

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПРУЖНИХ ЛАНОК ДВОЛАНКОВОГО МАНІПУЛЯТОРА

АНОТАЦІЯ. В роботі досліджені питання, пов'язані із впливом пружних характеристик ведучої та веденої ланок дволанкового маніпулятора, змодельованих у вигляді вертикально висячих стрижнів, з'єднаних між собою шарніром, на їхню динаміку. Одержано систему диференціальних рівнянь впливу прогинів стрижнів на їхні кінематичні та динамічні характеристики.

Ключові слова: маніпулятор, пружні ланки, пружні характеристики, стрижні, шарніри..

АННОТАЦИЯ. В работе исследованы вопросы, связанные с влиянием упругих характеристик ведущего и ведомого звеньев двухзвенного манипулятора, смоделированного в виде вертикально висящих стержней, соединенных шарниром друг с другом, на динамику звеньев. Получена система дифференциальных уравнений влияния прогибов стержней на их кинематические и динамические характеристики.

Ключевые слова: манипулятор, упругие звенья, упругие характеристики, стержни, шарниры.

SUMMARY. Influence of the elastic characteristics of driving and driven sections of two – section manipulator, which modeled as a vertical – hanging pivots, on the dynamics was investigated in this paper. Obtained the differential equations of influence of deflections of driving sections on kinematical and dynamical characteristics.

Keywords: manipulator, elastic characteristics, elastic sections, pivots, papers.

Вступ

В даній роботі викладена методика математичного моделювання динаміки пружного дволанкового маніпулятора, який керується зовнішніми моментами, на основі методики, запропонованої у [3].

Метою даної роботи є дослідження динаміки ведучої та веденої ланок дволанкового маніпулятора з урахуванням їхніх пружних податливостей.

Для постановки задачі про рух пружних ланок маніпулятора оберемо інерційну систему координат OXY , початок якої визначимо в точці підвісу ведучої ланки (рис.1). Введемо рухомі системи координат $O_1x_1y_1$ (її початок також розташуємо у точці підвісу, а отже, точка O_1 збігається з точкою підвісу системи O) та $O_2x_2y_2$. Вісь O_1x_1 збігається з напрямком осьової лінії ведучого (першого) стрижня, а вісь O_2x_2 – з напрямком осьової лінії другого стрижня. Початок координат системи $O_2x_2y_2$ помістимо в шарнірі O_2 , який з'єднує дві ланки. Прийmemo, що при обертанні ведучої ланки навколо точки O під дією керуючих моментів, пружних коливаннях його елементів, а

також при обертанні веденої ланки навколо точки з'єднання ланок осі O_1x_1 та O_2x_2 завжди збігаються з напрямком дотичних, побудованих до осевих ліній пружних стрижнів у їхніх початках.

