Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Хворостіна Ю.В., Стеценко К.М. Рекурсивні алгоритми розкладів дробової частини дійсного числа в деякі ряди спеціальних видів. Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 3(21). С. 157-162.

Khvorostina Yu.V., Stetsenko K.M. Recursive algorithms of decrease of a fractional part of a real number in some species of special types. Physical and Mathematical Education. 2019. Issue 3(21). P. 157-162.

DOI 10.31110/2413-1571-2019-021-3-023
УДК 511.72

Ю.В. Хворостіна
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
Khvorostina13@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8354-944X
К.М. Стеценко
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна
Karina829@ukr.net
ORCID: 0000-0003-3494-0204

РЕКУРСИВНІ АЛГОРИТМИ РОЗКЛАДІВ ДРОБОВОЇ ЧАСТИНИ ДІЙСНОГО ЧИСЛА В ДЕЯКІ РЯДИ СПЕЦІАЛЬНИХ ВИДІВ

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *В останні роки зростає інтерес математиків до об'єктів з нетривіальними метричними і топологічними властивостями. Одним із ефективних апаратів задання і дослідження таких об'єктів є використання систем зображення дійсних чисел. Також дійсне число є фундаментальним поняттям теорії чисел, неперервної математики та теорії ймовірностей. Сьогодні у математиці та її застосуваннях широко використовуються різні системи представлення та зображення дійсних чисел. Деякі з них мають скінченний алфавіт, а деякі – нескінченний. Але у більшості випадків дійсне число моделюється з числа натурального. Класичним підходом до зображення дробової частини дійсного числа є представлення числа у формі суми ряду з чисел, обернених до натуральних. Природньо виникає необхідність систематизувати, чітко виділити чи розробити рекурсивні алгоритми розкладів дійсного числа в ряди спеціальних видів.*

Матеріали і методи. *Проведено системний аналіз наукових джерел щодо представлення чисел деякими рядами спеціальних видів для визначення найбільш важливих напрямків. При дослідженні використовувались методи та засоби метричної теорії чисел, математичного аналізу та математичної логіки.*

Результати. *У результаті дослідження було систематизовано підхід до зображення чисел деякими рядами, чітко виділено рекурсивні кроки скінченного чи нескінченного алгоритму переходу від десяткового зображення дійсного числа до зображення чисел s-адичними рядами, рядом Енгеля, знакододатним та знакозмінним рядами Люрота, рядами Остроградського 1-го та 2-го видів. Дію кожного з алгоритмів було застосовано до одного і того ж самого раціонального числа з проміжку* $(0;1)$ *і виявлено, що одне і те ж саме число може мати в різних системах скінченне або нескінченне періодичне зображення.*

Висновки. *Враховуючи самоподібну структуру деяких збіжних знакододатних чи знакозмінних рядів, вдається отримати чіткі рекурсивні кроки переходу від десяткового зображення дійсного числа до зображення за допомогою рядів.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *зображення числа, системні дроби, ряд Енгеля, знакододатній ряд Люрота, знакозмінний ряд Люрота, ряд Остроградського 1-го виду, ряд Остроградського 2-го виду.*

ВСТУП

Постановка проблеми. В останні роки зростає інтерес математиків до об'єктів з нетривіальними метричними і топологічними властивостями. Одним із ефективних апаратів задання і дослідження таких об'єктів є використання систем зображення дійсних чисел. Також дійсне число є фундаментальним поняттям теорії чисел, неперервної математики та теорії ймовірностей. Сьогодні у математиці та її застосуваннях широко використовуються різні системи представлення та зображення дійсних чисел. Деякі з них мають скінченний алфавіт, а деякі – нескінченний. Але у більшості випадків дійсне число моделюється з числа натурального. Класичним підходом до зображення дробової частини дійсного числа є представлення числа у формі суми ряду з чисел, обернених до натуральних. Природньо виникає необхідність систематизувати, чітко виділити чи розробити рекурсивні алгоритми розкладів дійсного числа в ряди спеціальних видів.

