го розвитку через передачу їх у розпорядження до Банку розвитку із подальшим фінансуванням програм пріоритетного та соціального розвитку.

**Список використаних джерел**

1. Закон України «Про Національний банк України».

2. Інструкція НБУ «Про порядок регулювання діяльності банків в Україні» від 28.08.2001 №368.

3. Офіційне інтернет–представництво Національного банку України [Електрон. ресурс] / Режим доступу: www.bank.gov.ua

4. Положення НБУ «Про порядок формування обов'язкових резервів для банків України та філій іноземних банків в Україні» від 16.03.2006 №91.

*А.О. СІГАЙОВ,*
*д.е.н., професор, НТУУ «Київський політехнічний інститут»*

# Моделі економічного зростання та хаотична динаміка

*У статті розглядається, як із класичного, детермінованого процесу економічного зростання можуть виникнути нерівномірні та нестабільні коливання. У результаті аналізу можна зробити щонайменше два висновки. По–перше, явно виражені зміни у функціонуванні економіки не повинні змушувати нас переглядати наше розуміння механізму її функціонування. По–друге, пояснення того, чому динамічні моделі змінюються та чому може бути так важко передбачати майбутні події на основі минулого досвіду, ми не повинні шукати у зовнішніх факторах.*

***Ключові слова:*** *моделі економічного зростання, хаотична динаміка.*

*В статье рассматривается, как из классического, детерминированного процесса экономического роста могут возникнуть неравномерные и нестабильные колебания. В результате анализа можно сделать как минимум два вывода. Во–первых, явно выраженные изменения в функционировании экономики не должны заставлять нас пересматривать наше понимание механизма ее функционирования. Во–вторых, объяснение того, почему динамические модели меняются и почему может быть так трудно предвидеть будущие события на основе прошлого опыта, мы не должны искать во внешних факторах.*

***Ключевые слова:*** *модели экономического роста, хаотическая динамика.*

*This paper discusses how the classical, deterministic process of economic growth can produce uneven and unstable oscillations. The analysis can lead to at least two conclusions. First, pronounced changes in the functioning of an economy should not lead us to revise our understanding of the functioning mechanism. Second, an explanation of why dynamic models are changing and why it can be so difficult to predict future events based on past experience, we should not look in the external factors.*

***Keywords:*** *economic growth models, chaotic dynamics.*

***Постановка проблеми.*** У цій статті досліджується виникнення нерівномірних коливань у процесах економічного зростання, дуже нерегулярних та нестабільних коливань, що у математичній літературі отримали термін «хаотичні», які обумовлені внутрішніми причинами та виникають у результаті взаємодії виключно технології, уподобань та психологічних правил поведінки, без екзогенного впливу стохастичних шоків. З метою представлення цієї теми ми переглянули добре відому класичну модель продуктивності та зростання населення. Ця теорія дає зручну та природну початкову точку для такого дослідження: зручну, тому що вона описує найпростішу ситуацію, в якій можна вивчати хаос; природну – тому, що Мальтус [9], який надав цій теорії її остаточну форму, наголошував на ймовірності того, що в минулому осциляція мала бути звичайною формою коливань у динаміці населення та доходу.

***Аналіз досліджень та публікацій з проблеми.*** Формальна теорія «хаосу» в детермінованих динамічних системах не є новою: ще на початку 1980–х років перші дослідники припускали її актуальність для економіки, наприклад Форд [4], Бенхабіб та Дей [1–3], а також Штутцер [14] є очевидно першими спробами вивчення цього явища на економічних моделях. З огляду на це, перш ніж перейти до аналізу класичної моделі, ми коротко переглянемо основні властивості хаосу та достатні умови для його виникнення. Після цих загальних міркувань будуть надані приклади конкретних виробничих функцій та рівня народжуваності. Робота закінчується міркуваннями щодо можливого застосування та інтерпретації отриманих результатів.

Класична теорія зростання, яку ми тут використовуємо, є добре відомою для більшості економістів. Тим не менше читач має бути готовим до кількох несподіванок: перш за все, звичайно, до самої природи математичного «хаосу», а також до здатності нелінійної моделі виявляти різні форми поведінки, що ендогенно переходять з однієї форми в іншу без відповідної зміни у базовій структурі. Це явище, а також «нерегулярні регресивні та прогресивні рухи населення» Мальтуса ілюструють два числові приклади.

