

УДК 534.2;681.883

**А.И. Гончар**, чл.-кор НАН Украины, д.т.н., с.н.с., директор,  
**И.Н. Титов**, зав. сектором, **Н.И. Титова**, инж.

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ГЕОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МЕТАНОСОДЕРЖАЩЕЙ ПОЛОСТЬЮ**

Научно-технический центр панорамных акустических систем НАН Украины,  
г. Запорожье (Украина)

В статье рассматриваются вопросы моделирования рассеяния продольных низкочастотных геоакустических волн в геологических средах с целью диагностики метаносодержащих полостей цилиндрической формы.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ, УГЛЕСОДЕРЖАЩАЯ СРЕДА, ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ МЕТАНОСОДЕРЖАЩАЯ ПОЛОСТЬ, УРАВНЕНИЕ ЛАМЕ

### **ВВЕДЕНИЕ**

Проблема выявления природных и техногенных полостей в массиве горных пород является актуальной вследствие возможности накопления в них метана. Для решения подобных задач используются традиционные методы электро-, магнито-, и гравиразведки [1]. Но в некоторых случаях применение таких методов усложняется наличием в массиве горных пород разного рода техногенных и так называемых геологических препятствий. Это могут быть электрические поля промышленного происхождения, насыпные грунты, слои разного литологического состава, зоны трещиноватости, обводненности [2]. В таких случаях применяют методы, основанные на изучении амплитудно-частотной характеристики полей упругих сил [3-5]. Поэтому задачи о расчете упругих полей геоакустических волн, рассеивающихся на полостях канонической (сфера, цилиндр) и неканонической (близкой к сферической и цилиндрической) формы вызывают большой научный и практический интерес.

Кроме того, актуальным является и вопрос выбора граничных условий на поверхностях метаносодержащих полостей, которые могут иметь как каноническую, так и неканоническую форму.

Поэтому целью работы было создание математической модели процесса распространения и рассеяния затухающих продольных низкочастотных ( $f = 0,1 \div 1000$  Гц) геоакустических волн для решения задачи прогнозирования зон наиболее вероятного скопления метана, а также выполнение расчетов в рамках предложенной модели для случая цилиндрической метаносодержащей полости.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Распространение и рассеяние затухающих упругих волн в геологической среде, содержащей достаточно длинную цилиндрическую выработку (когда возможно пренебречь влиянием концов выработки), описывается уравнением Ламе для радиального смещения частиц среды  $u(r, t)$  с учетом цилиндрической симметрии задачи (рис. 1):

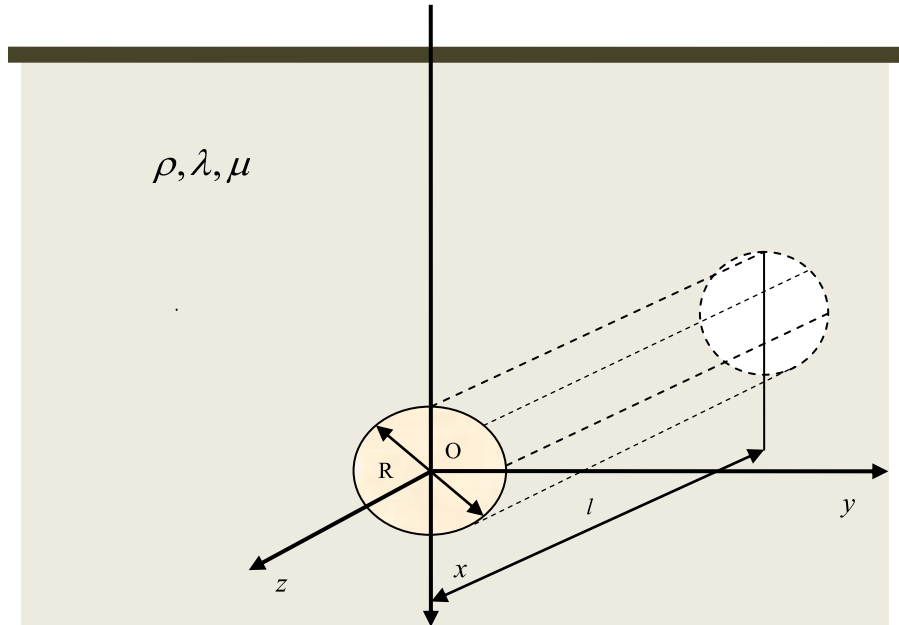


Рисунок 1 – Схематическое изображение цилиндрической полости в полупространстве

$$\rho \ddot{u} + \alpha \dot{u} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (1)$$

