

# Моделювання розвитку ціни на енергетичних ринках за допомогою факторних моделей

*Зроблено аналіз праць, які базуються на моделі Блека – Шоулза – Мертона. Окреслено коло проблем, які з'являються при прогнозуванні ціни на товар. Обґрунтовано використання волатильності корисної доходності при прогнозуванні цін на товарних ринках. Презентовано власну модель утворення ціни на форвардні контракти.*

**Ключові слова:** факторні моделі, прогнозування, динаміка цін, товарний ринок.

*Сделан анализ работ, которые базируются на модели Блэка – Шоулза – Мертона. Очерчен круг проблем, возникающих при прогнозировании цены на товар. Обосновано использование волатильности полезной доходности при прогнозировании цен на товарных рынках. Презентована собственная модель образования цены на форвардные контракты.*

**Ключевые слова:** факторные модели, прогнозирование, динамика цен, товарный рынок.

*The analysis of the robot based on the model of Black–Merton–Shoulza. The range of problems in predicting the price of goods. The use of return volatility useful in predicting prices in commodity markets. Presented their own model of formation prices for forward contracts.*

**Keywords:** factor models, forecasting, dynamics of prices, commodity market.

**Постановка проблеми.** Трансформаційні процеси, що відбуваються в економіці України, сприяють зміні кон'юнктури та інфраструктури ринку країни, появі нових складових економіки. Однією з таких складових є товарний ринок, що відображає дії ринкових законів, цілеспрямованість та доцільність урядових рішень, впровадження нових законодавчих актів. Таким чином, товарний ринок як складова трансформаційної економіки знаходиться в постійній взаємодії з іншими її складовими такими як фінансовий ринок, ринок капіталів, фондовий ринок, відображаючи процеси, що впливають на них.

Останні роботи показали, що сучасний товарний ринок – суттєво нелінійна система, дослідження якої неможливе у рамках існуючих лінійних парадигм [2, 10]. Традиційні економетричні моделі є стохастичними (ARCH, GARCH і їх модифікації). Проте ті обмеження, які використовуються при побудові моделі з метою зробити її придатною для практичного застосування, по суті справи, знищують ту унікальну внутрішню «складність», яка властива даному динамічному процесу і без якої він стає безликим представником абстрактних фінансових даних.

У зв'язку з цим останнім часом інтенсивно розвивається альтернативний підхід до аналізу нелінійностей, а саме підхід, що базується на моделі Блека – Шоулза – Мертона (BSM) [5, 6].

Головною метою проведення досліджень є розробка методів які дозволяють передбачати кризові явища та обчислювати їх якісні характеристики.

Головною проблемою більшості існуючих статистичних фінансових моделей, які використовуються для прогнозування, є те що вони базуються на припущенні стаціонарності часових рядів. Протягом останніх трьох десятиліть, розвиток ринків товарних ф'ючерсів був зосереджений на необхідності розробки нових моделей пошуку цін на товарні ф'ючерси та інші похідні фінансові інструменти на сировинні товари. В сучасній літературі і практиці стохастичні моделі цін на сировинні товари відіграють важливу роль, тому що ці моделі вивчають ціни на сировинні товари як «випадкові блукання» і забезпечують аналітичні вирішення для оцінки ф'ючерсів та інших товарних похідних під економічними труднощами.[10,11] Це, у свою чергу, дозволяє порівняно легко калібрувати та обчислювати реалізації цих моделей. По суті цей підхід розглядає ціну на сировинні товари і прибутковість, як два різні стохастичні процеси з постійним взаємозв'язком.

**Мета статті.** Дана робота є частиною дослідження, метою якого є створення комплексу класифікованих моделей, застосування яких дозволить, в залежності від умов на ринку, надати інвестору повну інформацію щодо поведінки форвардної або ф'ючерсної ціни. Отримана інформація знижує ризик та дозволяє якомога надійніше інвестувати грошові засоби.

