

удк 622.831.3.001.5

Л.Я. Локшина, Ю.А. Костандов

ПАРАМЕТРЫ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ОБРАЗЦА ГОРНОЙ ПОРОДЫ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ ЖЕСТКИМИ ШТАМПАМИ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ТРЕНИЯ

Таврический национальный университет, 95007, г. Симферополь, пр. Вернадского, 4

Проведено исследование напряженного состояния образца при его одноосном сжатии между жесткими штампами с учетом внутреннего трения материала, контактного трения на поверхности приложения нагрузки и неоднородности напряжений сжатия под штампом. Получено уравнение состояния материала на траектории максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН). Найдена зависимость разрушающего напряжения от касательных напряжений, обусловленных внешним трением, и определены координаты точек пересечения ТМЭКН с контактирующими со штампами поверхностями образца. В качестве критерия разрушения материала использовался критерий Кулона. Установлена зависимость положения ТМЭКН от приложенной нагрузки. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: сжатие, разрушение, напряжение, жесткий штамп, внутреннее трение, контактное трение

Предел прочности образцов горной породы при одноосном сжатии является одним из основных параметров оценки безопасного состояния подземных сооружений и возможности разрушения горных массивов исполнительными органами горных машин. При ведении горных работ для обеспечения устойчивости выработок и иных подземных сооружений используются различного вида крепи, в результате воздействия которых на горные массивы последние оказываются в сложном напряженном состоянии, влияющем на их прочностные характеристики. Из этого следует необходимость установления зависимости параметров предельного состояния горной породы от напряженного состояния, формируемого в ней при воздействии на нее жесткими элементами крепи.

Авторами ранее получено уравнение состояния материала образца горной породы при сжатии жесткими штампами с учетом только внутреннего трения материала [1]. В данной работе рассматривается напряженно-деформированное состояние образца горной породы при одноосном сжатии между жесткими штампами с учетом внутреннего трения материала и кон-

тактного трения на поверхности приложения нагрузки в предположении, что формирование очагов разрушения в локальных областях происходит на траекториях максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) [2]. Под понятием эффективного касательного напряжения τ_{ef} понимается активное касательное напряжение τ_α за вычетом фрикционной составляющей.

Для описания равновесия на ТМЭКН используется критерий Кулона

$$\tau_{ef} = \tau_\alpha - \mu\sigma_\alpha \leq k, \quad (1)$$

где $\mu = \tan \rho$ – коэффициент внутреннего трения материала, ρ – угол его внутреннего трения, σ_α – нормальное напряжение на ТМЭКН, k – предельная сопротивляемость материала сдвигу. Критерий (1) означает, что при $\tau_{ef} = k$ происходит разрушение материала, а при $\tau_{ef} < k$ он находится в упругом состоянии.

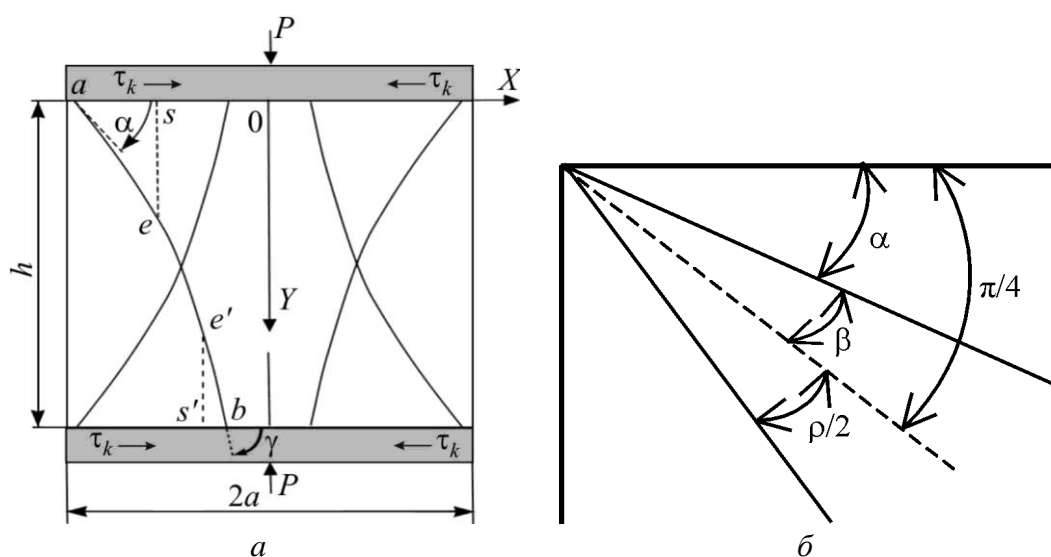


Рис. 1. Схемы расположения ТМЭКН в образце горной породы (а) и углов в точке а образца (б) при его одноосном сжатии