Аналіз актуальних досліджень. Дослідження систем зображення дійсних чисел, як ефективного апарата моделювання, задання і вивчення математичних об'єктів з нетривіальними локальними топологічними і метричними властивостями, є одним із завданням відомої української школи Працьовитого Миколи Вікторовича. Зокрема, він разом зі своїми учнями дослідили зображення дійсних чисел s-адичними рядами (Працьовитий, 1998), рядами Остроградського 1-го виду (Барановський&Працьовитий&Торбін, 2011), рядами Енгеля (Працьовитий&Гетьман, 2006),), рядами Остроградського 2-го виду (Працьовита, 2008), знакододатними рядами Люрота (Жихарева&Працьовитий, 2008), знакозмінним рядами Люрота (Працьовитий&Хворостіна, 2013) та їх застосіванням.

Мета статті. Метою статті є систематизація підходу до зображення чисел деякими рядами спеціальних видів, чітко виділити рекурсивні кроки алгоритму розкладу чисел у s-адичні ряди, ряд Енгеля, знакододатній та знакозмінний ряди Люрота, ряди Остроградського 1-го та 2-го видів. Дію кожного з алгоритмів застосувати до одного і того ж самого раціонального числа з проміжку $(0;1)$.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В основу дослідження були покладені теорія збіжних рядів та метрична теорія чисел.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведено системний аналіз наукових джерел щодо представлення чисел деякими рядами спеціальних видів для визначення найбільш важливих напрямків (узагальнення і систематизація; аналіз і синтез; індукція і дедукція; порівняння та протиставлення). При дослідженні використовувались методи та засоби метричної теорії чисел, математичного аналізу та математичної логіки.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Означення 1. Нехай s –деяке фіксоване натуральне число більше 1. Розклад числа $x \in (0;1]$ в ряд

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \frac{\alpha_3}{s^3} + \cdots + \frac{\alpha_k}{s^k} + \cdots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s^k},$$

де $\alpha_k \in A = \{0,1,\dots,s-1\}$, називається *s-ковим розкладом числа*. Що символічно зображується у вигляді $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots}$ і називається *s-ковим зображенням числа* x (зображенням числа в системі числення з основою *s*). [5].

Алгоритм розкладу числа в s-адичний ряд. Нехай x довільне дійсне число з $(0;1]$ і

$$\alpha_1 = [Sx], \quad x_1 = S\left(x - \frac{\alpha_1}{S}\right)$$

$$\alpha_2 = [Sx_1], \quad x_2 = S\left(x_1 - \frac{\alpha_2}{S}\right)$$

Тоді рекурсивно задамо

$$\alpha_{k+1} = [Sx_k], \qquad x_{k+1} = S\left(x_k - \frac{\alpha_{k+1}}{S}\right).$$

Алгоритм зупиняє дію при $x_n = 0$, в іншому випадку дія алгоритму є нескінченною.

Приклад 1. Розкласти число $\frac{3}{8}$ у двійкову систему числення.

$$x = \frac{3}{8}$$

$$\alpha_1 = \left[2\cdot\frac{3}{8}\right] = \left[\frac{3}{4}\right] = 0, \qquad x_1 = 2\cdot\left(\frac{3}{8} - \frac{0}{2}\right) = 2\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{4};$$

$$\alpha_2 = \left[2\cdot\frac{3}{4}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1, \qquad x_2 = 2\cdot\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\alpha_3 = \left[2\cdot\frac{1}{2}\right] = [1] = 1, \qquad x_3 = 2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\cdot 0 = 0.$$

$$\frac{3}{8} = \Delta^2_{011}$$

Приклад 2. Розкласти число $\frac{3}{8}$ у трійкову систему числення.