**Виклад основного матеріалу.** Сучасна теорія ціноутворення – це, можливо, один із найбільш важливих внесків в області фінансової економіки. Прорив в цьому напрямі стався на початку 1970-х з робіт Фішера Блека, Майрона Скоулза і Роберта Мертона [3, 11]). Підхід запропонований у моделі Блека – Шоулза – Мертона, важливий не тільки для ефективного обчислювання і відносно простого способу ціноутворення, а й для демонстрації принципу відсутності арбітражу, нейтральності ризику та оцінки вартості. Однак світова економіка стрімко розвивається, тому будь-яка теорія потребує удосконалення.

Підходи, які були розроблені в рамках положень моделі BSM про беззбиткову торгівлю у неперервному часі, нескінченну подільність базового активу, постійні процентні ставки і постійні волатильності, отримали широке розповсюдження і показали високу ефективність при застосуванні до задач моделювання цін на фінансових ринках. Найбільш важливим положенням в

## ЕКОНОМІЧНІ ПРОБЛЕМИ РОЗВИТКУ ГАЛУЗЕЙ ТА ВИДІВ ЕКОНОМІЧНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

моделі BSM є математичний опис того, як ціни на активи розвиваються в часі. Це добре відоме припущення геометричного броунівського руху (GBM), де у пропорційній зміні ціни на активи  $S$  передбачається наявність постійного миттєвого дрейфу  $m$ , і волатильності  $y$ . Математичний опис цієї властивості подається як стохастичне диференціальне рівняння:

$$dS = mSdt + ySdz, \quad (1)$$

$dS$  це приріст ціни на актив протягом малого проміжку часу  $dt$ ,  $dz$  – зміна у процесі Вінера протягом  $dt$ . Положення про нейтральність до ризику впливає з того, що дрейф може бути замінений безризиковою процентною ставкою (тобто  $m = r$ ). Будь-який процес, що описує стохастичну поведінку ціни на актив, призведе до характеристики розподілу майбутніх значень активів, і положення в рівнянні (1) впливає з того, що майбутні ціни на активи логарифмічно нормально розподілені, або, навпаки, що дохід на активи нормально розподілений.

Одна з якостей, яка призвела до успіху моделі Блека – Шоулза, це її простота. Вхідні параметри визначені контрактом або ринком. Виключенням є лише параметр волатильності. Зараз в фінансовій літературі опубліковано багато способів одержання значення волатильності виходячи з історичних даних або з ринкової ціни на опціон [4, 8, 10, 12].

Модель Блека – Шоулза – Мертона отримала подальший розвиток у дослідженні ціноутворення опціонів та ф'ючерсів. Модель удосконалювалась, розширювалась та пристосовувалась до нових умов фінансового ринку, що постійно змінюються. Найбільшого успіху досягли моделі з серії факторних моделей.

Для активу, який виплачує постійний дивідендний дохід, у стохастичному диференційному рівнянні безризикової моделі GBM, поданому рівнянням (1), рух замінюється різницею між безризиковою ставкою та постійною доходною ставкою:

$$dS = (r-d)Sdt + ySdz. \quad (2)$$

Рівняння (4) – це процес, який відображає динаміку спотової ціни на енергоносії  $S$ , константи  $r$  та  $d$  – короткострокова процентна ставка та корисна прибутковість відповідно,  $y$  – волатильність пропорційних змін ціни. Поняття корисної прибутковості, що розглядається як неявна чиста дивідендна прибутковість, що накопичується у власника товару з відповідною границею, є тепер добре відомим поняттям у літературі товарного ф'ючерса [1, 4, 8, 10, 12].