или

$$\ddot{u} + \beta \dot{u} = C_l^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + C_t^2 \frac{u}{r^2}, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность,

$\lambda, \mu$  – параметры Ламе углесодержащей среды,

$\alpha$  – коэффициент затухания,

$\beta = \alpha/\rho$  – приведенный коэффициент затухания,  $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,

$c_t = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорости упругих продольных и поперечных волн.

С учетом предыдущего напряженно-деформированного состояния среды начальные условия будут иметь вид:

$$\dot{u}|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0 \quad (3)$$

Поскольку на бесконечности упругие волны затухают, а на границе цилиндрической полости имеет место состояние механического равновесия, то в качестве граничных условий возьмем следующие соотношения:

$$u|_{r \rightarrow \infty} = 0; \sigma_{rr}|_{r=R} = -P'|_{r=R}, \quad (4)$$

где  $R$  – радиус сечения полости.

С учетом того, что давление метана и радиальная компонента тензора напряжений определяются выражениями:

$$P' = P - P_* = -3\gamma P_* \frac{u}{R},$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} + \lambda \frac{u}{r} \Big|_{r=R},$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты газа,

$P_*$  – статическое давление газа в полости, граничное условие на полости будет иметь вид:

$$\frac{3\gamma P_* - \lambda}{R} u|_{r=R} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (5)$$

Таким образом, решение задачи (2)-(4) определяет поля смещений частиц среды в упругой волне, рассеиваемой цилиндрической полостью.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Применим к уравнению (1) преобразование Лапласа. С учетом начальных условий (3) получим следующее уравнение:

$$\tilde{u}(r, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(r, t) dt,$$

тогда для левой части уравнения (2) будем иметь:

$$\ddot{u} + \beta \dot{u} = s^2 \tilde{u} + \beta s \tilde{u} - (s + \beta) u_0,$$

и уравнение Ламе примет вид:

$$r^2 \frac{d^2 \tilde{u}}{dr^2} + r \frac{d\tilde{u}}{dr} - \left[ 1 - \frac{C_t^2}{C_l^2} + \frac{s(s+\beta)}{C_l^2} r^2 \right] \tilde{u} = -\frac{(s+\beta)u_0}{C_l^2} r^2, \quad (6)$$

где  $\tilde{u}(r, s)$  – лаплас-образ функции  $u(r, t)$ ,

$s$  – параметр преобразования Лапласа.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\tilde{u}(r, s) = A(s) I_\nu \left( \frac{\sqrt{s(s+\beta)}}{C_l} r \right) + B(s) K_\nu \left( \frac{\sqrt{s(s+\beta)}}{C_l} r \right), \quad (7)$$

где  $\nu = \frac{1}{2} \sqrt{(1-1)^2 + 4 \left( 1 - \frac{C_t^2}{C_l^2} \right)} = \left( 1 - \frac{C_t^2}{C_l^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $I_\nu$  и  $K_\nu$  – модифицированные функции

Бесселя первого и второго рода порядка  $\nu$ ;

$\tilde{A}(s)$  и  $\tilde{B}(s)$  – произвольные постоянные, которые определяются с помощью граничных условий.

Поскольку аргумент модифицированных функций Бесселя, входящих в решение уравнения (6), мал, воспользуемся известными асимптотиками этих функций при малых значениях аргумента [6]:

$$I_\nu(x) \sim \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad (8)$$

$$K_\nu(x) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) (x/2)^{-\nu}.$$

Используя соотношения (5), (7), (8), получим асимптотическое выражение для изображения механического сдвига:

$$\tilde{u}(r, s) = \frac{\beta^2 u_0 r^2}{c_l^2 (4 - \nu^2)} \left[ \frac{3\gamma P_* - 3\lambda - 4\mu}{3\gamma P_* - 2\nu\mu - (\nu+1)\lambda} \left( \frac{r}{R} \right)^{\nu-2} - 1 \right] \frac{s}{(s+\beta)^2}. \quad (9)$$