$$x = \frac{3}{8}$$

$$\alpha_1 = \left[3\cdot\frac{3}{8}\right] = \left[\frac{9}{8}\right] = 1, \qquad x_1 = 3\cdot\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{3}\right) = 3\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{8};$$

$$\alpha_2 = \left[3\cdot\frac{1}{8}\right] = \left[\frac{3}{8}\right] = 0, \qquad x_2 = 3\cdot\left(\frac{1}{8} - \frac{0}{3}\right) = 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{8};$$

$$\alpha_3 = \left[3\cdot\frac{3}{8}\right] = \left[\frac{9}{8}\right] = 1, \qquad x_3 = 3\cdot\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{3}\right) = 3\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

$$\frac{3}{8} = \Delta^3_{(10)}$$

Означення 2. Числовим з*накододатним рядом Люрота* називається вираз виду

$$x = \frac{1}{d_1+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1+1)\dots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}, \qquad d_n \in \mathbb{N},$$

де d_n– фіксований нескінченний набір натуральних чисел. Число d_n називатимемо *n*-тим елементом знакододатнього ряду Люрота.

Прикладами рядів Люрота є наступні ряди:

1. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{2^2\cdot 3^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}\cdot 3^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{2}{5};$

2. $\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s(s+1)^2}+\frac{1}{s^2(s+1)^3}+\ldots=\frac{\frac{1}{s+1}}{1-\frac{1}{s(s+1)}}=\frac{s}{s(s+1)-1}$;

3. Якщо $d_n = n$, то

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2^2\cdot 3^4\cdot\ldots\cdot(n-1)^2\cdot n\cdot(n+1)}+\ldots$$

Теорема 1. [2]. Кожне число $x \in (0;1]$ єдиним чином розкладається в знакододатній ряд Люрота, тобто для числа x існує єдина послідовність натуральних чисел (d_n), $d_n = d_n(x)$, така, що

$$x=\frac{1}{d_1+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{d_1(d_1+1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)} \equiv \Delta^L_{d_1d_2\ldots d_n\ldots}.$$

Вираз $\Delta^L_{d_1d_2\ldots d_n\ldots}$ називається L *– зображенням* дійсного числа $x \in (0;1]$.

Алгоритм розкладу числа в знакододатній ряд Люрота. Нехай x довільне дійсне число з $(0;1]$ і

$$d_1=\left[\frac{1}{x}\right],\quad x_1=\left(x-\frac{1}{d_1+1}\right)d_1(d_1+1)$$

$$d_2=\left[\frac{1}{x_1}\right],\quad x_2=\left(x_1-\frac{1}{d_2+1}\right)d_2(d_2+1)$$

Тоді рекурсивно задамо

$$d_{n+1}=\left[\frac{1}{x_n}\right],\qquad x_{n+1}=\left(x_n-\frac{1}{d_{n+1}+1}\right)d_{n+1}(d_{n+1}+1).$$

Алгоритм зупиняє дію при $x_n = 0$, в іншому випадку дія алгоритму є нескінченною.

Приклад 3. Розкласти число $\frac{3}{8}$ в знакододатній ряд Люрота.

$x=\frac{3}{8}$

$d_1=\left[\frac{8}{3}\right]=2,\qquad x_1=\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2+1}\right)\cdot 2\cdot(2+1)=\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{3}\right)\cdot 2\cdot 3=\frac{1}{4};$

$d_2=\left[\frac{4}{1}\right]=4,\qquad x_2=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4+1}\right)\cdot 4\cdot(4+1)=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\cdot 4\cdot 5=1;$

$d_3=[1]=1,\qquad x_3=\left(1-\frac{1}{1+1}\right)\cdot 1\cdot(1+1)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 1\cdot 2=1.$

$\frac{3}{8}=L\left(2;4;(1)\right).$

Означення 3. Знакозмінний ряд вигляду

$$\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n},\qquad a_n\in\mathbb{N}$$

називається *знакозмінним рядом Люрота*, а число a_n його n-тим елементом.

