Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Лиман Ф.М., Друшляк М.Г., Лукашова Т.Д. Формування логічної грамотності майбутніх учителів математики як важливої складової їх професійної підготовки. Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 2(20). С. 72-79.

Lyman F., Lukashova T., Drushlyak M. Formation Of Logical Literacy Of Future Mathematics Teachers As An Important Component Of Their Professional Training. Physical and Mathematical Education. 2019. Issue 2(20). P. 72-79.

DOI 10.31110/2413-1571-2019-020-2-012
УДК 378.14: 371.214.46

Ф.М. Лиман
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
ORCID: 0000-0001-7445-8514
mathematicsspu@gmail.com

М.Г. Друшляк
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
ORCID: 000-0002-9648-2248
marydru@fizmatsspu.sumy.ua

Т.Д. Лукашова
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
ORCID: 0000-0002-1465-9530
tanya.lukashova2015@gmail.com

ФОРМУВАННЯ ЛОГІЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ЯК ВАЖЛИВОЇ СКЛАДОВОЇ ЇХ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Багатьом сучасним студентам притаманна несформованість логічної грамотності, основи якої не були закладені у них ще в середній школі. Однією з можливих причин цього явища є недостатність знань вчителя математики наукових основ шкільного курсу математики. Тому проблема формування логічної грамотності майбутніх учителів математики залишається актуальною.*

Матеріали і методи. *При дослідженні використовувались наступні методи: порівняння та синтез теоретичних положень, розкритих у науковій та навчальній літературі; спостереження за ходом навчального процесу; аналіз результатів навчання студентів відповідно до проблеми дослідження; узагальнення власного педагогічного досвіду та досвіду колег з інших закладів вищої освіти.*

Результати. *Логічна грамотність майбутніх учителів математики – це володіння ними достатнім обсягом логічних знань і умінь, необхідних для подальшого вивчення математичних дисциплін та у майбутній педагогічній діяльності. Логічні знання та вміння, якими повинен володіти логічно грамотний студент, майбутній вчитель математики, можна умовно поділити на три групи: логічні знання та вміння щодо математичних понять, символіки та означень; логічні знання та вміння щодо математичних виразів і тверджень; логічні знання та вміння щодо математичних теорем. Логічні знання та вміння щодо математичних означень включають у себе наступні компоненти: логічно грамотне формулювання означень; виявлення та аналіз логічної структури означень; коректний запис означень за допомогою логічних символів; побудова стверджувальної форми, еквівалентної запереченню визначальної частини означення. Логічні знання та уміння щодо математичних виразів і тверджень передбачають наступні дії: розпізнавати види виразів і тверджень; правильно конструювати вирази і твердження; виявляти та аналізувати логічну структуру тверджень; коректно використовувати квантори і логічні зв'язки; коректно записувати твердження за допомогою логічних символів; перекладати символічний запис тверджень на природну мову; перетворювати заперечення даного неелементарного твердження у рівносильне йому твердження у стверджувальній формі. Логічні знання та вміння щодо математичних теорем: відновлення опущених кванторів у теоремі; перехід від безумовної форми теореми до її умовної форми і навпаки; конструювання для даного твердження оберненого, протилежного і оберненого до протилежного тверджень; виявлення та аналіз логічної структури теорем; формулювання теорем із використанням термінів «необхідно» і «достатньо».*

Висновки. *Процес формування логічної грамотності майбутніх учителів математики повинен бути цілеспрямованим та систематичним. Логічна грамотність повинна формуватися ще на шкільному рівні і цей процес повинен продовжуватися під час вивчення фундаментальних математичних курсів та методики навчання математики, а особливо курсу математичної логіки.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: логічна грамотність, логічні знання та вміння, майбутні вчителі математики, математична логіка і теорія алгоритмів.

ВСТУП

Постановка проблеми. Однією з особливостей мислення сучасних студентів є його кліповість. Кліпове мислення – це процес відображення низки різноманітних властивостей об'єктів, без урахування зв'язків між ними, що характеризується фрагментарністю інформаційного потоку, алогічністю, повною різнорідністю інформації, що надходить, високою швидкістю перемикання між фрагментами інформації, відсутністю цілісної картини сприйняття навколишнього світу. Через це більшість сучасних студентів не мають навичок системно сприймати інформацію, критично опрацьовувати її, виділяти головне, зважувати на можливі наслідки і робити правильні висновки. Як наслідок, у сучасних студентів не сформована логічна грамотність, основи якої мають закладатися ще у середній школі.

Сучасний вчитель повинен уміти робити правильні висновки у різноманітних педагогічних ситуаціях, зважувати можливі наслідки своїх слів та дій. Він повинен володіти низкою взаємопов'язаних між собою особистісних та професійно важливих якостей, які з урахуванням досвіду визначають і формують його професійну компетентність. Усе зазначене у повній мірі мірою стосується майбутнього вчителя математики, логічна грамотність якого передбачає розуміння логіки доведення математичних тверджень, уміння використовувати теоретико-множинну і логічну символіку для запису математичних тверджень і текстів тощо.

Аналіз актуальних досліджень. Проблемі формування логічної грамотності присвячені дослідження Г. Фройденталя (Фройденталь, 1983), І. Л. Тімофєєвої та І. С. Сергєєвої (Тимофеева & Сергеева, 2010), І. Л Нікольської (Никольская, 1973; Никольская, 1978). В.Ю. Середа та Є. В. Яковлєва вивчали проблему формування логічної культури мислення (Середа В.Ю., 1989; Яковлева, 2008). Т. П. Варламова присвятила свої дослідження формуванню логічної компетентності студентів (Варламова, 2006).