Рассмотрим образец горной породы шириной $2a$ и высотой h при одноосном сжатии вдоль оси OY между жесткими штампами силой P (рис. 1) при наличии контактного трения, которое обуславливает действие касательных напряжений τ_k на контактирующих со штампами поверхностях образца. Для аналогичной задачи авторами ранее получены уравнения состояния материала с учетом внутреннего трения материала и касательного напряжения, обусловленного внешним трением [3]. Однако при этом образец сжимался между жесткими плитами прессы и полагалось, что во всех точках образца напряжение сжатия $\sigma_y = \text{const}$. В данной работе напряжение σ_y , действующее на контактирующих со штампами поверхностях образца, рассматрива-

ется как результат воздействия на них штампов и потому зависит от координаты x : $\sigma_y = \sigma_y(x)$.

Поскольку нагружение и деформирование образца симметрично относительно его продольной оси, будем рассматривать только левую половину образца. Проведем ТМЭКН ab в виде произвольной кривой и касательные к ней в точках a и b (рис. 1,а).

Из условия равновесия треугольников aes и $be's'$, формируемых ТМЭКН ab , найдем связь между нормальными и касательными напряжениями через углы наклона α и γ к оси OX , касательных к ТМЭКН в точках a и b соответственно:

$$\sigma_\alpha = -\frac{\sigma_{xв} - \sigma_{yв}}{2} + \frac{\sigma_{xв} + \sigma_{yв}}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha, \quad (2)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_{xв} + \sigma_{yв}}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha, \quad (3)$$

где τ_k – касательное напряжение от внешнего трения, $\sigma_{yв}$ и $\sigma_{xв}$ – нормальные напряжения в точке a ; индекс «в» обозначает верхнюю контактирующую поверхность образца.

Подставляя выражения (2) и (3) в (1), получаем уравнение для эффективного касательного напряжения

$$\tau_{ef} = \frac{\sigma_{xв} + \sigma_{yв}}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha - \mu \left(-\frac{\sigma_{xв} - \sigma_{yв}}{2} + \frac{\sigma_{xв} + \sigma_{yв}}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha \right). \quad (4)$$

По аналогии получим соответствующие уравнения для треугольника $be's'$:

$$\sigma_\gamma = \frac{\sigma_{xн} + \sigma_{yн}}{2} - \frac{\sigma_{xн} - \sigma_{yн}}{2} \cos 2\gamma + \tau_k \sin 2\gamma, \quad (5)$$

$$\tau_\gamma = -\frac{\sigma_{xн} - \sigma_{yн}}{2} \sin 2\gamma - \tau_k \cos 2\gamma,$$

$$\tau_{ef} = -\frac{\sigma_{xн} - \sigma_{yн}}{2} \sin 2\gamma - \tau_k \cos 2\gamma - \mu \left(\frac{\sigma_{xн} + \sigma_{yн}}{2} - \frac{\sigma_{xн} - \sigma_{yн}}{2} \cos 2\gamma + \tau_k \sin 2\gamma \right), \quad (6)$$

где $\sigma_{yн}$ и $\sigma_{xн}$ – нормальные напряжения в точке b ; индекс «н» обозначает нижнюю контактирующую поверхность образца.

Дифференцируя уравнение (2) по α , получаем $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\tau_\alpha$. Подставляя в это уравнение критерий разрушения Кулона (1), имеем важное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha). \quad (7)$$

Действуя по аналогии, получим для нижнего треугольника $be's'$:

$$\frac{d\sigma_\gamma}{d\gamma} = -2(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma). \quad (8)$$

Каждое из уравнений (7) и (8) является уравнением состояния материала на ТМЭКН. Их решение сводится к интегрированию на ТМКЭН между точками a и b :

$$\int_a^b \frac{d\sigma_\alpha}{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha)} = -2 \int_a^b d\alpha \quad \text{или} \quad \ln(\tau_{ef} + \mu\sigma_\alpha) \Big|_a^b = -2\mu\alpha \Big|_a^b.$$