Найпростішими прикладами знакозмінних ряду Люрота є наступні ряди

1) $a_n = 1, \forall\, n\in N$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1(1+1)\cdot 1}+\frac{1}{1(1+1)\cdot 1(1+1)\cdot 1}-\ldots=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

2) $a_n = a, \forall\, n\in N$, де $a\in N$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a(a+1)a}+\frac{1}{a(a+1)a(a+1)a}-\cdots=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2(a+1)}+\frac{1}{a^3(a+1)^2}-\frac{1}{a^4(a+1)^3}+\cdots=$$

$$=\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a(a+1)}}=\frac{a+1}{a^2+a+1}.$$

Теорема 2. [3].Для довільного дійсного числа $x\in(0;1]$ існує скінченний набір натуральних чисел $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ або нескінченна послідовність (a_n) таких, що

$$x=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1(a_1+1)a_2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{a_1(a_1+1)\ldots a_{n-1}(a_{n-1}+1)a_n}+\ldots=\Delta^{\tilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}.$$

Вираз $\Delta^{\tilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ називається $\tilde{L}$ *– зображенням* дійсного числа $x\in(0;1]$.

Деякі числа мають два різних $\tilde{L}$-зображення, оскільки у випадку $a_n = 1$, ми будемо використовувати заміну зображення $\Delta^{\tilde{L}}_{a_1a_2\ldots a_{n-1}1}$ зображенням $\Delta^{\tilde{L}}_{a_1a_2\ldots[a_{n-1}+1]}$, де $[a_{n-1}+1]$ цифра зображення.

Алгоритм розкладу числа в знакозмінний ряд Люрота. Нехай x довільне дійсне число з $(0;1]$ і

$$a_1=\left[\frac{1}{x}\right],\quad x_1=\left(\frac{1}{a_1}-x\right)a_1(a_1+1)$$

$$a_2=\left[\frac{1}{x_1}\right],\quad x_2=\left(\frac{1}{a_2}-x_1\right)a_2(a_2+1)$$

Тоді рекурсивно задамо

$$a_{n+1}=\left[\frac{1}{x_n}\right],\qquad x_{n+1}=\left(\frac{1}{a_{n+1}}-x_n\right)a_{n+1}(a_{n+1}+1).$$

Алгоритм зупиняє дію при $x_n = 0$, в іншому випадку дія алгоритму є нескінченною.

Приклад 4. Розкласти число $\frac{3}{8}$ в знакозмінний ряд Люрота.

$x = \frac{3}{8}$

$a_1 = \left[\frac{8}{3}\right] = 2, \quad x_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) \cdot 2 \cdot (2+1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) \cdot 2 \cdot 3 = \frac{3}{4};$

$a_2 = \left[\frac{4}{3}\right] = 1, \quad x_2 = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot 1 \cdot (1+1) = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2};$

$a_3 = \left[\frac{2}{1}\right] = 2, \quad x_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot (2+1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot 3 = 0.$

$\frac{3}{8} = \widetilde{L}\,(2; 1; 2).$

Означення 4. *Рядом Енгеля* називається вираз виду

$$\frac{1}{q_1+1} + \frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)} + \frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)(q_3+1)} + \ldots$$

де q_k – натуральні числа, причому $q_{(k+1)} \geq q_k$ $\forall k \in N$, при цьому числа q_k називаються його елементами.