З проблемою формування логічної грамотності тісно пов'язана проблема формування культури математичної мови та математичної культури взагалі. Проблему формування культури математичної мови досліджували такі науковці як В. А. Далінгер (Далингер, 2014), Т. Л. Годованюк (Годованюк, 2016), Д. А. Зуєва (Зуева, 2009), Т. А. Іванова (Иванова & Горчаков, 2010), Д. В. Шармін (Шармин, 2005). А. Я. Хінчин (Хинчин, 1963) вважає, що з низькою мовною культурою напряму пов'язаний формалізм математичних знань студентів. Велика частина досліджень у цій області присвячена окремим компонентам математичної мови та їх ролі у навчанні. Особливо багато робіт присвячено методиці роботи із символікою, термінологією, означеннями і теоремами. Так, В. Г. Болтянский (Болтянский, 1973) і А. А. Столяр (Столяр, 1965) обговорюють можливість використання логічної символіки та елементів логічної мови у навчанні математики; Дж. Ікрамов (Икрамов, 1981) пропонує навчальний матеріал в рамках роботи з символікою та термінологією; Н. Я. Віленкин (Виленкин, Абайдулин & Таварткиладзе, 1984) приділяє увагу означенням та методиці роботи з ними; В. А. Далінгер (Далингер, 2001) присвятив свої дослідження актуальним питанням теорії і методиці навчання доведень теорем.

Автори продовжують досліджувати різні аспекти елементарної математики з позиції сучасної вищої математики (Лиман&Одінцова, 2018), зокрема, вплив курсу математичної логіки і теорії алгоритмів на процес формування логічної грамотності майбутніх вчителів математики.

Метою статті є визначення шляхів та напрямків формування та розвитку логічної грамотності майбутніх вчителів математики при вивченні курсу «Математична логіка і теорія алгоритмів».

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для дослідження використовувались наступні методи: системний науково-методологічний аналіз підручників і навчальних посібників, монографій, статей і матеріалів науково-методичних конференцій; спостереження за ходом навчального процесу; аналіз результатів навчання студентів у відповідності до проблеми дослідження; порівняння та синтез теоретичних положень, розкритих у науковій та навчальній літературі; узагальнення власного педагогічного досвіду та досвіду колег з інших закладів вищої освіти.

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

Під логічною грамотністю студентів, майбутніх вчителів математики, будемо розуміти володіння ними достатнім обсягом логічних знань і умінь, необхідних для подальшого вивчення математичних дисциплін та у майбутній педагогічній діяльності. Цей обсяг логічних знань і умінь включає: знання логічних норм математичної мови й дотримання цих норм, вміння коректно використовувати логічні засоби і терміни математичної мови, а також основні дедуктивні знання і вміння (Тимофеева & Сергеева, 2010).

Підкреслюючи надзвичайну важливість логічних умінь для оволодіння будь-яким видом діяльності, І. Л. Нікольська виділила «деякий мінімум логічних знань та вмінь, необхідний кожній людині незалежно від роду її занять, і передбачається у кожного, хто отримав середню освіту» (Никольская, 1973). У цей мінімум увійшли:

- знання правил класифікації; знання точного змісту логічних зв'язок;
- уміння виділити логічну форму (структуру) висловлення;
- уміння формулювати заперечення складних висловлень і висловлень із кванторами;
- розуміння змісту слів «слідує», «рівносильно» (логічно), «необхідно», «достатньо» (необхідна, достатня умова);
- уміння перевіряти правильність суджень, виявляти грубу логічну помилку;
- знання найбільш уживаних прийомів доведень (Никольская, 1973).

Сформулюємо та розкриємо змістове наповнення логічних знань та вмінь, якими повинен володіти логічно грамотний студент, майбутній вчитель математики.

Логічні знання та вміння щодо математичних понять, символіки та означень

Логічні знання та вміння щодо математичних означень включають у себе наступні компоненти:

- логічно грамотне формулювання означень;

- виявлення та аналіз логічної структури означень;
- коректний запис означень за допомогою логічних символів;
- побудова стверджувальної форми, еквівалентної запереченню визначальної частини означення.

При викладанні математичних дисциплін весь час доводиться працювати з тими чи іншими поняттями, встановлювати зв'язки між ними та формувати у студентів знання і навички про ці поняття й способи їх методичного обґрунтування при викладанні математики. Виділяють наступні види математичних понять: *неозначувані, означувані і описові*.

Означувані поняття в математиці складають більшість у порівнянні з іншими науками. До *описових* можна віднести деякі поняття курсу елементарної та вищої математики (поняття виразу, рівняння, нерівності арифметичної дії, алгоритму тощо). *Неозначувані* поняття поділяються на абсолютно неозначувані поняття (множина) та відносно неозначувані поняття, які можна означити, але це не відбувається з різних причин (пара, трійка, ... , кортеж елементів).

Поняття характеризується змістом і обсягом, має певний термін, а в математиці дуже часто і символ (% – процент, відсоток; $(a_n), (a_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність; ∇ – набла; $\bar{a} \times \bar{b}, \left[\bar{a}, \bar{b}\right]$ – векторний добуток векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$; H⊲G – підгрупа H нормальна в групі G).

При цьому символіка поділяється на загальновизнану, таку, що розвивається і нову, що з'являється у процесі розвитку математики, написанні наукових статей, книг тощо.

