Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Погребний В.Д. Зіркові збіжності до збіжності з регулятором. Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 2(20). С. 126-129.

Pohrebnyi V. Star Convergences Are To Index Convergence. Physical and Mathematical Education. 2019. Issue 2(20). P. 126-129.

DOI 10.31110/2413-1571-2019-020-2-020
УДК 517.6

В.Д. Погребний
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
mathematicsspu@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1625-7893

ЗІРКОВІ ЗБІЖНОСТІ ДО ЗБІЖНОСТІ З РЕГУЛЯТОРОМ

АНОТАЦІЯ

***Формулювання проблеми**. Значення апарату різноманітних збіжностей в сучасному функціональному аналізі та його багатьохзастосуваннях надзвичайно велике. Походження цих збіжностей викликано використанням в сучасній математиці різних структур: топологічних, порядкових, алгебраїчних, пов'язаних з мірою множини і т.д. Такі збіжності породжують на просторах, що розглядаються, різноманітні топології, а це дає можливість одержати результати про неперервність операторів, що є однією з основних задач сучасної математики. Важливі й збіжності породжені структурами порядку. Особливо важливі випадки, коли даний простір є решіткою, зокрема, лінійною і архімедівською. Подальшим розвитком порядкової збіжності є так звана збіжність з регулятором, яка має важливість застосування. При вивченні конкретних збіжності необхідним етапом є дослідження виконання для них аксіом класу збіжності, що дозволяє розглядати утворені топологічні структури. Часто за допомогою наявних здібностей вдається утворювати нові збіжності. Важливим інструментом одержання нових збіжностей є зіркові алгоритми. В результаті маємо різні «чисті» і «мішані» до даних збіжностей нові збіжності. Властивості збіжності з регулятором пов'язані з аксіомами класу збіжності були нами раніше вивчені. Тому необхідно продовжити це вивчення для збіжностей, зіркових по відношенню до збіжності з регулятором. Метою даного дослідження є вивчення властивостей різних типів зіркових збіжностей до збіжності з регулятором як «чистих» так і «мішаних»*

***Матеріали і методи.** Використовується результати про властивості збіжності з регулятором, раніше встановлені властивості зіркових збіжностей в загальних випадках.*

***Результати.** В результаті дослідження було встановлено: «Чисті» зіркові збіжності до розбіжності з регулятором задовольняють умови перших трьох аксіом класу збіжності для всіх чотирьох типів «чистої» зіркової збіжності. «Мішані» зіркові збіжності задовольняють вказані умови при деяких додаткових обмеженнях, пов'язаних з вибором типу піднапрямленості на першому і другому етапах конструювання «мішаної» зіркової збіжності.*

***Висновки.** Висновки є такими: зіркові збіжності до збіжності з регулятором мають передбачувані властивості і можуть використовуватись при вивченні лінійних решіток конкретних типів і збіжностей в них, пов'язаних з структурою порядку.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: збіжність, напрямленість, піднапрямленість, зіркові, клас, тип, аксіоми.

ВСТУП

Дуже велике значення в сучасному аналізі мають різноманітні конкретні збіжності, одержані на основі основних математичних структур: топологічних, порядкових, алгебраїчних, міри множини і т. д. Апарат збіжностей дуже потужний і має великі застосування при вивченні багатьох класів операторів в просторах, що зустрічаються в функціональному аналізі, теорії ймовірностей, прикладній математиці та їх застосуваннях. Ключовим моментом є те, що конкретні збіжності породжують топології, а це дозволяє говорити про найважливішу рису операторів – їх неперервність.

Однією з важливих збіжності є збіжність з регулятором в архімедівських лінійних (векторних) решітках. Ця збіжність має багато «хороших» властивостей, зокрема породжує топологічні структури. При цьому вона задовольняє деякі аксіоми класу збіжності.

Апарат зіркових збіжностей має важливе значення, оскільки дає можливість одержати багато нових збіжностей, які теж важливі.