Тип динамічного явища, що є предметом розгляду в цій роботі, має недовгу, але напрочуд різноманітну історію та з'явився у кількох різних наукових та математичних кон–

 

текстах. Наприклад, Лоренц [8] (метеорологія), Улам [15] і Руель та Тейкенс [13] (фізика), а також Мей [10] (біологія). У цій роботі класичні економічні припущення щодо продуктивності, зростання населення та розподілу доходу використовуються для отримання єдиного, дійсно значного скінченно різницевого рівняння людського населення:

$$x_{t+1} = \theta(x_t). \tag{2.1}$$

Траєкторія, що генерована відображенням $\theta : x \to \theta(x)$, є послідовністю $\{x\}_t^\infty$, елементи якої задовольняють умови рівняння (2.1). Хаотичні траєкторії точно визначені Лі та Йорком [11]. Коротко кажучи, хаос має чотири властивості. По–перше, існують періодичні цикли кожного порядку. По–друге, існує «збовтана множина» хаотичних траєкторій, які не містять періодичних циклів. Траєкторії у цій множині мають наступні характеристики. По–перше, кожна хаотична траєкторія відхиляється від будь–якої іншої хаотичної траєкторії. По–друге, всі хаотичні траєкторії пробігають довільно близько одна до одної. По–третє, хаотичні траєкторії відхиляються від будь–якої періодичної траєкторії: вони є аперіодичними і не збігаються з циклом будь–якого порядку. Очевидно, хаотичні траєкторії є дуже нестабільними та мають подібні риси до тих, що спостерігалися у випадках з числовими економічними даними, що коливаються, зазвичай у дуже нерегулярний спосіб та з непередбачуваністю, що наростає.

Природнім та доцільним є з'ясування, за яких умов хаотична поведінка може виникнути у моделі, що містить конкретні економічні структури. Основним інструментом, який ми використовуємо для цього у цій роботі, є наступний:

Теорема (Лі–Йорка). Нехай функція и рівняння (2.1) є неперервним відображенням інтервалу $J \to J \subset R$. Припустімо, що існує така точка, що

$$\theta^3(x) \le x < \theta(x) < \theta^2(x). \tag{2.2}$$

Тоді

(i) для кожного k = 1, 2, 3,... існує k–періодична траєкторія у *J*, та

(ii) $\theta$ є хаотичною в нескінченній «збовтаній множині» $S \subset J$.

Інтерпретацію цієї теореми та тлумачення її доведення разом із великою кількістю корисного матеріалу про теорію біфуркацій можна знайти у ряді робіт: наприклад, Мей [1010], Мей та Остер [11], Гукенхаймер, Остер та Іпактачі [6] і Штутцер [14]. Також ця теорема використовується для розробки теорії мінливої раціональної поведінки, хаотичної динаміки для економік чистого обміну зі співіснуючими поколіннями, а також нерегулярних інвестиційних циклів у моделях нагромадження капіталу (див. Бенхабіб та Дей [1–3]).

***Мета статті.*** В даній роботі наш інтерес обмежується неперервними скінченно–різницевими рівняннями, генеруюче відображення и яких за деяких значеннях параметра набуває «одновершинної» форми з $\theta(0) = 0$, а $\theta(x)$ зростає при $\theta'(x) > 1$ для достатньо малого додатного *x*. Для такого відображення ми можемо визначити максимально досяжне населення $x^m$, генероване прообразом або максимізуючим населенням $x^*$, використовуючи рівняння

$$x^m = \theta(x^*) = \max_{x \ge 0} \theta(x) > 0. \tag{2.3}$$

Через одновершинну природу *и* населення може мати два прообрази, менший з яких ми позначаємо $x^c$. Звичайно, $\theta(x^c) = x^*$. Якщо $\theta(x^m) \ge 0$, то будь–яка початкова умова

*x* має попадати в інтервал $[0; x^m]$, так, щоб існувала множина *J*, що вимагається теоремою Лі–Йорка. Достатню умову для хаосу (2.2) тепер можна виразити як

$$0 < \theta(x^m) \le x^c < x^* < x^m. \tag{2.4}$$

Процедура, якої слід дотримуватися, тепер зрозуміла. По–перше, слід задати параметри, якщо такі можливо знайти, таким чином, щоб $x^m$ існувало, як це визначається рівнянням (2.3). Потім треба знайти такі параметри, що задовольняють умови чотирьох нерівностей (2.4). На даний момент це зроблено для кількох версій класичної моделі економічного зростання.