Означенням (дефініцією) поняття називають розкриття його змісту. Поняття можна означити наступними способами.

1. *Означення поняття через найближчий рід і видову ознаку* відбувається наступним чином. Поняття підводиться під інше, більш ширше поняття, що є найближчим його родом, і вказуються ознаки, якими означуване поняття відрізняється від інших понять, які входять до цього роду. Прикладами таких означень є означення рівнобедреного трикутника, парної функції одного аргументу, абелевої групи.

2. *Генетичні означення* — це означення, які вказують на спосіб утворення об'єктів з обсягу поняття. Наприклад, означення бісектриси кута у підручнику з геометрії автора О. В. Погорєлова (Погорелов, 2004). Зауважимо, що у шкільному підручнику з геометрії автора Г. П. Бевза (Бевз, Бевз & Владімірова, 2015) означення бісектриси є означенням через найближчий рід і видову ознаку.

3. *Аксіоматичні означення* – це означення понять за допомогою аксіом, тобто тверджень, прийнятих без доведення. Наприклад, означення геометрії Евкліда, групи, лінійного простору, числових систем.

4. *Індуктивні* (або рекурсивні) означення – це означення, які складаються з прямих пунктів (базисні, в них вводяться базисні предмети поняття, і індуктивні, в них описуються способи отримання всіх інших предметів поняття); непрямого пункту, в якому підкреслюється, що всі означувані об'єкти вичерпуються заданими у прямих пунктах. Наприклад, означення формули в математичній логіці. Зазначимо, що у такий спосіб можна означити поняття виразу для різних класів у шкільному курсі математики.

5. *Контекстуальні означення* – це означення, в яких зміст поняття розкривається через уривок тексту, через аналіз конкретної ситуації. Наприклад, означення рівняння в початковій школі.

6. *Остенсивні означення* – це означення через демонстрацію. Наприклад, поняття рівності і нерівності у початковій школі вводиться на прикладах.

Більшість означень шкільного курсу математики є означеннями через найближчий рід і видову ознаку, і на цьому потрібно акцентувати увагу майбутніх вчителів математики. Кожного разу при формулюванні такого означення відбувається звуження родового поняття. Наприклад, P(x) – «x – рівнобедрений трикутник», Q(x) – «трикутник x має дві рівні сторони». Якщо позначити M множину всіх трикутників, то означення матиме вигляд:

$$\forall x \in M \left(P(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} Q(x)\right)$$

Проте словесне формулювання «Трикутник x називається рівнобедреним, якщо дві його сторони рівні» не відповідає цьому запису. В означеннях слово «якщо» треба завжди розуміти як «тоді і тільки тоді». При цьому Q(x) виступає як необхідна і достатня умова для P(x). Тому символ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (або $\overset{\text{def}}{=}$) є символом ототожнення, який читається «... є за означенням ...», «... дорівнює за означенням...».

Формулювання означення може виявитись нераціональним або неправильним у порівнянні з загальноприйнятими. Істинність означення не доводиться, а зумовлюється домовленістю наукового загалу.

Одне і те ж поняття може мати декілька означень рівносильних між собою у тому розумінні, що їх обсяги однакові (наприклад, різні аксіоматики евклідової геометрії, групи, кільця; означення квадрата, точних класів алгоритмів). Всі критеріальні теореми фактично відкривають шлях до різних означень одного і того ж поняття.

Маючи означення поняття завжди можна одержати формально означення заперечуючого (протилежного) поняття, здійснивши дихотомічний поділ родового поняття (трикутник рівносторонній – нерівносторонній; група абелева – неабелева; функція обмежена – необмежена; послідовність збіжна – незбіжна). При цьому у найпростіших випадках помилок майже не буває, але у більш складних ситуаціях помилки зустрічаються (навіть у серйозних посібниках). Наприклад, означення фундаментальної та нефундаментальної послідовності дійсних чисел:

$$(a_n) - \text{фундаментальна} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in R^{+} \exists n_0 \in N\ \forall k \in N\ \forall m \in N(k > n_0 \wedge m > n_0 \Rightarrow |a_k - a_m| < \varepsilon$$

$$(a_n) - \text{не фундаментальна} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists x \in R^{+} \forall n_0 \in N\ \exists k \in N\ \exists m \in N(k > n_0 \wedge m > n_0 \wedge |a_k - a_m| \geq \varepsilon$$

Найчастіше зустрічаються помилки через порушення рівносильностей $\overline{A \Rightarrow B} \equiv \overline{\bar{A} \vee B} \equiv A \wedge \bar{B}$.

Зауважимо, що розширення понять неминуче призводить до неозначуваних понять або категорій (множина, матерія).

Логічні знання та вміння щодо математичних виразів і тверджень

Логічні знання та уміння щодо математичних виразів і тверджень передбачають наступні дії:

- розпізнавати види виразів і тверджень;
- правильно конструювати вирази і твердження;
- виявляти та аналізувати логічну структуру тверджень;
- коректно використовувати кванторні слова і логічні зв'язки;
- коректно записувати твердження за допомогою логічних символів;
- перекладати символічний запис тверджень на природну мову;
- перетворювати заперечення даного неелементарного твердження у рівносильне йому твердження у стверджувальній формі.

Логічні знання та вміння щодо математичних теорем

Логічні знання та вміння щодо математичних теорем:

- відновлення опущених кванторів у теоремі;
- перехід від безумовної форми теореми до її умовної форми і навпаки;
- конструювання для даного твердження оберненого, протилежного і оберненого до протилежного тверджень;
- виявлення та аналіз логічної структури теорем; формулювання теорем із використанням термінів «необхідно» і «достатньо».