Отже після дослідження даної збіжності важливо дослідити і різні зіркові до неї збіжності.

Загальні властивості збіжності з регулятором у зв'язку з аксіомами класу збіжності були нами раніше досліджені (Погребний, 2011).Наступним етапом є дослідження зіркових до цієї збіжностей.

Метою даної статті дослідження зіркових збіжностей до збіжності з регулятором у зв'язку з аксіомами класу збіжності.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретичними основами дослідження теорія збіжності з регулятором і загальна теорія зіркових збіжностей.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В дослідженнях використовується апарат напрямленостей, основних класів піднапрямленостей, конструкції зіркових збіжностей основних типів.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

На основі вивчення властивостей збіжності з регулятором у зв'язку з аксіомами класу збіжності (Погребний, 2011), дослідимо властивості зіркових збіжностей різних класів по відношенню до збіжності з регулятором .

Нагадаємо основні поняття:

Нехай X - архімедівська лінійна (векторна) решітка, $S=(x_\alpha,\alpha\in A)$ - напрямленість елементів решітки X, $x_0\in X$, $\varepsilon\in R$, $\varepsilon>0$, U - додатній елемент решітки X, тобто $U\geq\theta$, θ - нульовий елемент решітки X.

Напрямленість S називається збіжною з регулятором або (r) – збіжною до елемента x_0, якщо виконується умова:

$$\exists U\geq\theta:\forall\varepsilon>0\exists\alpha_0\in A:\alpha\geq\alpha_0\Rightarrow\left|x_\alpha-x_0\right|\leq\varepsilon U$$

При цьому елемент U називається регулятором збіжності.

Відомо що (r) – границя визначається однозначно, якщо існує, з (r) – збіжності випливає порядкова збіжність. (r) – збіжність узгоджена з лінійною структурою і структурою решітки.

Спочатку розглянемо зіркові збіжності до (r) – збіжності «чистих» типів.

Аксіома *NA1* класу збіжності полягає в тому, що для збіжності (σ), що розглядається, кожна квазістаціонарна напрямленість (σ) – збіжна до відповідного елемента.

Напрямленість $S=(x_\alpha,\alpha\in A)$ називається стаціонарною, якщо $\forall\alpha\in A$ $[x_\alpha=x_0\in X]$. S називається квазістанціонарною, якщо $\exists\alpha_0\in A:\forall\alpha:\alpha\geq\alpha_0[x_\alpha=x_0]$

Збіжність з регулятором задовольняє аксіому *NA1* (Погребний, 2011). Розглянемо це питання відносно зіркових до (r) – збіжності, збіжностей, зіркові збіжності залежить від того, який тип під напрямленостей буде використаний:

1. Конфінальні.
2. Ізотонні.
3. Мурівські.
4. Квазі.

Відповідно розглядаються і зіркові до даної (σ)-збіжності:

1. Конфінальна зіркова $(c*\sigma)$.
2. Ізотонна зіркова $(i*\sigma)$.
3. Мурівська зіркова $(m*\sigma)$.
4. Квазізіркова $(q*\sigma)$.

Відомо, що $(c*\sigma)\Rightarrow(i*\sigma)\Rightarrow(m*\sigma)\Rightarrow(q*\sigma)$ (Погребний, 2003). Звідси випливає, що і в конкретному випадку збіжності з регулятором, $(c*r)\Rightarrow(i*r)\Rightarrow(m*r)\Rightarrow(q*r)$. Це дає можливість встановити виконання умови NA1 лише для самої широкої з них $(q*r)$-збіжності.

Теорема 1. $(q*o)$-збіжність задовольняє умову NA1.