Производя обратное преобразование Лапласа для выражения (9), получим:

$$u(r, t) = \frac{\beta^2 u_0 r^2}{c_l^2 (4 - \nu^2)} \left[ \frac{3\gamma P_* - 3\lambda - 4\mu}{3\gamma P_* - 2\nu\mu - (\nu+1)\lambda} \left( \frac{r}{R} \right)^{\nu-2} - 1 \right] (1 - \beta t) \exp(-\beta t).$$

Коэффициент затухания определяется соотношением:

$$\beta = \frac{\pi f}{Qc_l},$$

где  $Q$  – механическая добротность угленосной среды.

Если мы введем безразмерную радиальную координату  $x = r/R$ , для безразмерного смещения точек среды  $\bar{u}(x, t) = u(r, t)/u_0$  получим:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= \\ &= \frac{\beta^2 R^2 x^2}{c_l^2 (4 - \nu^2)} \left[ \frac{3\gamma P_* - 3\lambda - 4\mu}{3\gamma P_* - 2\nu\mu - (\nu + 1)\lambda} x^{\nu-2} - 1 \right] (1 - \beta t) \exp(-\beta t). \end{aligned} \quad (10)$$

Радиальная компонента тензора напряжений определяется выражением:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, t) &= \frac{\beta^2 u_0 r}{c_l^2 (4 - \nu^2)} (1 - \beta t) \exp(-\beta t) \times \\ &\times \left[ (3\lambda + 4\mu - 3\gamma P_*) \left( 1 + \frac{3\gamma P_*}{2\nu\mu + (\nu + 1)\lambda} \right) \left( \frac{r}{R} \right)^{\nu-2} - 3\lambda - 4\mu \right]. \end{aligned}$$

Для безразмерной радиальной компоненты тензора напряжений  $\bar{\sigma}_{rr}(x, t) = \sigma_{rr}(r, t)/\sigma_0$  (где  $\sigma_0 = \lambda u_0/R$ ) имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr}(x, t) &= \frac{2\beta^2 R^2 x}{c_l^2 (4 - \nu^2)} (1 - \beta t) \exp(-\beta t) \times \\ &\times \left[ \left( 3 + 4 \frac{\mu}{\lambda} \right) (x^{\nu-2} - 1) + \frac{3\gamma P_* (\lambda + 2\mu) (2 - \nu)}{(2\nu\mu + (\nu + 1)\lambda) \lambda} x^{\nu-2} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Расчеты безразмерных смещений точек среды и радиальной компоненты тензора напряжений производились при следующих значениях частоты  $f = 0,1-1000$  Гц, радиуса и длины полости  $R = 4$  м,  $l = 50$  м, параметров геологической среды  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_l = 2000$  м/с,  $c_t = 1000$  м/с,  $Q = 45$  и метана  $\gamma = 1,33$ ,  $P = 10^6$  Па. Результаты расчетов, проведенных с помощью формул (10) и (11), приведены на рис. 2-9.