Подальшого розвитку дане направлення набуло у виді однофакторних моделей. Першим свою модель представив Блек. У своїй роботі [2] показав, що ціна ф'ючерсного контракту з граничною умовою, що прирівнює ціну ф'ючерсного контракту до спотової ціни в час виконання  $s$ , задовольняє відношення витрат на підтримку позиції:  $F(t, s) = Se^{(r-\delta)(s-t)}$ . Оскільки процентні ставки є постійними, це є також ціною форвардного контракту з тими ж специфікаціями [7]. Пряме застосування леми Іто показує, що волатильність ф'ючерсних цін є постійною величиною, а також рівною волатильності спотових цін  $\sigma_F(t, s) = \sigma$ .

Припущення моделі Блека про постійну волатильність не відповідає практичній поведінці ціни: форвардні контракти з довшим строком менш волатильні ніж короткострокові форвардні

контракти. Більш реалістична однофакторна модель була запропонована Шварцем у його роботі [14], в якій він припустив, що спотова ціна змінюється як процес повернення до середнього. Збільшення швидкості повернень до середнього призводить до затухання кривої волатильності. При довгостроковому форвардному контракті волатильність його прямує до нуля. Це затухання волатильності ускорюється при збільшенні швидкості повернення до середнього.

Структура волатильності у однофакторній моделі Шварца більш реалістична ніж у моделі Блека, але все одно має досить просту форму. Хоча волатильність ринку форвардних цін знижується при довгостроковому платежі, вона ніколи не досягне значення нуля і тому модель Шварца має проблеми з встановленням ціни на опціони на довгострокових форвардних контрактах.

Наступним логічним кроком в розвитку факторних моделей ціноутворення було введення другого стохастичного фактору для подолання недоліків та неточностей в попередніх роботах Шварца та Блека.

Деякі недоліки однофакторних моделей, а саме, дуже проста форма структури волатильності і її зменшення до нуля разом зі збільшенням строку виконання, можуть бути усунені введенням другого стохастичного фактора в модель. У роботі [13] описано двофакторну модель з поверненням до середнього, в якій спотова ціна повертається до довгострокового рівноважного рівня, який і сам є випадковою величиною. В роботах [8, 14, 10] описано двофакторну модель, яка враховує стохастичну корисну доходність і допускає високий рівень аналітичного трактування. Першим фактором є спотова ціна, який відповідає рівнянню (2). Другий фактор є миттєва корисна доходність від спотової енергії та слідує за процесом з поверненнями до середнього.

Шварц у [14] отримав рівняння для ф'ючерсної ціни, припускаючи, що часова структура процентних ставок постійна. Хілліард і Рейс [10], приймачі до уваги процеси так само як і Шварц, отримали формулу ціноутворення ф'ючерсів, сумісну з часовою структурою процентних ставок, яка спостерігається, поданих у рамках цін на чисту дисконтну облигацію.

Двофакторні моделі мають вірогідний рівень гнучкості у можливих формах форвардної кривої [14]. Однак форми обмежені та, зокрема, якщо крива буде мати більше однієї опуклості, тоді вона вийде за рамки аналітичного пояснення.

Волатильність ф'ючерсів залежить від волатильності спотових цін та корисної прибутковості. Існує також певна кореляція між швидкістю коректування корисної прибутковості та строком виконання ф'ючерса. За великих значень часу до виконання волатильність ф'ючерсних прибутків набуває постійного значення. Двофакторні моделі мають вірогідну реалістичну волатильність з послабленням для коротких строків виконання завдяки поверненням до середнього, але яка досягає відмінного від нуля рівня для довгострокових контрактів.

Пізніше Шварц у [14] презентував однофакторну модель для цін на енергоносії, яка зберігає майже всі особливості його двофакторної моделі з корисною прибутковістю, але основана на ціноутворенні та результатах волатильності моделі. Як наслідок,

модель потребує тільки чисельного обчислення відповідно до однофакторної моделі.

Доходність ф'ючерсних цін має таку ж саму волатильність як і для двофакторної моделі. Це коректування має створити вірогідні ціни на довгострокові контракти, але воно є менше практичне для контрактів зі строками виконання меншими за два роки.