Класифікація теорем базується на класифікації суджень (таблиця 1).

Таблиця 1

Класифікація теорем

	Судження (за Арістотелем)		**Структура теореми із використанням обмежених кванторів**
1	загальностверджувальні	всі S суть P	$\forall x \in M\big(S(x) \Rightarrow P(x)\big)$
2	загальнозаперечувальні	всі S не є P	$\forall x \in M\big(S(x) \Rightarrow \overline{P(x)}\big)$
3	частково стверджувальні	деякі S суть P	$\exists x \in M\big(S(x) \wedge P(x)\big)$
4	частково заперечувальні	деякі S не є P	$\exists x \in M\big(S(x) \wedge \overline{P(x)}\big)$

Теореми усіх вказаних у таблиці типів зустрічаються в математиці. Звертаємо увагу, що тип 4) є запереченням типу 1), а тип 3) – запереченням типу 2). Особливий інтерес представляють теореми типу 1) як такі, що найбільш розповсюджені. У теоремах такого типу розрізняють: $\forall x \in M$– кванторна приставка, в якій вказується множина, на якій теорема розглядається; S(x) – умова теореми; P(x) – висновок теореми.

Дві теореми, які відрізняються хоча б однією з трьох своїх складових, вважаються різними. Наприклад, різними є наступні дві теореми.

Теорема 1. Якщо чотирикутник – ромб, то його діагоналі перпендикулярні.

Теорема 2. Якщо паралелограм – ромб, то його діагоналі перпендикулярні.

Позначимо області істинності предикатів S(x) і P(x) на множині M відповідно M_S і M_P. Твердження $\forall x \in M\big(S(x) \Rightarrow P(x)\big)$ є теоремою, якщо $M_S \neq 0$ і $M_S \subseteq M_P$. При цьому S(x) називають достатньою умовою для P(x), а P(x) – необхідною умовою для S(x). Це дозволяє по-різному формулювати одне й те ж твердження, залежно від того, що бажають підкреслити. Наприклад, наведемо різні формулювання однієї і тієї ж теореми.

Формулювання 1. Для будь-якого елемента x множини M для виконання S(x) необхідно, щоб виконувалась P(x).

Формулювання 2. Який би не був елемент x множини M, для виконання P(x) достатньо, щоб виконувалась S(x).

Формулювання 3. Для будь-якого елемента x множини M S(x) має місце лише тоді, коли має місце P(x).

Чітке і однозначне виділення в кожній теоремі типу 1) умови і висновку дозволяє ввести поняття твердження, оберненого і протилежного даній теоремі.

Нехай маємо пряму теорему

$$\forall x \in M\big(S(x) \Rightarrow P(x)\big). \quad (1)$$

Тоді твердження, обернене до теореми типу (1), має вигляд

$$\forall x \in M\big(P(x) \Rightarrow S(x)\big). \quad (2)$$

Якщо таке твердження істинне, то його називають оберненою теоремою до (1), а теореми (1) і (2) називаються взаємно оберненими.

Якщо істинними є і пряме, і обернене до неї твердження, то M_S=M_P, а предикати S(x) і P(x) рівносильні на множині M і кожний з них є необхідною і достатньою умовою для іншого. Це дає можливість об'єднати теореми типів (1) і (2) в одну теорему типу

$$\forall x \in M\big(S(x) \Leftrightarrow P(x)\big). \quad (3)$$

Теореми типу (3) називаються критеріальними або критеріями. Якщо в теоремі типу (1) умову і висновок замінити запереченнями, то одержимо твердження виду

$$\forall x \in M\big(\overline{S(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}\big), \quad (4)$$

протилежне до типу (1). Аналогічно твердження типу

$$\forall x \in M\big(\overline{P(x)} \Rightarrow \overline{S(x)}\big) \quad (5)$$

є протилежним до теореми типу (2). Теореми типів (1) і (4) та (2) і (5) називаються взаємно протилежними.

Зауважимо, що протилежна теорема не є запереченням прямої, оскільки

$$\overline{\forall x \in M\big(S(x) \Rightarrow P(x)\big)} \equiv \exists x \in M\big(\overline{S(x) \Rightarrow P(x)}\big) \equiv \exists x \in M\big(S(x) \wedge \overline{P(x)}\big).$$

Теореми типів (1) і (5) та (2) і (4) рівносильні між собою. Тому, наприклад, для доведення теореми типу (1) достатньо довести теорему типу (5) і навпаки. На цьому факті в математиці базується схема непрямого доведення або доведення від супротивного.

Теореми типу (1) умовно поділяють на прості і складні. Теорема проста, коли S(x) і P(x) – елементарні предикати (не утворені з інших). В усіх інших випадках теорема є складною.

Наприклад, якщо умова теореми $S(x) = S_1(x) \vee S_2(x) \vee \ldots \vee S_n(x)$ є диз'юнкцією декількох предикатів, або висновок теореми $P(x) = P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \ldots \wedge P_n(x)$ є кон'юнкцією декількох простих предикатів, то доведення складної теореми складається з доведень простих теорем, оскільки

$$\forall x \in M\big(S_1(x) \vee \ldots \vee S_n(x) \Rightarrow P(x)\big) \equiv \forall x \in M\big(S_1(x) \Rightarrow P(x)\big) \wedge \ldots \wedge \big(S_n(x) \Rightarrow P(x)\big)$$

Звідси складне твердження $\forall x \in M(S_1(x) \vee \ldots \vee S_n(x) \Rightarrow P(x))$ істинне (тобто, є теоремою) тоді і тільки тоді, коли істинним є кожне з простих тверджень $\forall x \in M\big(S_i(x) \Rightarrow P(x)\big)$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Аналогічно у другому випадку складне твердження $\forall x \in M(S(x) \Rightarrow P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \ldots \wedge P_N(x))$ є теоремою тоді і тільки тоді, коли істинне кожне з простих тверджень $\forall x \in M\big(S(x) \Rightarrow P_i(x)\big)$, i = 1,2, ...,n.