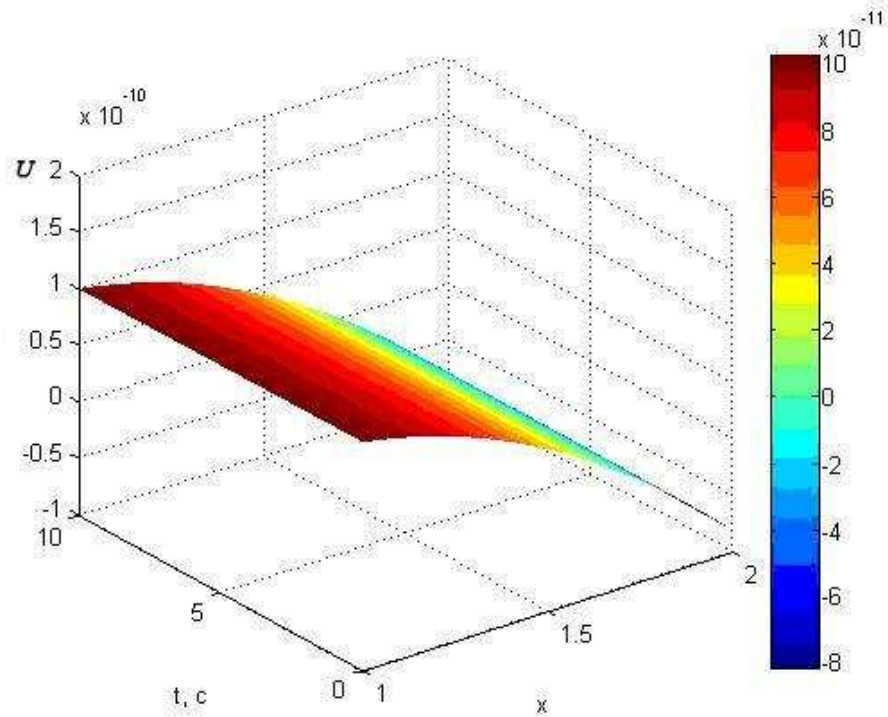


Рисунок 2 – Пространственно-временное распределение смещений частиц углесодержащей среды в окрестности цилиндрической полости

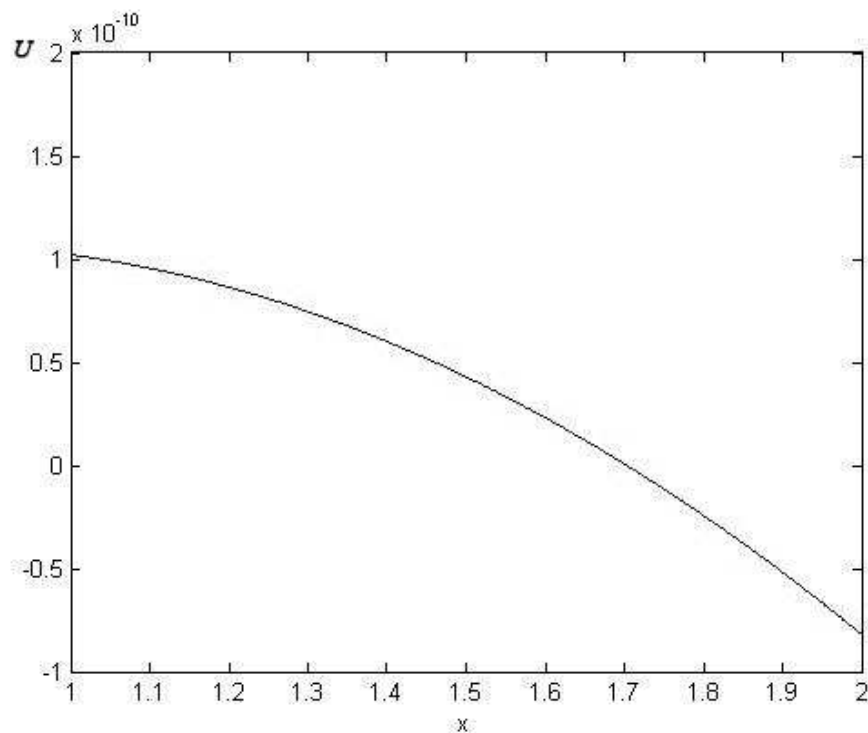


Рисунок 3 – Радиальное распределение смещений частиц углесодержащей среды в момент времени  $t = 1$ с в окрестности цилиндрической полости