Шварц у [14] розширює свою двофакторну модель включенням стохастичної процентної ставки. В цій моделі короткострокова ставка визначається як процес повернень до середнього, описаний у [15].

Хіліярд та Реіс [10] також презентували свої трифакторні моделі в дусі Шварца, але на відміну від припущення про розвиток процентних ставок [15], вони припустили, що процентні ставки розвиваються за припущенням Хіта, Яроу та Мортонна [9]: підтримують розвиток разом з кривою прибутковості.

У роботі Хіліярда та Реіса рух процентних ставок, який нейтралізований ризиком, замінений виразом, який не залежить від ринкової ціни ризику і тому це рівняння вільне від ризику процентної ставки.

Оскільки процентні ставки не вважаються постійними, ф'ючерсні ціни не будуть дорівнювати форвардним. Форвардні ціни не залежать від короткострокової процентної ставки. Ф'ючерсні ціни, однак, знаходяться під впливом короткострокової ставки у роботі Шварца.

Щоб отримати явні рішення для ф'ючерсних цін, Хіліярд та Реіс обмежують загальне рівняння, яке репрезентує розвиток процентної ставки, до однофакторної версії, де волатильність миттєвих довгострокових облікових ставок еквівалентна до моделі Вашичека [15].

Часова структура волатильності залежить від волатильності та інтенсивності повернень до середнього трьох випадкових змінних та їх кореляції, як і в двофакторній моделі.

Волатильність ф'ючерсних доходів збігається до постійного значення, оскільки строк виконання ф'ючерсного контракту прагне до нуля.

На практиці стохастичні процентні ставки дуже мало впливають на ціни енергетичних деривативів та вони звичайно визначаються детерміновано. Ці трифакторні моделі можуть бути розглянуті як корисний спосіб оцінки впливу стохастичних процентних ставок без потреби повного впровадження моделі у систему управління ризиком.

Отже, в сучасних умовах функціонування товарного ринку необхідно враховувати такі фактори:

- волатильність довгострокових форвардних контрактів менша за волатильність короткострокових контрактів;
- волатильність довгострокового форвардного контракту не досягає нуля;
- комплексність волатильності;
- сезонність ціни на товарному ринку є вагомим фактором у ціноутворенні;
- спотова ціна – процес з поверненнями до середнього;
- непостійність процентних ставок.

Враховуючи вище сказані переваги і недоліки факторних моделей, було розроблено власну факторну модель. Першим фак-

тором було взято спотову ціну, яка відповідає рівнянню (2). Другим фактором є миттєва корисна доходність від спотової ціни:

$$d\delta = \alpha_\delta (\bar{\delta} - \delta)dt + \sigma_\delta dz_\delta. \quad (3)$$

У рівнянні (3)  $\bar{\delta}$  та  $\delta$  це швидкість коректування та середня довгострокова корисна доходність відповідно, а  $y_d$  – волатильність корисної доходності. Приріст броунівського руху, який стимулюється спотовою ціною та корисною доходністю, має коефіцієнт кореляції  $c_{S_d}$ .

З постійними процентними ставками форвардні та ф'ючерсні ціни на енергоносії є рівними. Удосконаливши рівняння Шварца з [14] отримуємо рівняння для ф'ючерсної ціни, припускаючи, що часова структура процентних ставок постійна і дорівнює  $r$ .