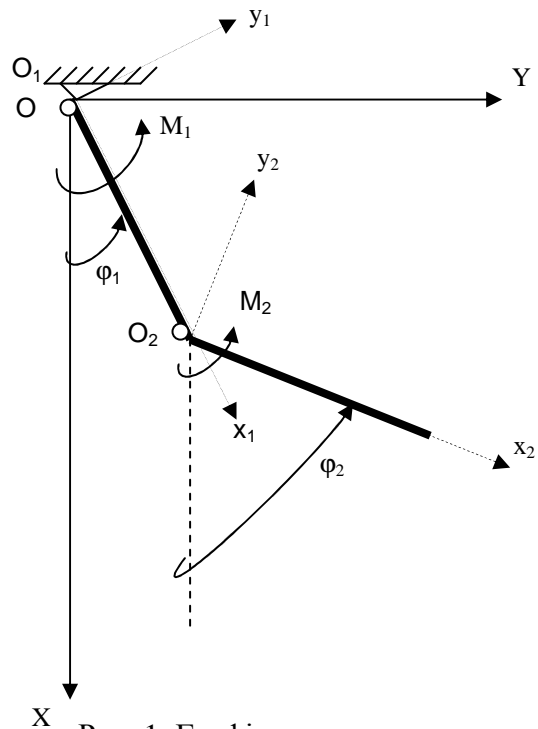


Рис. 1. Графічна модель пружного дволанкового маніпулятора

Прийmemo, що в точці O до ланки 1 прикладений керуючий момент $M_1 = M_{01}(1 - \cos kt)$, а в шарнірі O_2 до ланки 2 – керуючий момент $M_2 = M_{02}(1 - \cos kt)$, де k – циклічна частота обертання, і під час руху ланок під дією цих моментів система координат $O_1x_1y_1$ обертається з кутовою швидкістю ω_1 та прискоренням ε_1 , а система координат $O_2x_2y_2$ – з кутовою швидкістю ω_2 та прискоренням ε_2 . В поточному положенні кут повороту першої ланки позначимо φ_1 , а другої φ_2 . Тоді рівняння динамічної рівноваги системи можна представити у вигляді [4]:

$$\begin{aligned} EF_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \rho F_1 a_{x1} + q_{x1} &= 0, \\ -EJ_1 \frac{\partial^4 V_1}{\partial x_1^4} - \rho F_1 a_{y1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial V_1}{\partial x_1} T_1(x_1) \right] + \\ + q_{y1} &= 0, \\ EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \rho F_2 a_{x2} + q_{x2} &= 0, \\ -EJ_2 \frac{\partial^4 V_2}{\partial x_2^4} - \rho F_2 a_{y2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial V_2}{\partial x_2} T_2(x_2) \right] + \\ + q_{y2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де u_1, v_1, u_2, v_2 – компоненти векторів пружного зміщення стрижнів 1 та 2 відповідно вздовж осей $O_1x_1, O_1y_1, O_2x_2, O_2y_2$; F_1, F_2, J_1, J_2 – площі перерізів стрижнів 1 і 2 та їхні моменти інерції; ρ, E – щільність та модуль пружності матеріалу стрижнів; $a_{x1}, a_{x2}, a_{y1}, a_{y2}$ – відповідні компоненти вектора абсолютного прискорення; $q_{x1}, q_{x2}, q_{y1}, q_{y2}$ – компоненти вектора інтенсивності сил гравітації; $T_1(x_1)$ – внутрішня повздовжна сила в стрижні 1; $T_2(x_2)$ – внутрішня повздовжна сила в стрижні 2.

Оскільки всі елементи пружної ланки здійснюють складний рух, абсолютне прискорення представимо у вигляді формули Коріоліса [4, 5]:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \bar{a}_1^e + \bar{a}_1^r + \bar{a}_1^c, \\ \bar{a}_2 &= \bar{a}_2^e + \bar{a}_2^r + \bar{a}_2^c, \end{aligned} \quad (2)$$

де \bar{a}_1^e – пов'язане з обертанням системи координат $O_1x_1y_1$ переносне прискорення з компонентами

$$a_{x1}^e = -\omega_1^2 x_1, a_{y1}^e = \varepsilon_1 x_1, \quad (3)$$

\bar{a}_1^r – вектор відносного прискорення з компонентами

$$a_{x1}^r = \frac{d^2 u_1}{dt^2}, a_{y1}^r = \frac{d^2 v_1}{dt^2}, \quad (4)$$

\bar{a}_1^c – вектор прискорення Коріоліса, який в загальному випадку підраховується за формулою

$$\begin{aligned} \bar{a}_1^c &= 2\bar{\omega}_1 \times \left(\frac{du_1}{dt} \bar{i}_1 + \frac{dv_1}{dt} \bar{j}_1 \right), \\ \bar{a}_2^c &= 2\bar{\omega}_2 \times \left(\frac{du_2}{dt} \bar{i}_2 + \frac{dv_2}{dt} \bar{j}_2 \right). \end{aligned}$$

Оскільки компонента вектора відносного прискорення a_{x1}^r є набагато меншою за компоненту a_{y1}^r , то першою із зазначених компонент при розрахунках можна знехтувати.