Зауважимо, що для складних теорем обернені і протилежні твердження формулюються для кожного формулювання прямої теореми, а для рівносильних між собою формулювань відповідні їм формулювання обернених і протилежних тверджень можуть виявитись не рівносильними між собою. Наприклад, маємо три рівносильних твердження:

$$\forall x \in M\big(S_1(x)S_2(x) \Rightarrow P(x)\big) \equiv \forall x \in M\Big(S_1(x) \Rightarrow \big(S_2(x) \Rightarrow P(x)\big)\Big) \equiv$$
$$\equiv \forall x \in M\Big(S_2(x) \Rightarrow \big(S_1(x) \Rightarrow P(x)\big)\Big)$$

Обернені до них твердження уже не є рівносильними у загальному випадку. Це стосується і протилежних до них тверджень. Ці факти майбутнім вчителям математики потрібно завжди враховувати у процесі роботи з теоремами, особливо при розгляді теорем-критеріїв.

Майбутній вчитель математики також повинен чітко усвідомлювати, що теореми, які відповідають загальностверджувальним судженням (теореми типу $\forall x \in M\big(S(x) \Rightarrow P(x)\big)$ та $\forall x \in M\big(S(x) \Rightarrow \overline{P(x)}\big)$) спростовуються контрприкладами, тобто для їх спростування достатньо показати, що істиними є твердження $\exists x \in M\big(S(x) \wedge \overline{P(x)}\big)$ та $\exists x \in M\big(S(x) \wedge P(x)\big)$ відповідно. І у своїй майбутній професійній діяльності він повинен вчити учнів будувати контрприклади, оскільки таке вміння є важливою якістю критичного мислення.

Наведемо пару конкретних інтерпретацій формул теорем розглянутих вище. Оскільки формули теорем замкнені (предметна змінна x в кожній з них зв'язана квантором), то формули перетворюються у висловлення, які будуть істинними, коли відповідний предикат тотожно істинний, і хибними у протилежному випадку.

Теорема 3. Якщо квадратна матриця X третього порядку і невироджена, то її ранг дорівнює 3.

Введемо позначення: $\mathrm{S_1(X)}$ – «матриця X третього порядку», $\mathrm{S_2(X)}$ – «матриця X невироджена», $\mathrm{P(X)}$ – «ранг матриці X дорівнює 3». Ці предикати розглядаємо на множині M всіх квадратних матриць. У цих позначеннях теорема має вигляд

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}\big(\mathrm{S_1(X)} \wedge \mathrm{S_2(X)} \Rightarrow \mathrm{P(X)}\big) \tag{6}$$

Отримуємо рівносильності:

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}\big(\mathrm{S_1(X)} \wedge \mathrm{S_2(X)} \Rightarrow \mathrm{P(X)}\big) \equiv \forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}\Big(\overline{\mathrm{S_1(X)}} \vee \overline{\mathrm{S_2(X)}} \vee \mathrm{P(X)}\Big) \equiv$$
$$\equiv \forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}\Big(\mathrm{S_1(X)} \Rightarrow \big(\mathrm{S_2(X)} \Rightarrow \mathrm{P(X)}\big)\Big) \equiv \forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}\Big(\mathrm{S_2(X)} \Rightarrow \big(\mathrm{S_1(X)} \Rightarrow \mathrm{P(X)}\big)\Big)$$

Отже, теорема (6) рівносильна теоремам:

$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}\Big(\mathrm{S_1(X)} \Rightarrow \big(\mathrm{S_2(X)} \Rightarrow \mathrm{P(X)}\big)\Big) \tag{7}$$
$$\forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}\Big(\mathrm{S_2(X)} \Rightarrow \big(\mathrm{S_1(X)} \Rightarrow \mathrm{P(X)}\big)\Big) \tag{8}$$

Оберненими до теорем (6), (7), (8) відповідно будуть твердження (9), (10), (11):

$$\alpha = \forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}\big(\mathrm{P(X)} \Rightarrow \mathrm{S_1(X)} \wedge \mathrm{S_2(X)}\big) \tag{9}$$
$$\beta = \forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}\Big(\big(\mathrm{S_2(X)} \Rightarrow \mathrm{P(X)}\big) \Rightarrow \mathrm{S_1(X)}\Big) \tag{10}$$

При цьому $\beta \equiv \forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}\Big(\big(\overline{\mathrm{S_2(X)}} \vee \mathrm{P(X)}\big) \Rightarrow \mathrm{S_1(X)}\Big)$

$$\gamma = \forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}\Big(\big(\mathrm{S_1(X)} \Rightarrow \mathrm{P(X)}\big) \Rightarrow \mathrm{S_2(X)}\Big) \tag{11}$$

Аналогічно $\gamma \equiv \forall \mathrm{X} \in \mathrm{M}\Big(\big(\overline{\mathrm{S_1(X)}} \vee \mathrm{P(X)}\big) \Rightarrow \mathrm{S_2(X)}\Big)$

Всі три твердження (9), (10), (11) не є істинними, бо в кожній з них область істинності умови не є підмножиною області істинності висновку.