$$F(t, s) = S \exp\left(-\delta \frac{1 - e^{-\alpha_\delta(s-t)}}{\alpha_\delta} + A^2(t, s)\right)$$

$$A(t, s) = \left(r - \bar{\delta} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_\delta^2}{\alpha_\delta^2} - \frac{\sigma_\delta \sigma_\delta \rho_{S\delta}}{\alpha_\delta}\right)(s-t) + \frac{1}{4} \sigma_\delta^2 \frac{1 - e^{-2\alpha_\delta(s-t)}}{\alpha_\delta^3} \quad (4)$$

$$+ \left(\bar{\delta} \alpha_\delta + \sigma_\delta \sigma_\delta \rho_{S\delta} - \frac{\sigma_\delta^2}{\alpha_\delta}\right) \frac{1 - e^{-\alpha_\delta(s-t)}}{\alpha_\delta^2}$$

$$\bar{\delta} = \bar{\delta} - \frac{\lambda_\delta}{\alpha_\delta}$$

На рисунку показана чутливість формули ціноутворення ф'ючерсів до швидкості повернень до середнього корисної прибутковості та кореляції між спотовою ціною та корисною прибутковістю відповідно. Для графіку було використано такі параметри:  $S = 100$  дол. та  $r = 5\%$ ,  $d = 5\%$ ,  $\bar{\delta} = 7\%$ ,  $\rho_{S_d} = 0.8$ ,  $y = 30\%$ ,  $y_d = 30\%$ ,  $\lambda_d = 0$ ,  $b_d = 0.2, 0.5, 0.8$ .

Волатильність ф'ючерсів залежить від волатильності спотових цін та корисної прибутковості, а також певна кореляція між швидкістю коректування корисної прибутковості та строком виконання ф'ючерса. За великих значень часу до виконання волатильність ф'ючерсних прибутків набуває постійного значення:

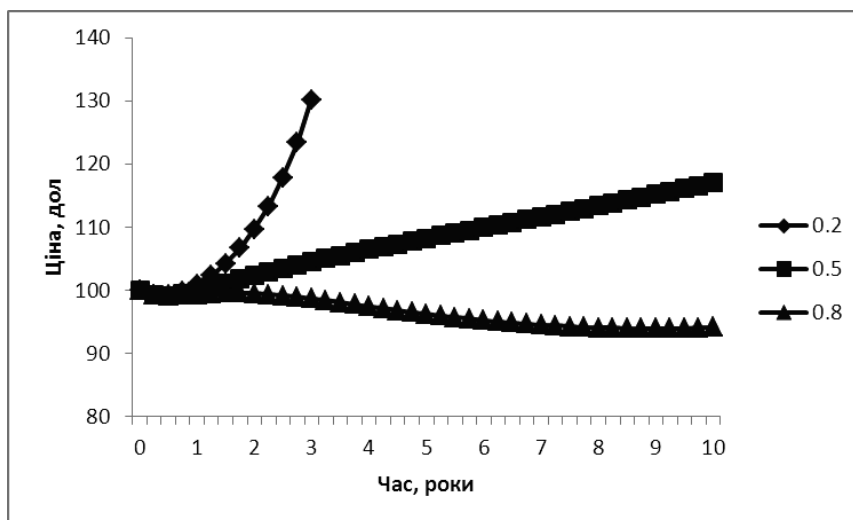
$$\sigma_F(t, \infty) = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\sigma_\delta^2}{\alpha_\delta^2} - \frac{2\sigma\sigma_\delta\rho_{S\delta}}{\alpha_\delta}}. \quad (5)$$

Волатильність ціни форвардного або ф'ючерсного контракту змінюється в залежності від строку виконання, зазвичай зменшується відносно волатильності спотової ціни при збільшенні строку виконання, а також відображає сезонність у поведінці ціни.

Також рисунок показує, що двофакторна модель має вірогідний рівень гнучкості у можливих формах форвардної кривої.

Цей графік також показує, що ця модель має вірогідну реалістичну волатильність з послабленням для коротких строків виконання завдяки поверненням до середнього, але яка досягає відмінного від нуля рівня для довгострокових контрактів.

Таким чином, використавши більш комплексну структуру волатильності ми змогли зберегти врахування фактора сезонності і при цьому волатильність форвардного контракту не досягає значень нуля. Використання спотової ціни як процесу з поверненнями до середнього дозволяє зберегти особливість розвитку товарної ціни повертатися до середньострокового рівня.