Доведення. $\forall x_0\in X$ візьмемо довільну відповідну квазістаціонарну напрямленість S, а для неї її довільну квазіпіднапрямленість $T=(y_\beta,\beta\in B)$. Це означає, що $\forall\alpha_0\in A\exists\beta_0\in B:\beta\geq\beta_0\Rightarrow\{y_\beta:\beta\geq\beta_0\}\subset\{x_\alpha:\alpha\geq\alpha_0\}$. В якості α_0 беремо α_0 з поняття квазістаціонарності S. Знайдемо відповідне $\beta_0\in B$. При $\beta\geq\beta_0$ буде $y_\beta\equiv x_0$. Таким чином, T є квазістаціонарною. Оскільки (r) – збіжність задовольняє умову NA1 то, T збіжна (r) до x_0. В якості квазіпіднапрямленості (U) для (T), можна взяти саму T, яка (r) – збіжна до x_0. Це і означає,в силу довільності T виконання умови NA1 виконана для $(q*r)$ – збіжності.

Теорему доведено.

Тим більше, для більш вузьких $(m*r)$, $(i*r)$, $(c*r)$ збіжностей умова NA1 виконана.

Далі розглянемо аксіому NA2. Вона має той зміст, що при (σ)-збіжності (S) до x_0, то до x_0 будуть збіжні всі її піднапрямленості. Для (r)-збіжності умова NA2 виконується (Погребний, 2011). Як це буде для $(*r)$-збіжностей?

Теорема 2. Зіркові до збіжності з регулятором збіжності мають властивість NA2.

Доведення. При розгляді NA2 і $(*r)$-збіжностей в «чистоту» випадку використовуються піднапрямленості даного випадку. Виберемо будь-який з чотирьох і для нього досліджуємо далі. Нехай $x_\alpha \xrightarrow{*r} x_0$. Візьмемо (T) довільну для S, а для T – довільну U – піднапрямленість. U – піднапрямленість для S, а, в силу $S \xrightarrow{*r} x_0$, U має піднапрямленість Φ яка збіжна (r) до x_0. В той же час Φ є піднапрямленість для U. А це і значить, що T збіжна $(*r)$ до x_0.

Теорему доведено.

Виконання умов NA1, NA2 для $(*r)$-збіжності виконані, то одержимо породжені топології $\tau^{(*r)}$. При цьому збіжність в них не вужча, ніж $(*r)$-збіжність.

Далі на черзі аксіома NA3. Її зміст в тому, що якщо S не збіжна до x_0 у розумінні (σ), то у неї є така піднапрямленість (T), всі напрямленості якої не збіжні (σ) до x_0. Відомо (Погребний, 2011), що (r)-збіжність, не задовольняє умову NA3. Тим не менш, зіркові до неї мають цю властивість.

Теорема 3. $(*r)$-збіжності задовольняють умову NA3.

Доведення. Розгляд введемо для даного типу $(*r)$–збіжності. Нехай S не збігається $(*r)$ до x_0. Припустимо супротивне: всі її напрямленості T мають свою піднапрямленість U, що $(*r)$ збіжна до x_0. Значить для U кожна піднапрямленість Φ має піднапрямленість F, яка (r)-збіжна до x_0. F – піднапрямленість для T. Отже $S \xrightarrow{*r} x_0$ Це неможливо за умовою. Протиріччя.

Теорему доведено.

Враховуючи, що $(*(*\sigma)) = (*\sigma)$ для довільної (σ), маємо що $(*(*r)) = (*r)$.

Відомо також, що при NA2 буде $(\sigma) \Rightarrow (*\sigma)$. Значить, $(r) \Rightarrow (*r)$. NA3 для (r) не виконується. Тому $(*r) \Rightarrow (r)$ в загальному випадку не виконується, взагалі кажучи, $(*r) \neq (r)$.

Деякі підсумки. $(*r)$ всіх чотирьох класів має умови NA1, NA2, NA3. Це породжує на X топології типу $\tau^{(*r)}$. Вони віддільні, оскільки яка віддільні, оскільки (r)-границя єдина, також $(\tau^{(*r)}) \supset (*r)$.