Але їх області істинності перетинаються. Достатньо взяти $\mathrm{X} = \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, де значення істинності висловлень наступні $|\mathrm{S_1(E)}| = |\mathrm{S_2(E)}| = |\mathrm{P(E)}| = 1$, $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$.

При цьому твердження (9), (10), (11) між собою нерівносильні як формули логіки предикатів. Справді, візьмемо матрицю X.

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{тоді} \quad \begin{matrix} |\mathrm{S_1(X)}| = 0 & |\alpha| = 1 \\ |\mathrm{S_2(X)}| = 0\,, & |\beta| = 0 \\ |\mathrm{P(X)}| = 0 & |\gamma| = 0 \end{matrix}$$

Отже, α не рівносильна β і α не рівносильна γ.

Теорема 4. Якщо натуральне число ділиться на 3 і на 5, то воно ділиться на 15.

Отримаємо три рівносильні теореми:

$$\forall x \in N(x \vdots 3 \land x \vdots 5 \Rightarrow x \vdots 15) \qquad (12)$$

$$\forall x \in N\big(x \vdots 3 \Rightarrow (x \vdots 5 \Rightarrow x \vdots 15)\big) \qquad (13)$$

$$\forall x \in N\big(x \vdots 5 \Rightarrow (x \vdots 3 \Rightarrow x \vdots 15)\big) \qquad (14)$$

Оберненими до теорем (12) – (14) будуть твердження (15) – (17) відповідно:

$$\forall x \in N(x \vdots 15 \Rightarrow x \vdots 3 \land x \vdots 5) \qquad (15)$$

$$\forall x \in N\big((x \vdots 5 \Rightarrow x \vdots 15) \Rightarrow x \vdots 3\big) \qquad (16)$$

$$\forall x \in N\big((x \vdots 3 \Rightarrow x \vdots 15) \Rightarrow x \vdots 5\big) \qquad (17)$$

Твердження (15) істине, а твердження (16) і (17) хибні. Для їх спростування достатньо привести контрприклад: $x = 7$.

Наведений у статті підхід щодо формування і розвитку логічної грамотності майбутніх учителів математики, автори пропонують здійснювати у процесі вивчення курсу «Математична логіка і теорія алгоритмів». При вивченні цього курсу студенти опановують поняття та закони алгебри логіки, логіки предикатів та теорії алгоритмів, розвивають навички використання аксіоматичного методу та побудови математичних теорій та моделей, формують і закріплюють методи розв'язування логічних задач, вчаться будувати та перевіряти правильність математичних тверджень. Усе це закладає міцний фундамент для розвитку логічної грамотності та критичного мислення.

Розгляд деяких тем («Поняття та їх означення», «Аналіз структури теорем») можна проводити, виділяючи для них у програмі дисципліни окремі практичні заняття. З іншого боку, формування елементів логічної грамотності у багатьох випадках виступає обов'язковим елементом вивчення базових тем математичної логіки (особливо логіки предикатів), тому записи математичних тверджень з використанням логічної символіки та їх подальший аналіз можна здійснювати при вивченні відповідних тем з логіки предикатів. Відповідні завдання доречно включати у індивідуальні завдання, контрольні та самостійні роботи, а окремі питання виносити на семінарські заняття чи колоквіуми.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Таким чином, можна стверджувати наступне.

1. Сучасним студентам притаманна несформована логічна грамотність. З одного боку така ситуація складається через особливість їх мислення, а саме його «кліповість». З іншого боку, це відбувається через те, що логічна грамотність не формується на шкільному рівні в силу багатьох причин. Серед таких причин можна вказати небажання вчителя, недостатність знань вчителя з наукових основ шкільного курсу математики, відсутність часу на акцентування логічних основ теоретичних знань, дотримання принципу доступності, якому повинні відповідати шкільні підручники, вікові особливості учнів тощо.

2. Логічна грамотність студентів, майбутніх вчителів математики – це володіння достатнім обсягом логічних знань і умінь, необхідних для подальшого вивчення математичних дисциплін та у майбутній педагогічній діяльності. Логічно грамотний студент, майбутній вчитель математики, повинен володіти логічними знаннями та вміннями щодо означення математичних понять; логічними знаннями та вміннями щодо запису й аналізу математичних виразів і тверджень, логічними знаннями та вміннями щодо структури, формулювання та доведення математичних теорем.

3. Як показує досвід, при викладанні математичних дисциплін у закладах вищої освіти формуванню логічної грамотності студентів приділяється замало уваги. Роботу по формуванню логічної грамотності доцільно проводити на заняттях з математичної логіки, а не лише на окремих заняттях з методики навчання математики.