Прикладами рядів Енгеля є:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{u_k}}$, де (u_k) –класична послідовність Фібоначчі без першого члена, тобто $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$;

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s^{m_1+m_2+\ldots+m_k}}$, де s – фіксоване натуральне число, більше за 1, m_k – неспадна послідовність натуральних чисел;

3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Теорема 3. [4]. Довільне число $x \in (0; 1]$ єдиним чином розкладається в ряд Енгеля, тобто існує послідовність натуральних чисел (q_k) така, що $q_{(k+1)} \geq q_k$ і

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)\ldots(q_k+1)} \equiv \Delta^E_{q_1 q_2 \ldots q_k \ldots}$$

Алгоритм розкладу числа в ряд Енгеля. Нехай x довільне дійсне число з $(0; 1]$ і

$$q_1 = \left[\frac{1}{x}\right], \quad x_1 = \left(x - \frac{1}{q_1+1}\right)(q_1+1)$$

$$q_2 = \left[\frac{1}{x_1}\right], \quad x_2 = \left(x_1 - \frac{1}{q_2+1}\right)(q_2+1)$$

Тоді рекурсивно задамо

$$q_{k+1} = \left[\frac{1}{x_k}\right], \quad x_{k+1} = \left(x_k - \frac{1}{q_{k+1}+1}\right)(q_{k+1}+1).$$

Алгоритм зупиняє дію при $x_n = 0$, в іншому випадку дія алгоритму є нескінченною.

Приклад 5. Розкласти число $\frac{3}{8}$ в з ряд Енгеля.

$x = \frac{3}{8}$

$q_1 = \left[\frac{8}{3}\right] = 2, \quad x_1 = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2+1}\right) \cdot (2+1) = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{3}\right) \cdot 3 = \frac{1}{8};$

$q_2 = \left[\frac{8}{1}\right] = 8, \quad x_2 = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8+1}\right) \cdot (8+1) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) \cdot 9 = \frac{1}{8}.$

$\frac{3}{8} = E(2; (8)).$

Означення 5. *Рядом Остроградського 1-го виду* називається скінченний або нескінченний вираз вигляду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \ldots q_n} + \cdots = O^1(q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots),$$

де q_n – натуральні числа і $q_{n+1} > q_n$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Числа q_n називаються елементами ряду Остроградського 1-го виду.

Теорема 4. [1].Для довільного дійсного числа $x \in (0; 1]$ існує скінченна чи нескінченна послідовність натуральних чисел (q_n) така, що і $q_{n+1} > q_n$ і

$$x = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \ldots q_n}.$$

Лема 1. Для будь-якого набору натуральних чисел $q_n, q_{n+1} > q_n$, має місце рівність

$$x = O^1(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n) = O^1(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n - 1, q_n).$$

Алгоритм розкладу числа в ряд Остроградського 1-го виду. Нехай x довільне дійсне число з $(0; 1]$ *і*

$$q_1 = \left[\frac{1}{x}\right], \quad x_1 = 1 - q_1 x$$

$$q_2 = \left[\frac{1}{x_1}\right], \quad x_2 = 1 - q_2 x_1$$

Тоді рекурсивно задамо

$$q_{n+1} = \left[\frac{1}{x_n}\right], \qquad x_{n+1} = 1 - q_{n+1}x_n.$$

Алгоритм зупиняє дію при $x_n = 0$, в іншому випадку дія алгоритму є нескінченною.

Приклад 6. Розкласти число $\frac{3}{8}$ в з ряд Остроградського 1-го виду.

$x = \frac{3}{8}$

$q_1 = \left[\frac{8}{3}\right] = 2, \qquad x_1 = 1 - 2 \cdot \frac{3}{8} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4};$

$q_2 = \left[\frac{4}{1}\right] = 4, \qquad x_2 = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0.$

$\frac{3}{8} = O^1(2; 4).$

Означення 6. Числовий ряд виду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{q_k} + \cdots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{q_k}$$

де q_k – натуральні числа, причому $q_{(k+1)} \geq q_k(q_k + 1)\ \forall k \in N,$ називається *рядом Остроградського 2-го виду*.