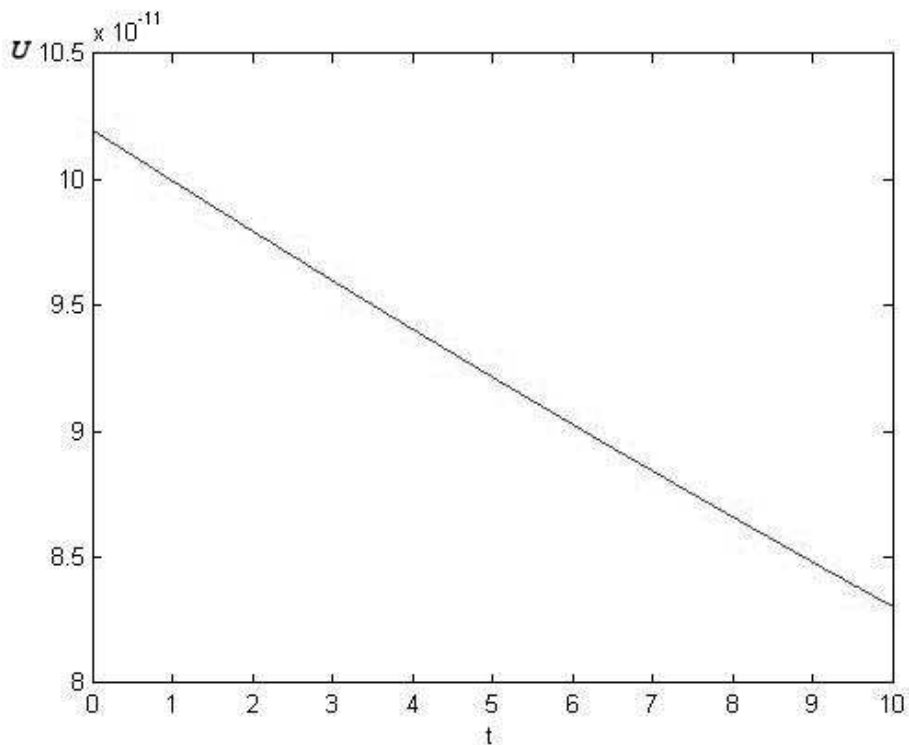


Рисунок 4 – Зависимость смещений частиц среды от времени на поверхности полости

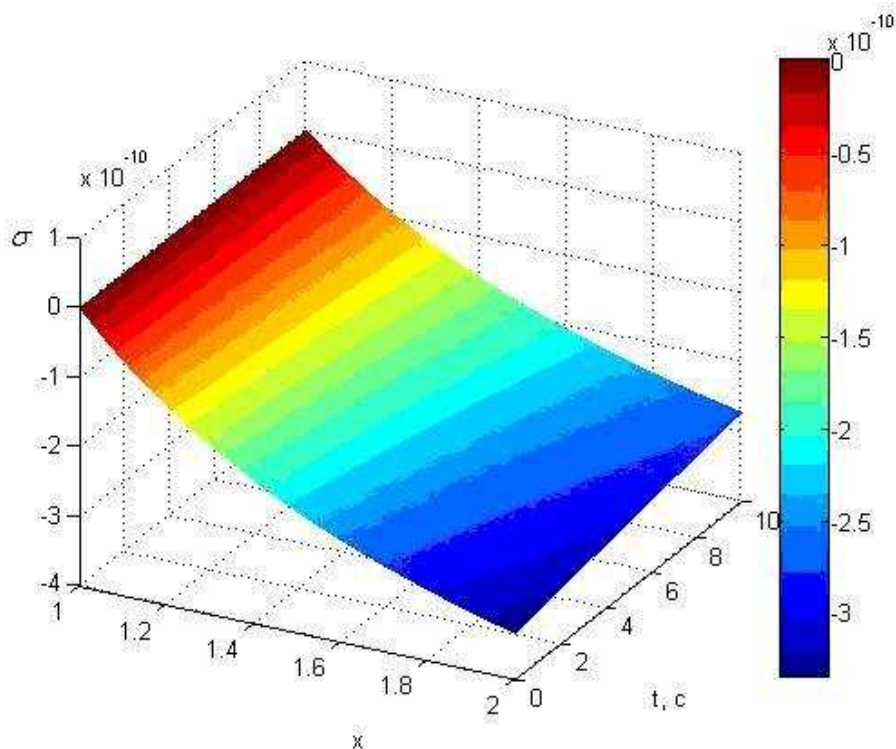


Рисунок 5 – Пространственно-временное распределение радиальной компоненты тензора напряжений в окрестности цилиндрической полости