У своїй найпростішій формі класична теорія зростання базується на трьох компонентах: рівнянні, що пов'язує нетто–коефіцієнт народжуваності з доходом, функції виробництва, що описує «негайну продукцію робочої сили», та функції розподілу, яка визначає заробітну плату робочої сили. Мальтус стверджував, що, коли товари життєвої необхідності є у надлишку, населення має тенденцію до зростання у максимальному біологічному або природному темпі, скажімо л; коли їх недостатньо, він припускав, що нетто–коефіцієнти народжуваності населення є максимально досяжними при культурно визначеному прожитковому мінімумі, скажімо *у*. Відповідно, темп зростання населення, виражений у формі на душу населення, можна представити функцією

$$\frac{\Delta P}{P} = \min\left\{\lambda, \frac{(w-\sigma)}{\sigma}\right\}, \tag{3.1}$$

де $\Delta P / P$ – нетто–коефіцієнт народжуваності, а *w* – розмір заробітної плати. При $\Delta P = P_{t+1} - P_t$, ми бачимо, що рівняння зростання населення набуває форми

$$P_{t+1} = \min\left\{(1+\lambda)P_t, \frac{w_t P_t}{\sigma}\right\}. \tag{3.2}$$

Слідом за Мальтусом ми зауважуємо, що одиницею часу є «покоління» двадцяти п'яти років, таким чином, рівняння (3.2) описує еволюцію послідовності поколінь.

Розглянемо егалітарне, аграрне суспільство, в якому загальний об'єм виробництва, визначений функцією виробництва $Y = f(P)$, розподіляється згідно з середнім продуктом (див. Георгеску – Роген [55]) таким чином, що

$$w_t = \frac{f(P_t)}{P_t}. \tag{3.3}$$

Припускається, що $f(0)=0$, а $f$ є неперервною та «одновершинною». Тоді рівняння (3.2) набуває вигляду

$$P_{t+1}=\theta(P_t)=\min\left\{(1+\lambda)P_t,\frac{f(P_t)}{\sigma}\right\}, \qquad (3.4)$$

яка, незважаючи на те, що складена з двох сегментів і є ламаною лінією, є неперервною та одновершинною.

Припускаючи, що природній темп зростання л є не надто великим, ми бачимо, що історія економіки керується двома режимами, в одному з яких темп зростання обмежується природнім темпом л, а в другому – засоби до існування керують населенням. Перший режим можна назвати «біологічною» або «B–фазою»; другий – «S–фазою» (від англ. Subsistence). Монотонне зростання має місце у біологічній фазі протягом часу, що веде до постійного населення $P^e$, де $f(P^e)=\sigma P^e$, тобто де обсяг виробництва є достатнім для утримання населення на рівні існування (виживання). Має місце перенаселення та з'являються цикли з періодами достатку, що змінюються періодами голоду.

За умови, що $f$ є одновершинною, існує $P^m$ і

$$P^m=\theta(P^*)=\min\left\{(1+\lambda)P^*,\frac{f(P^*)}{\sigma}\right\}=\max_{P\ge0}\min\left\{(1+\lambda)P,\frac{f(P)}{\sigma}\right\}. \qquad (3.5)$$

Визначивши $P^c$ як прообраз $P^*$, тобто таким чином, що $\theta(P^c)=P^*$, ми бачимо, що умови теореми хаосу будуть задоволені, якщо

$$0<\theta(P^m)\le P^c<P^*<P^m. \qquad (3.6)$$

Друга нерівність (3.6) означає, що

$$\frac{f(P^m)}{P^m}\le\frac{P^c}{P^m}\sigma, \qquad (3.7)$$

тобто при максимальному населенні $P^m$ середній продукт робочої сили опускається нижче прожиткового мінімуму на частку $P^c/P^m$. Або, іншими словами, виробництво опускається нижче за рівень, необхідний для утримання населення $P^c$ на рівні виживання; тобто