Полагаем, что условие разрушения материала $\tau_{ef} = k$ выполняется в точке a и достигается в треугольнике aes раньше, чем в треугольнике $be's'$. Следовательно,

$$\ln(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma) - \ln(k + \mu\sigma_\alpha) = -2\mu(\gamma - \alpha). \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) необходимо найти углы α и γ . Для нахождения угла α , при котором эффективное касательное напряжение будет иметь максимальное значение, приравняем производную $\frac{\partial \tau_{ef}}{\partial \alpha}$ нулю и получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1 + \mu \operatorname{tg} 2\beta}{\operatorname{tg} 2\beta - \mu},$$

где ρ – угол внутреннего трения материала; $\mu = \operatorname{tg} \rho$; $\operatorname{tg} 2\beta = 2\tau_k / (\sigma_{хв} + \sigma_{уб})$, β – угол поворота ТМЭКН от внешнего трения. Следовательно, $\alpha = \pi/4 + \rho/2 - \beta$ (рис. 1,б).

По аналогии найдем угол γ для нижнего треугольника $be's'$:

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{ctg}(2\theta - \rho),$$

где $\operatorname{tg} 2\theta = 2\tau_k / (\sigma_{хв} - \sigma_{уб})$, θ – угол поворота ТМЭКН от внешнего трения. Таким образом, $\gamma = \pi/4 + \rho/2 - \theta$ (рис. 1,б).

Из анализа выражений для углов β и θ следует, что $|\beta| < |\theta|$ и $\theta < 0$, так как $\sigma_{хн} < \sigma_{ун}$. Отсюда $\alpha < \gamma$, т.е. ТМЭКН является выпуклой кривой. Это означает, что учет касательных напряжений, вызванных контактным трением, приводит к уменьшению поверхности разрушения и, следовательно, к увеличению сопротивляемости материала.

Поскольку $(\gamma - \alpha) = \beta - \theta$, выражение (9) можно записать в виде

$$\frac{(\tau_{ef} + \mu\sigma_\gamma)}{(k + \mu\sigma_\alpha)} = \exp[2\mu(\theta - \beta)]. \quad (10)$$

Так как $\sigma_x = 0$ в точке a , из уравнений (2) и (4) следует, что в точке a

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_{уб}}{2}(1 + \cos 2\alpha) - \tau_k \sin 2\alpha; \quad (11)$$

$$\tau_{ef} = k = \frac{\sigma_{yB}}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha - \mu \left(\frac{\sigma_{yB}}{2} + \frac{\sigma_{yB}}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha \right). \quad (12)$$

При этом $\beta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\tau_k}{\sigma_{yB}}$ (σ_{yB} – напряжение сжатия, при котором происходит разрушение материала).

Из (12) находим

$$\sigma_{yB} = \frac{2k - 2\tau_k (\cos 2\alpha + \mu \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha - \mu(1 + \cos 2\alpha)}. \quad (13)$$

Подставив в (13) выражения для $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, получим уравнение

$$\sigma_{yB}^2 - 4k\mu\sigma_{yB} - 4 \left[k^2 - (1 + \mu^2) \tau_k^2 \right] = 0.$$

Найдем корни этого уравнения:

$$\sigma_{yB1,2} = 2k\mu \pm \sqrt{4k^2\mu^2 + 4 \left[k^2 - (1 + \mu^2) \tau_k^2 \right]}.$$

Выберем знак «+» перед корнем, так как со знаком «-» корень уравнения не имеет физического смысла.

Следовательно,

$$\sigma_{yB} = 2k\mu + 2\sqrt{(1 + \mu^2) \left(k^2 - \tau_k^2 \right)}. \quad (14)$$

Для треугольника $be's'$ найдем τ_{ef} из (6), проведя ряд преобразований:

$$\tau_{ef} = -\mu \frac{\sigma_{xH} + \sigma_{yH}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \mu^2) \left[(\sigma_{xH} - \sigma_{yH})^2 + 4\tau_k^2 \right]}. \quad (15)$$

Определим σ_{xH} в точке b из выражения (15). Опустив ряд громоздких алгебраических преобразований, получим

$$\sigma_{xH} = \sigma_{yH} + \frac{2(\tau_{ef} + \mu\sigma_{yH})}{\cos \rho} \left(\sin \rho - \sqrt{1 - b^2} \right), \quad (16)$$

где $b = \tau_k / (\tau_{ef} + \mu\sigma_{yH})$.