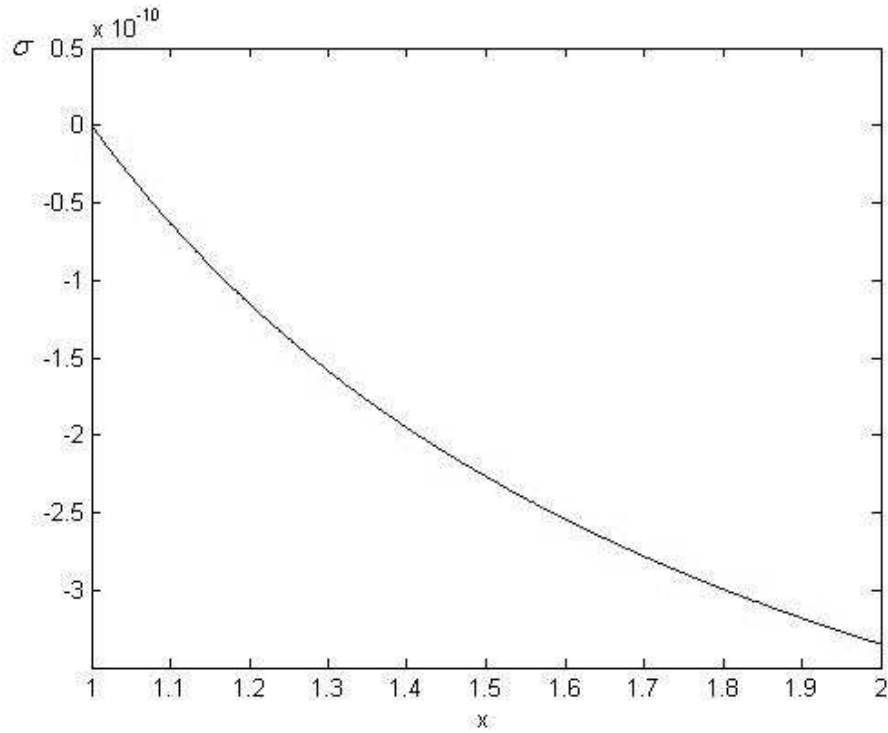


Рисунок 6 – Пространственное распределение радиальной компоненты тензора напряжений в момент времени  $t = 1c$  в окрестности цилиндрической полости

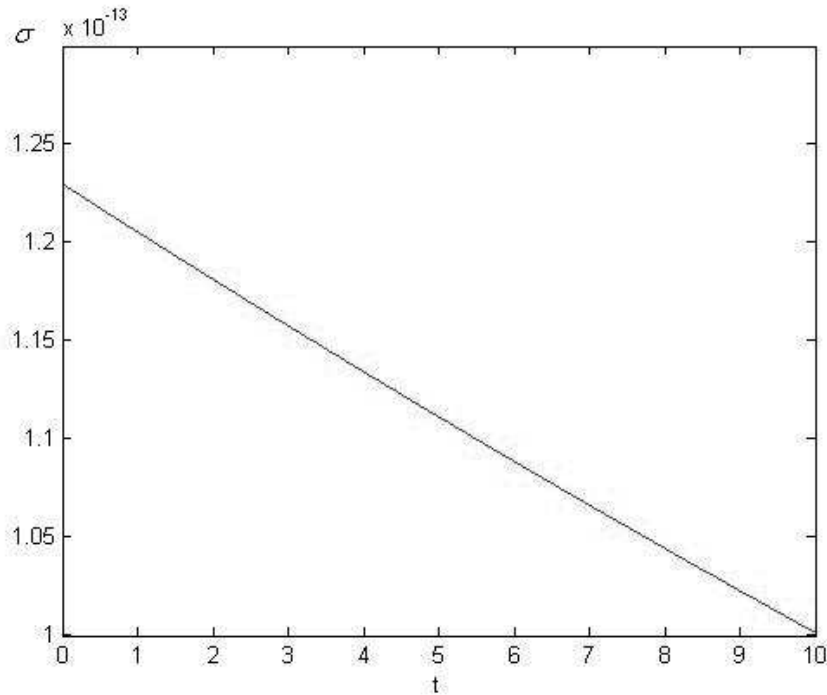


Рисунок 7 – Зависимость радиальной компоненты тензора напряжений от времени на поверхности полости