$$f(P^m)\le\sigma P^c. \qquad (3.8)$$

З огляду на двофазовий, кусковий характер рівняння (3.2) можливими є кілька типів осциляції. Для їх ідентифікації нехай $P^{**}$ – це прообраз максимального населення, коли біологічне обмеження не враховується; тобто

$$\theta(P^{**})=\max_{P>0}\frac{f(P)}{\sigma}. \qquad (3.9)$$

***Виклад основного матеріалу.*** Вражаючу кількість якісних режимів поведінки, властивих класичній моделі, та еволюцію хаосу, коли задоволені достатні умови, можна показати, коли заданою є функція виробництва. Для цього можна використати таку гнучку функцію

$$f(P)=AP^{\beta}(1-P)^{\gamma}, \qquad (4.1)$$

де вираз $AP^{\beta}$ – це звичайна степенева функція виробництва, а вираз $(1-P)^{\gamma}$ – це коефіцієнт зменшення продуктивності, викликаного надмірно сконцентрованим населенням. За допомогою цього різницеве рівняння (3.5) набуває вигляду

$$P_{t+1}=\min\left\{(1+\lambda)P_t,\frac{AP_t^{\beta}(1-P_t)^{\gamma}}{\sigma}\right\}. \qquad (4.2)$$

*Приклад 1.* Для спрощення, нехай *в* = 1 і нехай г є досить малим. Це означає, що коефіцієнт зменшення продуктивності не матиме значного впливу, поки *P* є великим (тобто близьким до одиниці). За відсутності обмеження природного приросту максимум рівняння (4.2) буде досягнуто при

$$P^m=\frac{A/\sigma}{1+\gamma}\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)^{\gamma} \qquad (4.3)$$

що досягається при прообразі

$$P^{**}=\frac{1}{1+\gamma}. \qquad (4.4)$$

Отже, чим меншим є *г*, тим драматичнішим буде перенаселення та гострішим зменшення населення після того, як буде перевищене $P^{**}$. Припустімо тепер, що має місце Випадок ІІІ. Це означає, що

$$A\left[(1+\lambda)\left(\frac{1-\lambda}{A}\right)^{1/\gamma}-\lambda\right]^{\gamma}\le\frac{\sigma}{(1+\lambda)^2} \qquad (4.5)$$

є достатньою умовою для хаосу.

*Приклад 2.* Рівняння (4.2) було модельоване при значеннях параметрів, які задовольняють щойно отриманій достатній умові (4.5) Випадку ІІІ (Значення параметрів: $\sigma=\beta=1$, $\gamma=0{,}25$, $\lambda=0{,}25\gamma$, $A=(1+\gamma)[(1+\gamma)/\gamma]^{\gamma}$, $P_0=0{,}10$). Період зростання у біологічній фазі переходить у блукаючу осциляцію з відносно малими змінами населення, розсіяними з дуже великими коливаннями у спорадичних інтервалах. Зауважте, що до стаціонарного стану модель наближується двічі, але поступово виникають змінні цикли.

**Висновки**

У нелінійних системах поведінка пов'язана з періодом часу, для якого визначено динамічну структуру. В даному випадку одиниця часу інтерпретується як «покоління» двадцяти п'яти років. Це є періодом, який класики вважали відповідним для вивчення довгострокової динаміки.

Тип явища, що тут досліджується, можна також вивести для моделей неперервного часу, тобто для диференційних рівнянь. Для того щоб виявляти хаотичну динаміку, такі рівняння повинні мати третій порядок, що вимагатиме більш складного аналізу, а також більшої залежності від числових підрахунків. Оскільки такий аналіз усе одно необхідно проводити в дискретному часі, дослідження спочатку найпростішої теорії дискретного часу має деяку перевагу. Те, що представлено в цій роботу, є всього лише вступом до застосування концепції хаосу в економіці.

У класичній моделі людям не притаманна риса далекоглядної поведінки, що ставить питання про те, чи може хаос бути викликаний недалекоглядністю. Дана робота показує, що цього насправді немає, оскільки використовується структура співіснуючих поколінь, в якій молоде покоління, згідно з припущеннями, планує свою старість та використовує «раціональні очікування» або ідеальну далекоглядність. В інших дослідженнях, в імітаційних моделях, де агенти здійснюють планування на основі відносно великого горизонту планування, отримано нерегулярні інвестиційні цикли.