Найдем σ_γ в нижнем треугольнике $be's'$ из выражения (5) с учетом (16):

$$\sigma_\gamma = \sigma_{yH} \left(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b^2} \right) - \cos \rho \tau_{ef} \sqrt{1 - b^2}. \quad (17)$$

Подставляя σ_α и σ_γ из (11) и (17) в (10), с учетом (12) получим

$$b^2 \left[I^2 + (2\tau_k \sin \rho)^2 \right] - 4\tau_k b I + 4\tau_k^2 \cos^2 \rho = 0, \quad (18)$$

где $I = (2k + \mu\sigma_{yB} - \mu \sin \rho \sqrt{\sigma_{yB}^2 + 4\tau_k^2}) \exp 2\mu(\theta - \beta)$.

Уравнение (18) решается относительно b численным методом. Для каждого конкретного случая определяются значения $\sigma_{ув}$, $\sigma_{ун}$, τ_k и β , а значения ρ , μ и k берутся из таблиц свойств материалов и подставляются в уравнение (18). После вычисления b находятся τ_{ef} и θ . Знание этих величин позволяет полностью определить вид траектории разрушения материала и углы наклона касательных к ТМЭЖН.

Поскольку на горизонтальную поверхность образца действует жесткий штамп, воспользуемся распределением нагрузки под штампом, найденным из решения для контактной задачи теории упругости [4]. Реальный профиль штампа не имеет в сечении прямых углов, а имеет углы, закругленные с малым, но конечным радиусом. С учетом конечности величины кривизны закраин штампа распределение нагрузки в пластине единичной толщины d под штампом определяется выражением

$$\sigma_y(x) = \frac{2P \left[(\pi - 2\varphi_0) \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \ln \left| \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_0)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_0)} \right| \right]}{\pi a d (\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)} + \frac{2P \sin \varphi_0 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{(\varphi_1 + \varphi_0)}{2} \operatorname{tg} \frac{(\varphi_1 - \varphi_0)}{2} \right|}{\pi a d (\pi - 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)}, \quad (19)$$

где $\sin \varphi_1 = \frac{x}{a}$, $\sin \varphi_0 = \frac{a_1}{a}$, $a = a_1 + r$, r – радиус закраин штампа.

Для верхней поверхности в (19) подставляем $\sin \varphi_1 = \frac{x_B}{a}$, $x_B = a_1 - \delta$, где x_B – координата точки a , δ – малый параметр, значение которого задается при решении конкретной задачи. Значение координаты x_B определяется из равенства значений напряжения $\sigma_y(x)$, найденного по формуле (19), значению $\sigma_{ув}$, полученному из выражения (14). Для нижней поверхности $\sin \varphi_2 = \frac{x_H}{a}$, где x_H – координата точки b .

Подставляя в (18) $\sigma_{ув}$ и соответствующее ему $\sigma_{ун}$, определенное по формуле (19), можно найти τ_{ef} , характеризующее предельное состояние образца, и углы наклона касательной к ТМЭЖН α и γ .

В качестве примера было рассмотрено сжатие нагрузкой P между штампами образца из песчано-цементного материала (ПЦМ), у которого ширина $2a = 5,5$ см, высота $h = 5,5$ см, радиус закраин штампа $r = 0,2$ см, предельная сопротивляемость материала сдвигу $k = 1,575$ МПа. В силу симметрии нагружения и деформирования образца относительно его продольной оси рассматривалась только его левая половина, соответствующая условию $-a \leq x \leq 0$.

На рис. 2 представлена зависимость безразмерного разрушающего напряжения $\sigma^* = \sigma_{yB} / k$ от безразмерного касательного напряжения $\tau^* = \tau_k / k$.

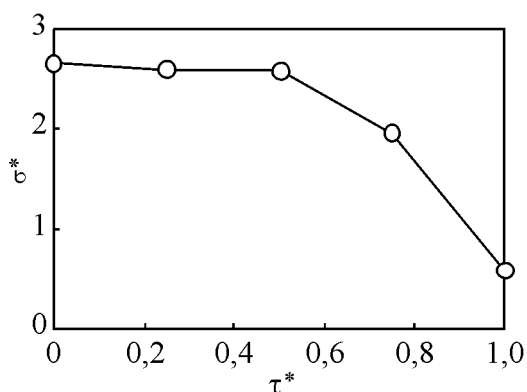


Рис. 2. Зависимость безразмерного разрушающего напряжения σ^* от безразмерного касательного напряжения τ^*

Зависимости координат x_B точки a и x_H точки b от безразмерного касательного напряжения τ^* при различных сжимающих нагрузках P приведены на рис. 3.