Переходимо до «мішаних» зірковий збіжності і їх особливість полягає в тому що при взятті напрямленостей T для S може використовуватись один тип напрямленостей для переходу від T до U інший.

Для технічної зручності розглядів пронумеруємо індексами $k, l = 1,2,3,4$ можливі типи піднапрямленостей і відповідні «мішані» зіркові збіжності:

1. Конфінальні.
2. Ізотонні.
3. Мурівські.
4. Квазі.

Таким чином, запис $(kl*r)$-збіжність має смисл:

1. Напрямленість *T* для *S*, має тип *(k)*.
2. Напрямленість *U* для *T*, має тип *(l)*.

Достатньо розглянути випадки $k \neq l$, оскільки $(ll*o)$– збіжність є саме $(l*r)$– «чистий» тип.

Почнемо з умови NA1.

Теорема 4. $(kl*r)$-збіжності, $k, l = 1,2,3,4$ мають властивості NA1.

Доведення. Для квазістаціонарної напрямленості (S), напрямленості T та U теж квазістаціонарні. Тоді U збіжна (r) до x_0, отже, S збіжна $(kl*r)$ до x_0.

Теорему доведено.

Далі – умова NA2.

Теорема 5. $(kl*r)$ – збіжності мають властивість $(NA2)_k$.

Доведення. Розглянемо два випадки, оскільки $k \neq l$.

1. $k < l$. Нехай T – довільне типу (k) для S, а U – довільне типу (l) для T. Тоді U є (k)-піднапрямленість для S. Оскільки S збіжна $(kl*r)$ до x_0, то U має Φ-типу (l), що (r)-збіжна до x_0.

Маємо: кожна (k)-піднапрямленість U для T має (l)-піднапрямленість Φ, що (r) – збіжна до x_0. В силу довільності T типу (k) для (S), маємо $(NA2)_k$ для $(kl*r)$-збіжності.

2. $k > l$. Нехай напрямленості S, T, U, Φ мають той же смисл, що і в випадку $k < l$. Одержимо: Кожна U піднапрямленість типу (k) для T має Φ типу (l), що збіжна (r) до x_0. Значить, T є $(kl*r)$-збіжна до x_0. В силу довільності T, це означає виконання $(NA2)_k$ для $(kl*\sigma)$-збіжності.

Теорему доведено.

Пояснення, що дане $(NA2)_k$ означає умову NA2 з піднапрямленостями типу (k).

Далі – умова NA3. В її використанні треба піднапрямленості вибирати вже не один, а два рази, тому позначення буде $(NA3)_{kl}$.

Теорема 6. При $k \le l$, $(kl * r)$-збіжність задовольняє умову $(NA3)_{kl}$.

Доведення. Нехай (S) не збіжна $(kl * r)$ до x_0. Припустимо супротивне: кожна її (k)-піднапрямленість T має (l)-піднапрямленість U, яка $(kl * r)$-збіжна до x_0. В такому випадку, кожна (k)-піднапрямленісті Φ до U має F типу (l), що (r)-збіжна до x_0. При $k \le l$, F буде (l)-піднапрямленістю для T. В результаті: кожна T типу(k) для S має F типу (l), що (r)-збіжна до x_0, тобто S є $(kl * r)$ до X_0. Що неможливо за умовою.

Теорему доведено.

Отже, «мішані» $(kl * r)$-збіжності мають властивості $(NA1)$, $(NA2)_k$, $(NA3)_{kl}$. Остання – при $k \le l$.

ОБГОВОРЕННЯ

Одержані результати показують, що має смисл вивчення зіркових збіжностей до збіжностей з регулятором, оскільки ці збіжності мають важливі і передбачувані властивості пов'язані з аксіоматикою класу збіжності. Це дає можливість стверджувати що такі збіжності породжують на архімедівській мішаній решітці топологічних структуру, причому збіжність в одержанні топології не вужча ніж зіркова збіжність.