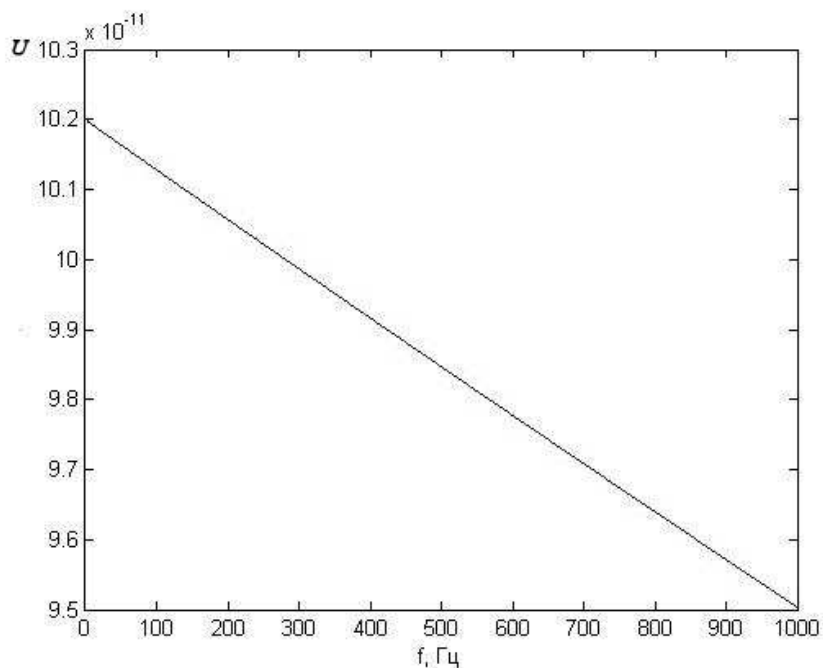


Рисунок 8 – Зависимость смещений частиц среды на границе полости и угленосной породы от частоты в момент времени  $t = 1с$

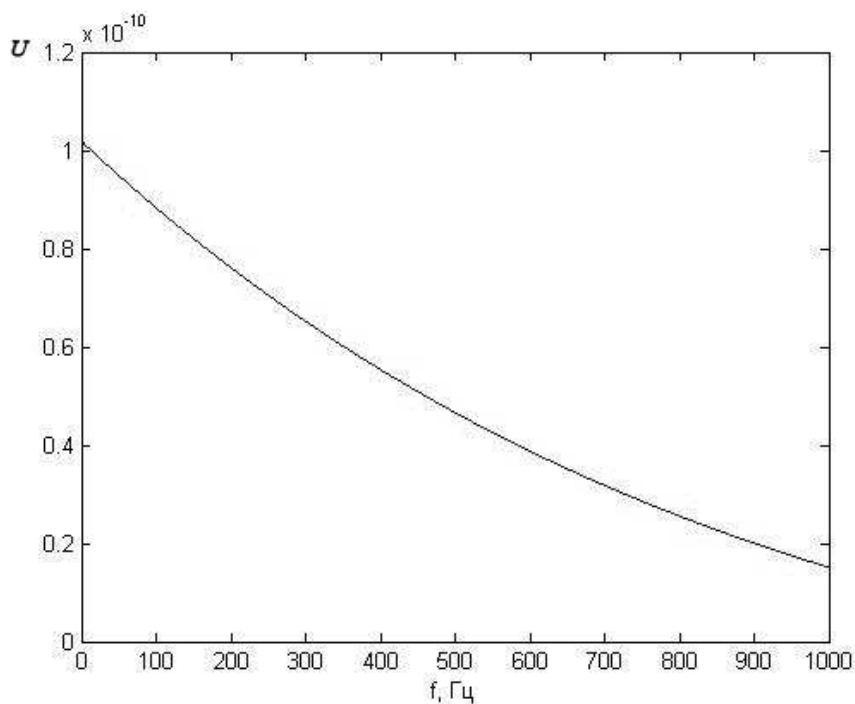


Рисунок 9 – Зависимость смещений частиц среды на границе полости и угленосной породы от частоты в момент времени  $t = 20с$

Результаты расчетов, приведенных на рисунках 2 и 3, свидетельствуют о том, что максимум смещений точек среды достигается на поверхности цилиндрической полости. Это позволяет говорить о практической целесообразности размещения сейсмодатчиков в непосредственной близости к поверхности цилиндрической полости с целью надежной