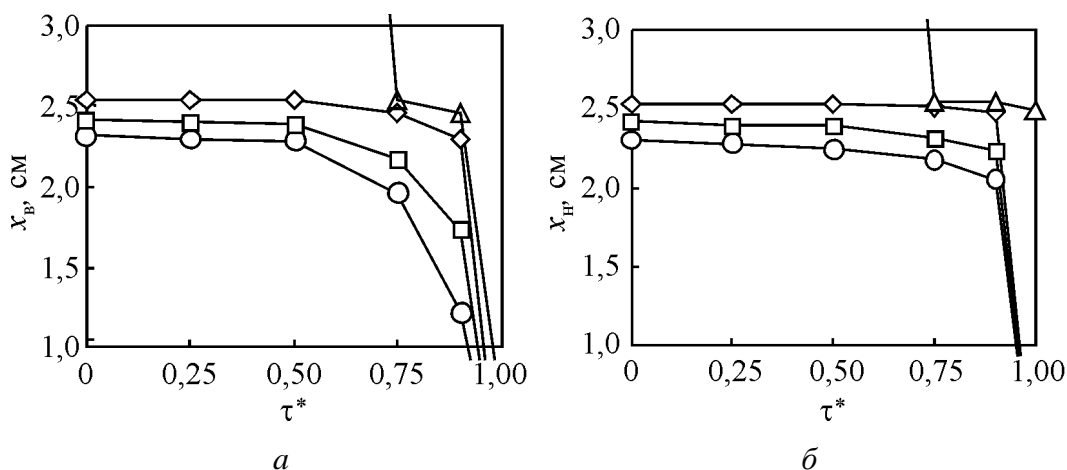


Рис. 3. Зависимости координат x_B точки a (а) и x_H точки b (б) от безразмерного касательного напряжения τ^* при различных сжимающих нагрузках P , кН: Δ – 7,5, \diamond – 10,0; \square – 15,0 и \circ – 17,5

Из рис. 3 следует, что увеличение нагрузки P приводит к снижению абсолютного значения координаты x_B точки a и координаты x_H точки b , т.е. точки a и b при этом удаляются от свободной боковой грани образца. Следовательно, ТМЭЖН будет располагаться дальше от боковой грани образца, что означает увеличение размера откалывающегося фрагмента образца. К этому же приводит и возрастание безразмерного касательного напряжения τ^* , что соответствует результатам экспериментального исследования зависимости разрушения образцов из ПЦМ от величины контактного трения

(рис. 4). При нагрузке $P = 7,5$ кН и $\tau^* < 0,75$, в отличие от остальных приведенных случаев, разрушение образца не происходит.

В результате проведенных исследований показана возможность расчета сжимающего напряжения, при котором происходит разрушение образца, установлены влияние прикладываемой нагрузки и касательного напряжения,