Теорема 5. [6].Кожне дійсне число $x \in (0,1]$ розкладається в ряд Остроградського 2-го виду, тобто для довільного $x \in (0,1]$ існує скінченний набір $(q_1, q_2, \dots, q_m)$ або нескінченна послідовність натуральних чисел *(*q_n*)*, така, що

$$q_{n+1} \geq q_n(q_n + 1) \text{ і } x = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{q_m} \vee x \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_n}.$$

Розклад числа x в ряд Остроградського 2-го виду символічно записуватимемо $x = O^2(q_1, q_2, \dots, q_m)$ або $x = O^2(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots)$. Праві частини останніх двох рівностей називаються O^2-зображенням числа x.

Лема 2. Деякі числа мають принаймні два різних O^2-зображення, оскільки

$$O^2(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_{n+1}) = O^2(q_1, q_2, \dots, q_n, q_n(q_n + 1)).$$

Алгоритм розкладу числа в ряд Остроградського 2-го виду. Нехай x довільне дійсне число з $(0; 1]$ і

$$q_1 = \left[\frac{1}{x}\right], \quad x_1 = \frac{1}{q_1} - x$$

$$q_2 = \left[\frac{1}{x_1}\right], \quad x_2 = \frac{1}{q_2} - x_1$$

Тоді рекурсивно задамо

$$q_{n+1} = \left[\frac{1}{x_n}\right], \qquad x_{n+1} = \frac{1}{q_{n+1}} - x_n.$$

Алгоритм зупиняє дію при $x_n = 0$, в іншому випадку дія алгоритму є нескінченною.

Приклад 7. Розкласти число $\frac{3}{8}$ в з ряд Остроградського 2-го виду.

$x = \frac{3}{8}$

$q_1 = \left[\frac{8}{3}\right] = 2, \qquad x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{4-3}{8} = \frac{1}{8};$

$q_2 = \left[\frac{8}{1}\right] = 8, \qquad x_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0.$

$\frac{3}{8} = O^2(2; 8).$

ОБГОВОРЕННЯ

Одержані результати демонструють існування скінченних і нескінченних рекурсивних алгоритмів розкладу дійсного числа в деякі ряди спеціальних видів, а значить показують чіткі кроки переходу від десяткового зображення дійсного числа до зображення чисел за допомогою рядів. Це в свою чергу є передумовою моделювання математичних об'єктів з нетривіальними локальними топологічними і метричними властивостями, зокрема фракталів, недиференційовних та сингулярних функцій.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У результаті дослідження було систематизовано підхід до зображення чисел деякими рядами, чітко виділено рекурсивні кроки скінченного чи нескінченного алгоритму переходу від десяткового зображення дійсного числа до зображення чисел s-адичними рядами, рядом Енгеля, знакододатним та знакозмінним рядами Люрота, рядами Остроградського 1-го та 2-го видів. Дію кожного з алгоритмів було застосовано до одного і того ж самого раціонального числа з проміжку $(0; 1)$ і виявлено, що одне і те ж саме число може мати в різних системах скінченне або нескінченне періодичне зображення.

Завдяки самоподібності структури деяких збіжних знакододатних чи знакозмінних рядів, вдалося виділити чіткі рекурсивні кроки переходу від десяткового зображення дійсного числа до зображення за допомогою цих рядів. Наступним етапом дослідження може бути узагальнення алгоритмічного підходу до розкладів дійсних чисел у ряди спеціальних видів.

Список використаних джерел

1. Барановський О.М. Ряди Остроградского 1-го виду та їх застосування. Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. 188 с.
2. Жихарева Ю.І. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи метричної теорії. Наук. час. НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2008. С. 200-211.
3. Khvorostina Yu. Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements. Random Operators and Stochastic Equations, 2013. Vol. 21, no. 4. P. 385–401.
4. Працьовитий М.В. Ряди Енгеля та їх застосування . Наук. часоп. НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. Науки, 2006. № 7. С. 105–116.
5. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. 296 с.
6. Працьовита І. М. Розклади дійсних чисел в ряди Остроградського 2-го виду, їх геометрія та застосування. Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2008. № 9. С. 128–147.

