який би міг швидко оновлюватися у разі необхідності.

Приклад. Знайти найкоротший шлях від Центрального ринку до ТРЦ Мануфактура, скориставшись картою міста Суми.

Найкоротший шлях позначено червоним на рис. 4.

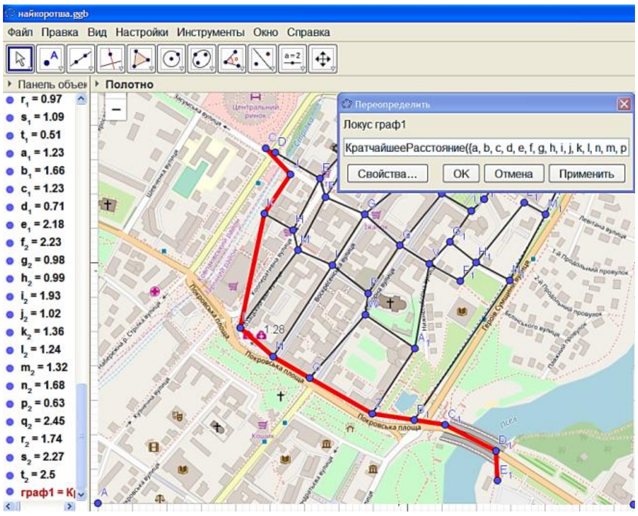

Рис. 4. Найкоротший шлях між заданими пунктами

Приклад. У Сумській області відремонтовано дороги між такими містами: Суми-Ромни, Суми-Конотоп, Суми-Білопілля, Білопілля-Конотоп, Білопілля-Путивль, Путивль-Глухів, Глухів-Шостка. Прокласти найкоротший шлях (з найменшою евклідовою відстанню) від міста Ромни до міста Шостка, використавши лише вказані дороги (рис.5).

Методичний коментар. Пояснимо аргументи цієї команди: *Список отрезков* – це список ребер відповідного неорієнтовного графа; *Начальная точка* – початковаа вершина шляху; *Конечная точка* – кінцева вершина шляху; *Логическое выражение для веса ребра* – логічний параметр. Може приймати значення: *false*, якщо потрібно знайти найкоротшу відстань з мінімальною кількістю ребер; *true*, якщо потрібно знайти найкоротшу відстань з мінімальною евклідовою відстанню.

Найкоротший шлях виділено червоним на рис.5. Зазначимо, що таких шляхів може бути декілька.

5. Команда – *МинимальноеОстовноеДерево(<Список точек>).*

Пояснення. Нехай задано повний неорієнтований зважений граф G (вага ребра – функція відстані між відповідними вершинами). Остовним деревом графа G називають такий його зв'язний підграф, що містить усі вершини графа G, і не містить циклів. Мінімальним кістяковим деревом називають кістякове дерево з мінімальної ваги, тобто дерево з мінімальною сумарною вагою ребер.

Приклад. У Сумській області необхідно відремонтувати дороги між містами Суми, Білопілля, Недригайлів, Ромни, Конотоп, Кролевець, Глухів так, щоб можна було дістатися з будь-якого міста з названих в інше (напряму чи через інші міста). Відома вартість будівництва кожної такої дороги (на рисунку вартість пропорційна відстані між точками). Потрібно визначити, які саме дороги потрібно відремонтувати, щоб мінізувати загальну вартість будівництва (рис.6).

Методичний коментар. На рис. 6 червоним виділено мінімальне кістякове дерево для графа, вершинами якого є вказані міста. Знайдене мінімальне кістякове дерево відповідає тим дорогам, які потрібно відремонтувати з мінімальними затратами, оскільки такий шлях з'єднує усі вказані міста і не містить циклів.

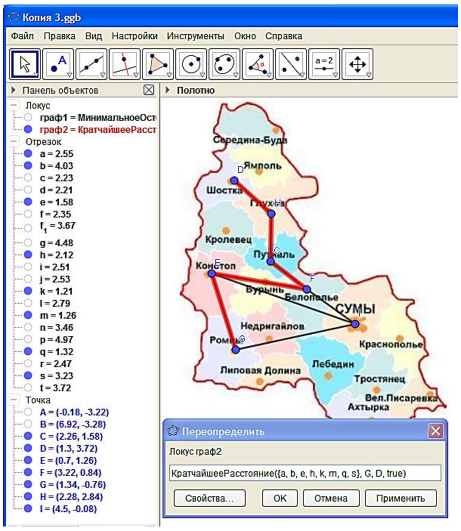

Рис. 5. Найкоротший шлях між містами

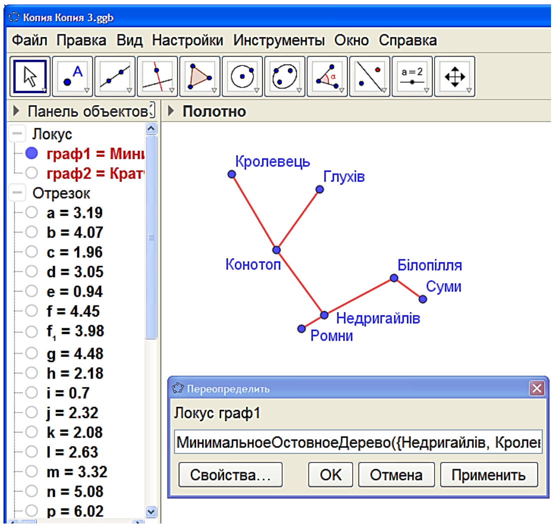

Рис. 6. Мінімальне кістякове дерево доріг, які потрібно відремонтувати із мінімальними затратами