Одержані результати можуть використовуватись при вивченні збіжностей породжених структурою порядку і зіркових даних у конкретних мішаних решітках.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Одержані результати підтверджують результати вивчення абстрактних зіркових збіжностей (Погребний, 2004; Погребний, 2006 у конкретному випадку збіжності з регулятором. Наступним етапом дослідження може бути вивчення зіркових збіжності подвійного і повторного типів для порядкової збіжності і збіжності з регулятором.

Список використаних джерел

1. Погребной В.Д. Изотонная звездная сходимость. *Вісник Сумського державного університету.* Суми, 2003. №8(54). С. 85-87.
2. Погребний В.Д. Зіркові збіжності мішаного типу. Тези доповідей Х Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 13-15 травня 2004 р.), 2004. С. 385.
3. Погребний В.Д. Властивості зіркових збіжностей мішаного типу. Тези доповідей ХІ Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 18-20 травня 2006 р.), 2006. С. 551.
4. Погребний В.Д. Збіжність з регулятором з загальної точки зору. *Фізико-математична освіта*, 2011. Випуск 1(11). С. 32-34.

References

1. Pogrebnoj, V.D.(2003). Izotonnaja zvezdnaja shodimost' [Isotonic star convergence]. *Visnyk Sumskoho derzhavnoho universytetu – Bulletin of the Sumy State University*, 8(54), 85-87 [in Russian].
2. Pohrebnyi, V.D. (2004). Zirkovi zbizhnosti mishanoho typu [Star convergences of the mixed type] – The tenth International Scientific Conference acad. M. Kravchuk (pp. 385) Kyiv [in Ukrainian].
3. Pohrebnyi, V.D. (2006). Vlastyvosti zirkovykh zbizhnostei mishanoho typu [Properties of star convergences of the mixed type] – The eleventh International Scientific Conference acad. M. Kravchuk (pp. 551) Kyiv [in Ukrainian].
4. Pohrebnyi, V.D. (2011). Zbizhnist z rehulyatorom z zahalnoi tochky zoru [Index convergence is from the general point of view]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 1(11), 32-34 [in Ukrainian].

STAR CONVERGENCES ARE TO INDEX CONVERGENCE

Valery Pohrebnyi

Makarenko Sumy State Pedagogical University, Sumy, Ukraine

Abstract.

Formulation of the problem. *The theory of various convergences, formed different structures is widely used in modern Analysis: topological, index, algebra, etc. These convergences are generated by topologies which is used for research of continuity of operators, in particular, operators of topological embedding of topological linear spaces.*

Important convergence is index convergence in grates, descendant the structure of order. At the study of properties of concrete convergences the axioms of class of convergence have an important value, that allows to draw conclusion about the got topological structure.Djn Important are also algorithms of receipt from this convergences of new by the so-called star algorithms. As properties of index convergence, related to the axioms of class convergences, studied, it is necessary to continue such study for star to this convergence. The purpose of this research is a study of properties of different classes of star convergences to index convergence, both «clean» and «mixed», types.

Materials and methods. *Uses the results of the properties of convergence with the controller, previously established properties of star coincidences in general cases.*

Results. *For researches the methods of spaces of abstract convergence, theory of star convergences of basic types are used, axioms of classes of convergence in the proper modifications.*

1. «Clean» star convergences to index convergence satisfy the terms of the first three axioms of class of convergence for all four types of star convergence – the confinal, isotonic, Moorish, quasi.

2. «Mixed» star convergences satisfy the specified conditions for some specifics: the first condition, regardless of the first and second classes of substrings used; second in modification for the first type of used sub-directions; the third in the modification of the first-second-grade sub-directio

Conclusions. *Conclusions are such: Star convergences are to index convergence have predictable general properties and can be used in the study of lattices of specific types and convergences associated with the order in them.*

Key words*: convergence, direction, sub-direction, star, class, type, axioms.*