Оскільки траєкторії, що досліджуються у цій роботі, є дуже нестабільними та непередбачуваними, так що малі відхилення параметрів чи початкових умов ведуть до значних дивергенцій траєкторій, видається доцільним дослідити розподіл генерованих моделлю значень. Середнє значення траєкторії, як функції параметру A у рівнянні (4.3) само по собі було дуже нестабільним в інтервалі [3, 8; 4], демонструючи «бурхливі осциляції» в міру наближення A до чотирьох. Розподіл ймовірності різко змінюється при різних значеннях A, але й для деяких значень A розподіл ймовірності сам по собі є неймовірно складним, демонструючи надзвичайні осциляції упродовж свого діапазону.

#### Список використаних джерел


1. Benhabib J., Day R. Erratic Accumulation. – Economics Letters. – Vol. VI. – 1980. – P. 113–18.
2. Benhabib J., Day R. Rational Choice and Erratic Behavior. – Review of Economic Studies. – Vol. XLVIII. – 1981. – P. 459–71.
3. Benhabib J., Day R. A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model. – Journal of Economic Dynamics and Control. – Vol. IV. – 1982. – P. 37–55.
4. Ford J. Ergodicity for Economists // New Quantitative Techniques for Economic Analysis. – New York: Academic Press. – 1981.
5. Georgescu–Roegen N. Economic Theory and Agrarian Economics. – Oxford Economic Papers. – Vol. XII. – 1960. – P. 1–40.
6. Gukenheimer J., Oster G., Ipaktachi A. The Dynamics of Density Dependent Population Models. – Journal of Mathematical Biology. – Vol II (April 1977). – P. 101–47.
7. Li, T–Y., Yorke J.A. Period Three Implies Chaos. – American Mathematical Monthly. – Dec. 1975. – P. 985–92.
8. Lorenz E. The Problem of Deducing the Climate from the Governing Equations. – Tellus. – Vol. XVI. – 1964. – P. 1–11.
9. Malthus T. Principle of Population // 5–th ed. – Homewood, IL: Richard D. Irwin, published with introduction by M. Blaug. – 1817, 1963.
10. May R. M. Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos. – Science. – Vol CLXXXVI. – 1974. – P. 645–47.
11. May R. M., Oster G. Bifurcations and Dynamical Complexity in Simple Ecological Models. – The American Naturalist. – Vol. CX. – 1976. – P. 573–99.
12. Muller G., Day R. Cautious Rolling Plans with Forecasting and Market Feedback // R. Day and A. Cigno, eds., Modelling Economic Change: The Recursive Programming Approach. – Amsterdam: North–Holland Publishing Company. – 1978. – P. 233–48.
13. Ruelle D., Takens F. On the Nature of Turbulence. – Communications in Mathematical Physics. – Vol. XX. – 1971. – Pp. 167–92.
14. Stutzer M. Chaotic Dynamics and Bifurcation in a Macro–Model. – Journal of Economic Dynamics and Control. – Vol. 11. –1970. – Pp. 97–118.
15. Ulam S. Some Properties of Certain Non–linear Transformations. // S. Drobot, ed., Mathematical Models in Physical Science. – Englewood Cliffs: Prentice–Hall, Inc. – 1963. – Pp. 85–95.


*УДК 330.13*

*Л.М. ГОРБАЧ,*
*к.е.н., доцент, Волинський інститут ім. В. Липинського МАУП*

# Рента і рентні відносини: історичні та економічні передумови становлення і розвитку

*Розглядаються сутність, характерні риси та особливості розвитку напрямів і теорій ренти і рентних відносин. Висвітлено і проаналізовано внесок представників різних шкіл у розвиток теорії ренти. Показано, що теорії та концепції ренти є методологічною основою рентної політики. Аналізуються основні передумови виникнення і розвитку рентних концепцій.*

***Ключові слова:*** *теорії ренти, рентна концепція, рентна політика, диференційна земельна рента, абсолютна рента, монопольна рента, рентні відносини, диференціальна рента I і II.*

*Рассматриваются суть, характерные черты и особенности развития направлений и теорий ренты и рентных отношений. Отображен и проанализирован вклад представителей разных школ в развитие теории ренты. Показано, что теории и концепции ренты являются методологической основой рентной политики. Анализируются основные предпосылки возникновения и развития рентных концепций.*