Список використаних джерел

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. *Геометрія: Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. К.: Вид-во «Відродження»*, 2015. 192 с.
2. Болтянский В.Г. Использование логической символики при работе с определениями. *Математика в школе*, 1973. 5. С. 45-50.
3. Варламова Т. П. Формирование логической компетентности в процессе обучения математике: дисс….канд.пед.наук: 13.00.02 / Красноярск, 2006. 195с.
4. Виленкин Н.Я., Абайдулин С.К., Таварткиладзе Р.К. Определения в школьном курсе математики и методика работы над ними. *Математика в школе*, 1984. 4. С. 43-47.
5. Годованюк Т. Л. Формування мовленнєвої культури майбутнього вчителя математики в системі методичної підготовки. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*, 2016. 2 (56). С. 209-218.
6. Далингер В. А. Развитие математической речи учащихся при обучении математике. Материалы конференции «Современные наукоемкие технологии», 2014. 6. С. 83-85.
7. Далингер В.А. *Обучение учащихся доказательству теорем: Учеб. пособие*. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2002. 419 с.
8. Зуева Д. А. Культура математической речи учителя: основные качества и условия их развития. *Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена*, 2009. С. 134-139.
9. Иванова Т. А., Горчаков А. С. Развитие математической речи школьников в процессе изучения определения понятий, теорем, правил. *Ярославский педагогический вестник*, 2010. 4. С. 55-59.
10. Икрамов Дж. *Математическая культура школьника*. Ташкент: Укитувчи, 1981. 280 с.
11. Лиман Ф. М. *Математична логіка: навчальний посібник*. Суми: Слобожанщина, 1998. 152 с.
12. Лиман Ф. М., Одінцова О. О. Структурні властивості раціональних чисел – важлива складова математичних знань вчителів математики. *Фізико-математична освіта*, 2018. 2(16). С.72-79.
13. Никольская И. Л. О единой линии воспитания логической грамотности при обучении математике. *Приемственность в обучении математике*. М.: Просвещение, 1978. С. 24-36.

14. Никольская И. Л. Привитие логической грамотности при обучении математике: дис.… канд. пед. наук. Москва, 1973. 185 с.
15. Погорєлов О. В. *Геометрія:Планіметрія: Підручник для 7-9 класів загальноосвіт. навчал. закл*. К.: Вид-во «Школяр», 2004. 240 с.
16. Середа В.Ю. *Вчись мислити логічно.* Київ: Радянська школа, 1989. 117 с.
17. Столяр А.А. *Логические проблемы преподавания математики*. Минск: Высшая школа, 1965. 254 с.
18. Тимофеева И. Л., Сергеева И. Е. Комплекс логико-ориентированных задач как средство формирования логической грамотности будущих учителей математики. *Ярославский педагогический вестник*, 2010. 1. С. 69-72.
19. Фройденталь Г. *Математика как педагогическая задача*. Ч.II. М.: Просвещение, 1983. 192 с.
20. Хинчин А.Я. *Педагогические статьи*. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963. 204 с.
21. Шармин Д. В. Формирование культуры математической речи учащихся в процессе обучения алгебре и началам анализа: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Омск, 2005, 209 с.
22. Яковлева Е. В. Проблема формирования логической культуры мышления студентов. *Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена*, 2008. С.69-75.