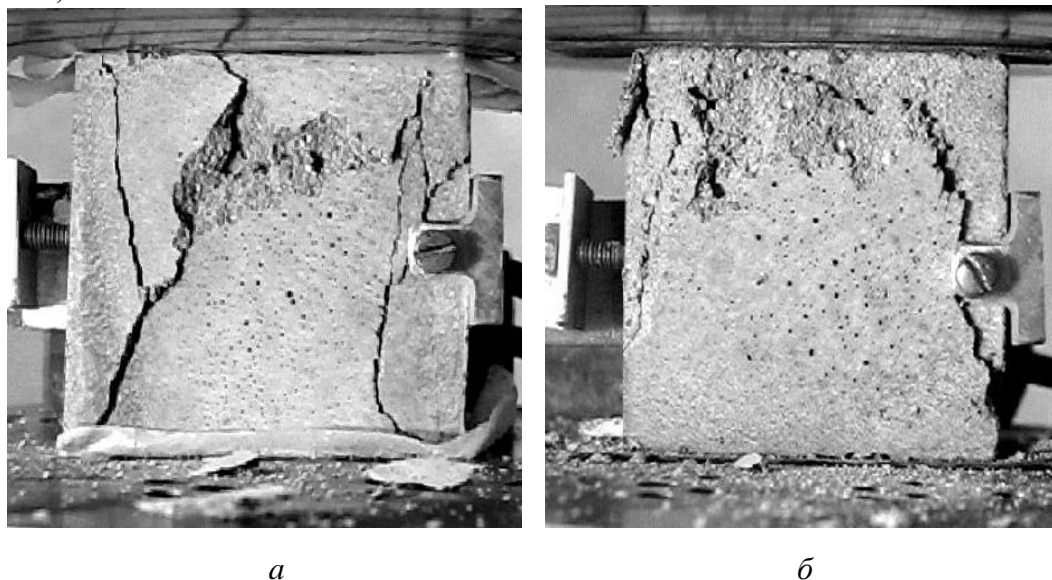


Рис. 4. Фотографии разрушенных образцов из ПЦМ при значениях коэффициента контактного трения $k_s = 0,02$ (*a*) и $k_s = 0,24$ (*б*)

обусловленного внешним трением, на процесс разрушения образца, расположение ТМЭКН и размер откалывающихся фрагментов образца.

1. Локшина Л.Я. Параметры предельного состояния образца горной породы при одноосном сжатии жесткими штампами / Л.Я. Локшина, Ю.А. Костандов // Физико-технические проблемы горного производства. – 2012. – №15. – С. 36–45.
2. Васильев Л.М. Метод расчёта предела прочности горных пород на одноосное сжатие при линейной связи между контактными напряжениями / Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев // Геотехническая механика: Межведомств. сб. науч. работ. – Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2003. – Вып. 42. – С. 73–80.
3. Локшина Л.Я. Исследование предельного состояния деформируемого тела с учетом внутреннего и внешнего трения / Л.Я. Локшина, Ю.А. Костандов // Современные проблемы механики сплошной среды: Междунар. науч. конф. 3–7 декабря 2011 г.: Труды конф. – Ростов-на-Дону: Южный федеральный ун-т, 2011. – С. 901–905.
4. Штаерман И.Я. Контактные задачи теории упругости / И.Я. Штаерман. – М.: Гостехиздат, 1949. – 272 с.

Л.Я. Локшина, Ю.А. Костандов

ПАРАМЕТРИ ГРАНИЧНОГО СТАНУ ЗРАЗКА ГІРСЬКОЇ ПОРОДИ ПРИ ОДНООСЬОВОМУ СТИСКУВАННІ ЖОРСТКИМИ ШТАМПАМИ З УРАХУВАННЯМ ВНУТРІШНЬОГО І ЗОВНІШНЬОГО ТЕРТЯ

Проведено дослідження напруженого стану зразка при його одноосьовому стискуванні між жорсткими штампами з урахуванням внутрішнього тертя матеріалу, контактної тертя на поверхні додатка навантаження та неоднорідності напружень стискування під штампом. Отримано рівняння стану матеріалу на траєкторії максимальних ефективних дотичних напружень (ТМЕДН). Отримано залежність руйнівної напруги від дотичних напружень, обумовлених зовнішнім тертям, і визначені координати точок пересічення ТМЕДН з поверхнями зразка, що контактують зі штампами. У якості критерію руйнування матеріалу використовується критерій Кулона. Встановлено залежність положення ТМЕДН від прикладеного навантаження. Проведено порівняння отриманих результатів з експериментальними даними.

Ключові слова: стискування, руйнування, напруження, жорсткий штамп, внутрішнє тертя, контактне тертя

L.Ya. Lokshyna, Yu.A. Kostandov

THE LIMITING STATE PARAMETERS OF ROCK SPECIMEN AT UNIAXIAL COMPRESSION BY RIGID STAMPS TAKING INTO ACCOUNT INTERNAL AND EXTERNAL FRICTION

Research of the specimen stressed state at its uniaxial compression between hard stamps taking into account the material internal friction, the contact friction on surfaces of the applied load and heterogeneity of tensions of compression under a stamp is executed. Obtained the equation of state of the material on the maximum effective tangential stresses trajectory (METST). Dependence the stress of fracture from the tangential stresses, conditioned by an external friction, and the coordinates of intersection points of METST with the surfaces of the specimen, which are in direct contact with the stamps, is obtained. As a criterion of the destruction material the Coulomb Fracture Criterion was used. The dependence of METST position from the applied load was set. The comparison of obtained results with the experimental data is executed.

Key words: compression, fracture, stress, rigid stamp, internal friction, contact friction