ВИСНОВКИ

Попередні результати навчання підтверджують ефективність описаного підходу та доцільність використання саме ПДМ *GeoGebra* при вивченні теорії графів. Тому наші наукові пошуки наразі зорієнтовані на підбір таких типів завдань, де з позицій практичного застосування математичних теорій, законів і методів та залучення спеціалізованого програмного забезпечення стає можливим швидке і наочне одержання розв'язків особистісно значущих задач.

Список використаних джерел

1. Falcón R. M., Moreno A., Ríos R. Designing evacuation routes with GeoGebra. *GeoGebra International Journal of Romania*,2016. 4 (2). С. 25-38.
2. Falcón R. M., Ríos R. The use of GeoGebra in Discrete Mathematics. *GeoGebra International Journal of Romania*,2015. 4 (1). С. 39-50.
3. GeoGebra Wiki. URL: http://www.geogebra.org (Last accessed: 28.01.2019).
4. Semenikhina O., Drushlyak M. Organization of Experimental Computing in Geogebra 5.0 in Solving Problems of Probability Theory. *European Journal of Contemporary Education*, 2015. 11(1). С. 82-90.
5. Есаян А. Р., Добровольский Н. М., Седова Е. А., Якушин А. В. *Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra: Учеб. пособие*. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017. 418 с.

References

1. Falcón, R. M., Moreno, A., & Ríos, R. (2016). Designing evacuation routes with GeoGebra. *GeoGebra International Journal of Romania*, 4 (2), 25-38.
2. Falcón, R. M., & Ríos, R. (2015). The use of GeoGebra in Discrete Mathematics. *GeoGebra International Journal of Romania*, 4 (1), 39-50.

3. GeoGebra Wiki. Retrieved from: http://www.geogebra.org.
4. Semenikhina, O., & Drushlyak, M. (2015). Organization of Experimental Computing in Geogebra 5.0 in Solving Problems of Probability Theory. *European Journal of Contemporary Education*, 11(1), 82-90.
5. Esayan, A. R., Dobrovolskiy, N. M., Sedova, E. A., & Yakushin, A. V. (2017). Dinamicheskaja matematicheskaja obrazovatel'naja sreda GeoGebra: Ucheb. posobie [GeoGebra's Dynamic Mathematical Educational Environment: Tutorial]. Tula: Izd-vo Tul. gos. ped. un-ta im. L. N. Tolstogo. [in Russian]

LEARNING FUTURE MATH TEACHERS TO SOLVE THE PROBLEMS OF GRAPH THEORY USING GEOGEBRA

M.G. Drushlyak
Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine
T.D. Lukashova
Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine
L.V. Skaskiv
National University of the State Fiscal Service, Ukraine

Abstract. *Training of specialists in the field of mathematics, computer and technical sciences, teachers of natural and mathematical specialties involves the study of various sections of modern mathematics, among which the theory of graphs occupies a special place due to its demand in various fields of human activity.*

Formulation of the problem. *Graph theory is positioned as a science about abstract objects and relations between them, which, in turn, causes the formalization of the conditions of typical tasks, their separation from reality, and in many cases involves the implementation of cumbersome calculations, the result of which is not only "not felt" by students, but often repulses because of their formalism. This makes it difficult for students to perceive study material on graph theory, and therefore there is a need to find ways to avoid them.*

Materials and methods. *Analysis and systematization of scientific and pedagogical literature on the use of specialized software in the study of various areas of higher mathematics, in particular, discrete mathematics. Empirical analysis of computer tools for object-oriented software in the context of solving the problems of graph theory and visualizing the results of solving.*

Results. *The authors see such a way in the use of computer visualization tools, namely, dynamic mathematics software. Analysis of the toolkit of some dynamic mathematics software allowed to allocate specific computer tools focused on graph theory. We are offered a dynamic mathematics software GeoGebra to support the study of graph theory. Typically, the use of software in studying graph theory reduces to the simple construction of the vertices and edges of the graph, the definition of some graph characteristics (planar, eulerism, etc.) and the execution of a number of elementary actions (the definition of degrees of vertices, the construction of a frame tree, the search for the shortest paths between vertices in a weighted the graph). GeoGebra developers have more diverse tools for working with graphs, which are concentrated in the Discrete Mathematics section: Voronoi diagram, Delaunay triangulation, the travelling salesman problem, the shortest distance, the minimum spanning tree, and the convex shell. Note that the use of the GeoGebra allows not only to solve these tasks, but also to link each task with a real life situation using local material and its visualization.*

Conclusions. *The preliminary learning outcomes confirm the effectiveness of the described approach and the feasibility of using the GeoGebra in studying graph theory.*

Keywords: *graph theory, Voronoi diagram, Delaunay triangulation, the travelling salesman problem, the shortest distance, the minimum spanning tree, dynamic mathematics software, GeoGebra.*