References

1. Baranovskyi O.M. (2011). Riady Ostrohradskoho 1-ho vydu ta yikh zastosuvannia [Ostrogradsky series of the 1st type and their application]. Kyiv: Vyd-vo NPU imeni M.P. Drahomanova. 188 p. [in Ukrainian].
2. Zhykhareva Yu.I. (2008) Zobrazhennia chysel znakododatnymy riadamy Liurota: osnovy metrychnoi teorii [Numbers representation in positive Lurot`s series: basics of metric theory]. Nauk. chas. NPU im. M. P. Drahomanova. Seriia 1. Fiz-mat. nauky. K.: NPU im. M. P. Drahomanova, 2008. 200-211. [in Ukrainian].
3. Khvorostina Yu. (2013) Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements. Random Operators and Stochastic Equations, Vol. 21, no. 4, 385–401 [in English].
4. Pratsovytyi M.V. (2006) Riady Enhelia ta yikh zastosuvannia [Engel series and their application]. Nauk. chasop. NPU im. M.P. Drahomanova. Ser. 1, Fiz.-mat. Nauky, 7, 105–116 [in Ukrainian].
5. Pratsovytyi M.V. (1998) Fraktalnyi pidkhid u doslidzhenniakh synhuliarnykh rozpodiliv [Fractal approach in studies of singular distributions]. Kyiv: Vyd-vo NPU imeni M.P. Drahomanova. 296 p. [in Ukrainian].
6. Pratsovyta I. M. (2008) Rozklady diisnykh chysel v riady Ostrohradskoho 2-ho vydu, yikh heometriia ta zastosuvannia [Decompositions of real numbers in the Ostrogradsky series of the 2nd type, their geometry and application]. Naukovyi chasopys NPU imeni M.P.Drahomanova. Seriia 1. Fizyko-matematychni nauky. K.: NPU imeni M.P. Drahomanova, 9, 128–147 [in Ukrainian].

RECURSIVE ALGORITHMS OF DECREASE OF A FRACTIONAL PART OF A REAL NUMBER IN SOME SPECIES OF SPECIAL TYPES

Yu. V. Khvorostina, K.M. Stetsenko

Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine

Abstract.

Formulation of the problem. *In recent years, mathematicians have become increasingly interested in objects with non-trivial metric and topological properties. One of the most effective tools for assigning and researching such objects is a usage of the real numbers representation system. Also, the real number is a fundamental concept of number theory, continuous mathematics, and probability theory. Nowadays, different systems of the real numbers representation are extensively used in mathematics. Some of them have a finite alphabet and some have an infinite. But in most cases a real number is modeled from the natural number. The classical approach to the representation of the fractional part of a real number is to represent a number in the form of number series sum inverted to natural. In this regard, there is a need to systematize, clearly distinguish, or develop recursive algorithms for the real numbers distribution into series of special types.*

Materials and methods*. A systematic analysis of scientific sources on the numbers representation by some series of special types to determine the most important areas is carried out. Methods and means of metric number theory, mathematical analysis, and mathematical logic were applied in the study.*

Results. *The study systematized the approach to the numbers representation in some series, clearly distinguished the recursive steps of a finite or infinite algorithm for the transition from a decimal image of a real number to an image of numbers with s-adic series, Engel series, positive terms and alternate series of Lurots, Ostrogradskyi series of the 1st type and of the 2nd type. The action of each algorithm was applied to the same rational number from the interval (0; 1) and it was found that the same number can have a finite or infinite periodic representation in different systems.*

Conclusions. *Taking into account the self-similar structure of some converging positive or alternating series, it is possible to obtain clear recursive steps of the transition from a decimal representation of a real number to a representation using the series.*

Key words: *number representation, system fractions, Engel series, positive terms and alternate series of Lurots, Ostrogradskyi series of the 1st type, Ostrogradskyi series of the 2nd type.*