References

1. Bevz, H. P., Bevz, V. H. & Vladimirova, N. H. (2015). Heometriia: Pidruchnyk dlia 7 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Geometry: Tutorial for 7th form of general education]. K.: Vyd-vo «Vidrodzhennia» [in Ukrainian].
2. Boltjanskij, V. G. (1973). Ispol'zovanie logicheskoj simvoliki pri rabote s opredelenijami [The use of logical symbols when working with definitions]. *Matematika v shkole – Math at school*, 5, 45-50 [in Russian].
3. Varlamova, T. P. (2006). Formirovanie logicheskoj kompetentnosti v processe obuchenija matematike [Formation of logical competence in the process of learning mathematics]. Candidates thesis. Krasnojarsk [in Russian].
4. Vilenkin, N. Ja., Abajdulin, S. K. & Tavartkiladze, R. K. (1984). Opredelenija v shkol'nom kurse matematiki i metodika raboty nad nimi [Definitions in the school course of mathematics and methods of working on them]. *Matematika v shkole – Math at school*, 4, 43-47 [in Russian].
5. Hodovaniuk, T. L. (2016). Formuvannia movlennievoi kultury maibutnoho vchytelia matematyky v systemi metodychnoi pidhotovky [Formation of the speech culture of the future teacher of mathematics in the system of methodical preparation]. *Pedahohichni nauky: teoriia, istoriia, innovatsiini tekhnolohii – Pedagogical sciences: theory, history, innovative technologies*, 2 (56), 209-218 [in Ukrainian].
6. Dalinger, V. A. (2014). Razvitie matematicheskoj rechi uchashhihsja pri obuchenii matematike [Development of students' mathematical speech while studying mathematics]. Proceedings from conference "Sovremennye naukoemkie tehnologii" – "Modern high technology technologies", 6, 83-85 [in Russian].
7. Dalinger, V. A. (2002). *Obuchenie uchashhihsja dokazatel'stvu teorem: Ucheb. Posobie [Teaching pupils to prove theorems: Tutorial*]. Omsk: Izd-vo OmGPU [in Russian].
8. Zueva, D. A. (2009). Kul'tura matematicheskoj rechi uchitelja: osnovnye kachestva i uslovija ih razvitija [The culture of a teacher's mathematical speech: basic qualities and conditions for their development]. *Izvestija Rossijskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. A.I. Gercena – News of Herzen Russian State Pedagogical University*, 134-139 [in Russian].
9. Ivanova, T. A. & Gorchakov, A. S. (2010). Razvitie matematicheskoj rechi shkol'nikov v processe izuchenija opredelenija ponjatij, teorem, pravil [The development of mathematical speech of schoolchildren in the process of studying the definition of concepts, theorems, rules]. *Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik – Yaroslavl Pedagogical Bulletin*, 4, 55-59 [in Russian].
10. Ikramov ,Dzh. (1981). *Matematicheskaja kul'tura shkol'nika [Mathematical culture of pupil*]. Tashkent: Ukituvchi [in Russian].
11. Lyman, F. M. (1998). *Matematychna lohika: navchalnyi posibnyk [Mathematical logic: tutorial].* Sumy: Slobozhanshchyna [in Ukrainian].
12. Lyman, F. M. & Odintsova, O. O. (2018). Strukturni vlastyvosti ratsionalnykh chysel – vazhlyva skladova matematychnykh znan vchyteliv matematyky [Structural properties of rational numbers is an important component of the mathematical knowledge of mathematics teachers]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical-mathematical education*, 2(16), 72-79 [in Ukrainian].
13. Nikol'skaja, I. L. (1978). *O edinoj linii vospitanija logicheskoj gramotnosti pri obuchenii matematike [On a single line of education of logical literacy in teaching mathematics*]. Priemstvennost' v obuchenii matematike – Adoption in learning mathematics. M.: Prosveshhenie, 24-36 [in Russian].
14. Nikol'skaja, I. L. (1973). Privitie logicheskoj gramotnosti pri obuchenii matematike [Inculcate logical math literacy]. Candidates thesis. Moscow [in Russian].
23. Pohorielov, O. V. (2004). Heometriia:Planimetriia: Pidruchnyk dlia 7-9 klasiv zahalnoosvit. navchal. zakl. [Geometry: Planimetry: Textbook for 7-9 forms of general education institutions]. K.: Vyd-vo «Shkoliar» [in Ukrainian].
15. Sereda, V. Iu. (1989). *Vchys myslyty lohichno [Learn to think logically*]. Kyiv: Radianska shkola [in Ukrainian].
16. Stoljar, A. A. (1965). *Logicheskie problemy prepodavanija matematiki [Logical problems of teaching mathematics*]. Minsk: Vysshaja shkola [in Russian].
17. Timofeeva, I. L. & Sergeeva, I. E. (2010). Kompleks logiko-orientirovannyh zadach kak sredstvo formirovanija logicheskoj gramotnosti budushhih uchitelej matematiki. [The complex of logic-oriented problems as a means of forming the logical literacy of future math teachers]. *Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik – Yaroslavl Pedagogical Bulletin*, 1, 69-72 [in Russian].
18. Hinchin, A. Ja. (1963). *Pedagogicheskie stat'I [Pedagogical articles].* M.: Izd-vo APN RSFSR [in Russian].
19. Sharmin, D. V. (2005). Formirovanie kul'tury matematicheskoj rechi uchashhihsja v processe obuchenija algebre i nachalam analiza [Formation of a culture of mathematical speech of students in the process of learning algebra and the beginnings of analysis]. Candidate thesis. Omsk [in Russian].
20. Jakovleva, E. V. (2008). Problema formirovanija logicheskoj kul'tury myshlenija studentov. [The problem of forming a logical culture of thinking of students]. Izvestija Rossijskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. A.I. Gercena – News of Herzen Russian State Pedagogical University, 69-75 [in Russian].

FORMATION OF LOGICAL LITERACY OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS AS AN IMPORTANT COMPONENT OF THEIR PROFESSIONAL TRAINING

F. M.Lyman, T. D. Lukashova, M. G. Drushlyak

Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine

Abstract.

Formulation of the problem. *Many modern students are not characterized by the formation of logical literacy, the basis of which was not laid in them even in high school. One of the possible causes of this phenomenon is the lack of math teacher's knowledge of the scientific foundations of the school's mathematics course. Therefore, the problem of the formation of logical literacy of future math teachers is relevant.*

Materials and methods. *The following methods were used in the study: comparison and synthesis of theoretical positions, discovered in the scientific and educational literature; observing the course of the educational process; generalization of own pedagogical experience and experience of colleagues from other institutions of higher education.*

Results. *The future math teachers' logical literacy of is their possession of a sufficient volume of logical knowledge and skills necessary for further study of mathematical disciplines and future pedagogical activity. Logical knowledge and skills of the logically competent student, future mathematics teacher, can be divided into three groups: - logical knowledge and skills in mathematical concepts, symbols and definitions; - logical knowledge and skills in mathematical expressions and statements; - logical knowledge and skills in mathematical theorems. Logical knowledge and abilities for mathematical definitions include the following components: the logically competent formulation of definitions; the identification and analysis of the logical structure of definitions; the correct recording of definitions using logical symbols; the construction of an affirmative form equivalent to the denial of the defining part of the definition. Logical knowledge and abilities in mathematical expressions and statements include the following actions: to recognize types of expressions and statements; correctly construct expressions and statements; to detect and analyze the logical structure of statements; correctly use quantifiers and logical connections; correctly write statements using logical symbols; translate a symbolic statements into a natural language; to turn the negation of this non-elemental statement into an affirmative statement in the sense that it is equivalent to it. Logical knowledge and skills in mathematical theorems: restoration of omitted quantifiers in a theorem; the transition from the unconditional form of the theorem to its conditional form and vice versa; construction for this assertion of the inverse, opposite and inverse of the opposite statements; identification and analysis of the logical structure of the theorems; formulation of theorems using the terms "necessary" and "sufficient".*

Conclusions. *The process of formation of future math teachers' logical literacy should be purposeful and systematic. Logical literacy should be formed at school level, and this process should continue in the study of fundamental mathematical courses and methods of teaching mathematics, and especially the course of mathematical logic.*

Keywords: *logical literacy, logical knowledge and skills, future mathematics teachers, mathematical logic and algorithm theory.*