Зміна ф'ючерсної ціни з різними рівняннями повернення до середнього корисної прибутковості

**Висновки**

Підхід, запропонований у роботі, є багатообіцяючим. На відміну від переважної більшості товарів, що обертаються в економіці, динаміка цін на енергетичні товари, що торгуються на дерегульованих ринках, досліджена або може бути досліджена досить повно через наявність історичних записів про результати торгів. Моделювання динамічних моделей за допомогою стохастичних моделей зображує вірогідний процес розвитку ціни та може бути використане у побудові системи прийняття рішень та системи управління ризиками. Запропонована модель створює умови для більш адекватного аналізу структурних особливостей енергетичного ринку, що дозволило б проводити дослідження не тільки поведінки окремих ринкових агентів, але в перспективі й взаємодії окремих ринків, передбачаючи наслідки прийняття рішень з високим ступенем вірогідності.

Проаналізувавши попередні розробки на базі моделі Блека – Шоулза – Мертона та врахувавши неточності та недоліки цих робіт, було розроблено власну модель знаходження цін на форвардні контракти зберігаючи основні особливості поведінки ціни на товари.

Вибір моделі залежить від природи енергетичних ринків та деривативів. Всі моделі для визначення спотової ціни можуть бути розроблені сумісно з ринковою форвардною ціною та волатильністю спотової ціни, включаючи сезонність ціни та шаблони волатильності.

Включення стрибків в ці моделі призводить до втрати простих аналітичних рішень для стандартних опціонів, і тому потребує застосування чисельних методів.

**Література**

1. Bjerksund P. Contingent Claims Evaluation When the Convenience Yield is Stochastic: Analytic Results // Working Paper. Norwegian School of Economics and Business Administration. – 1991.  
 2. Black F. The Pricing of Commodity Contracts // Journal of Financial Economics, Vol. 3, Jan–Mar, 1976, pp. 167–179.

3. Black, F. and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy, Vol. 81. 1973, pp. 637–659.  
 4. Financial Studies 2(2), pp. 241–250. Brennan M.J. The Price of Convenience and Valuation of Commodity Contingent Claims. – 1991.  
 5. Clewlow L. and C. Strickland. Valuing Energy Options in a One-Factor Model Fitted to Forward Prices, // Working Paper, University of Technology, Sydney. – 1999a.  
 6. Clewlow L. and C. Strickland. A Multi-Factor Model for Energy Derivatives Risk Management // Working Paper, University of Technology, Sydney, 1999b.  
 7. Cox J.C. and S. A. Ross. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes // Journal of Financial Economics 3, 1976, pp. 145–166.  
 8. Gibson, R. and F. Schwartz, Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims, // The Journal of Finance, Vol. XLV, 1990, pp. 959–976.  
 9. Heath D.R. Jarrow and A. Morton, Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claim Valuation. Econometrica. Vol. 60. 1992, pp. 77–105.  
 10. Hilliard J. F and J Reis. Valuation of Commodity Futures and Options under Stochastic Convenience Yields, Interest Rates, and Jump Diffusions in the Spot // Journal of Financial and Quantitative Analysis, 33. 1998, pp. 61–86.  
 11. Merton R. Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science. Vol. 4. 1973, pp. 141–183.  
 12. Miltersen K R. and F. S. Schwartz. Pricing of Options on Commodity Futures with Stochastic Term Structures of Convenience Yields and Interest rates // Journal of Financial and Quantitative Analysis. Vol. 33. 1998, pp. 33–59.  
 13. Pilipovic D., Energy Risk; Valuing and Managing Energy Derivatives. Mc Graw–Hill. 1997.  
 14. Schwartz E.S. The Stochastic Behaviour of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging // The Journal of Finance. Vol. III. No. 3. July, 1997, pp. 923–973.  
 15. Vasicek O. An Equilibrium Characterization of the Term Structure, // Journal of Financial Economics, No. 5. 1977, pp. 177–188.