регистрации рассеянной волны. На рисунках 5 и 6 видно, что радиальная компонента тензора напряжений минимальна на поверхности полости и возрастает по абсолютной величине с увеличением расстояния, что является свидетельством существования только сжимающих напряжений в окрестности цилиндрической полости. Кроме того, смещения и радиальная компонента тензора напряжений уменьшаются со временем практически линейно вследствие затухания волнового процесса (рисунки 4, 7). В области частот  $f = 0,1 \div 1000$  Гц при времени  $t \sim 1c$  от начала распространения волны имеет место уменьшение радиальных смещений точек среды по линейному закону, которое достаточно быстро (уже при  $t \sim 20c$ ) сменяется уменьшением по экспоненциальному закону для частот  $f > 300$  Гц (рисунки 8, 9).

## ВЫВОДЫ

Предложена новая математическая модель рассеяния продольных затухающих низкочастотных ( $f = 0,1 \div 1000$  Гц) геоакустических волн на метаносодержащих полостях цилиндрической формы.

Максимум смещения точек среды находится на поверхности цилиндрической полости, поэтому в этой области пространства имеет смысл размещать приборы, регистрирующие смещения точек среды. Механические напряжения в окрестности цилиндрической полости являются сжимающими и уменьшаются по абсолютной величине практически до нуля у поверхности полости.

Физико-механические характеристики геоакустической волны, рассеянной на цилиндрической полости, уменьшаются со временем практически линейно вследствие наличия диссипации механической энергии.

В низкочастотном ( $f = 0,1 \div 1000$  Гц) случае радиальные смещения точек среды уменьшаются при малых временах распространения волны по линейному закону, а с увеличением времени на порядок – по экспоненциальному закону, причем изменение этого закона происходит от верхнего предела частотного интервала.

Зависимость характеристик рассеянной упругой волны от параметров газа ( $\gamma, P_*$ ), находящегося в полости, свидетельствуют о возможности идентификации метаносодержащих полостей геоакустическими методами.

## Литература

1. Лукинов В.В., Пимоненко Л.И. Тектоника метанугольных месторождений Донбасса. / В.В. Лукинов, Л.И. Пимоненко. – К.: Наук. думка, 2008. – 352 с.
2. Забигайло В.Е. Тектоника и горно-геологические условия разработки угольных месторождений Донбасса. / В.Е. Забигайло, В.В. Лукинов, Л.И. Пимоненко, Н.В. Сахневич. – К.: Наук. думка, 1994. – 152 с.
3. Анциферов А.В. Математическое моделирование в шахтной сейсморазведке / А.В. Анциферов, А.А. Глухов. – К.: Наукова думка, 2012. – 255 с.
4. Створення математичної моделі геологічного розрізу, що містить поклади метану. Звіт про НДР / НТЦ ПАС НАН України, Запоріжжя, 2011. – 68 с.
5. Математическое моделирование пространственной структуры геофизических сред и оценка возмущений акустических полей, обусловленных наличием локализованных структурных аномалий. Отчет о НИР / НТЦ ПАС НАН Украины, Запорожье, 2005. – 47 с.

6. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М., Стигана И.; пер. с англ. В.А. Диткин, Л.Н. Кармазина. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

*Стаття надійшла до редакції 08 листопада 2013 р. російською мовою*

**А.І. Гончар, І.М. Тітов, Н.І. Тітова**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗСІЮВАННЯ ПОЗДОВЖНИХ ГЕОАКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ  
ЦИЛІНДРИЧНОЮ МЕТАНОВМІСНОЮ ПОРОЖНИНОЮ**

В статті розглядаються питання моделювання розсіювання поздовжніх низькочастотних геоакустичних хвиль в геологічних середовищах з метою діагностики метановмісних порожнин циліндричної форми.

**A.I. Honchar, I.M. Titov, N.I. Titova**

**MATHEMATICAL SIMULATION OF LONGITUDINAL GEOACOUSTIC WAVE PROPAGATING BY  
CYLINDRIC METHANE-CONTAINING CAVITY**

The report suggests a mathematical model of scattering of P-wave patterns scattering in the geological environment with the purpose of diagnosis of cylindrical cavities containing methane.