Переносне прискорення \bar{a}_2^e , яке пов'язане з обертанням системи координат $O_2x_2y_2$, містить компоненти

$$a_{x2}^e = a_{x2}(O_2) - \omega_2^2 x_2, a_{y2}^e = a_{y2}(O_2) + \varepsilon_2 x_2. \quad (5)$$

В свою чергу, $a_{x2}(O_2)$ та $a_{y2}(O_2)$ є компонентами вектора $\bar{a}_2(O_2) = \bar{a}_1(l_1)$, тобто вектор абсолютного прискорення кінця першого стрижня збігається з вектором абсолютного прискорення початку другого стрижня.

Вектор $\bar{a}_1(l_1)$ містить компоненти:

$$\bar{a}_1(l_1) = \bar{a}_1^{об} + \bar{a}_1^{вс} + \bar{a}_1^{прд} + \bar{a}_1^{поп}, \quad (6)$$

де \vec{a}_1^{ob} – обертальне прискорення першого стрижня, яке виражається співвідношенням:

$$\vec{a}_1^{ob} = \varepsilon_1 l_1 \vec{j}_1, \quad (7)$$

\vec{a}_1^{bc} – вісеспрямовуюче прискорення, яке виражається співвідношенням

$$\vec{a}_1^{bc} = -\omega_1^2 l_1 \vec{i}_1, \quad (8)$$

\vec{a}_1^{prd} – повздовжнє прискорення, яким можна знехтувати через його малу величину:

$$\vec{a}_1^{prd} = \ddot{u}_1 \vec{i}_1, \quad (9)$$

\vec{a}_1^{pop} – поперечне прискорення

$$\vec{a}_1^{pop} = \ddot{v}_1 \vec{i}_1, \quad (10)$$

Проектуючи компоненти вектора $\vec{a}_1(l_1)$ на вісі $O_1 x_1, O_1 y_1$, одержимо

$$a_{x_1} = -\omega_1^2 l_1, a_{y_1} = \varepsilon_1 l_1 + \ddot{v}_1. \quad (11)$$

Виразивши проекції вектора $\vec{a}_1(l_1) = \vec{a}_2(O_2)$ на координатні вісі $O_2 x_2, O_2 y_2$ через його проекції на вісі $O_1 x_1, O_1 y_1$, одержимо

$$\begin{aligned} a_{x_2}(O_2) &= a_{x_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + a_{y_1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ a_{y_2}(O_2) &= -a_{x_1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + a_{y_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (12)$$

Після підстановки (11) до (12) одержимо

$$\begin{aligned} a_{x_2}(O_2) &= -\omega_1^2 l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \\ &+ (\varepsilon_1 l_1 + \ddot{v}_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1); \\ a_{y_2}(O_2) &= \omega_1^2 l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \\ &+ (\varepsilon_1 l_1 + \ddot{v}_1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (13)$$

Вектор \vec{a}_2^r – це вектор відносного прискорення з компонентами:

$$a_{x_2}^r = \frac{d^2 u_2}{dt^2}, a_{y_2}^r = \frac{d^2 v_2}{dt^2}. \quad (14)$$

Компонентою $a_{x_2}^r$ також нехтуємо через її малу величину.

Компоненти $q_{x_1}, q_{x_2}, q_{y_1}, q_{y_2}$ вектора інтенсивності сил гравітації підраховуються таким чином:

$$\begin{aligned} q_{x_1} &= \rho F_1 g \cos \varphi_1, q_{y_1} = -\rho F_1 g \sin \varphi_1; \\ q_{x_2} &= \rho F_2 g \cos \varphi_2, q_{y_2} = -\rho F_2 g \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Для постановки задачі, що розглядається, граничні умови прийнемо у такому вигляді:

1 – й стрижень:

при $x_1 = 0$

$$u_1 = 0;$$

$$V_1 = 0;$$

$$\frac{dV_1}{dx_1} = 0;$$

$$M_1(0) = EJ_1 \frac{d^2 V_1}{dx_1^2} = -M_{01};$$

при $x_1 = l_1$ (умова стикування)

$$T_1(l_1) = T_2(0) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + Q_2(0) \sin(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$Q_1(l_1) = -T_2(0) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + Q_2(0) \cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$M_1(l_1) = -M_2(0).$$

(17)

2 – й стрижень:

при $x_2 = 0$

$$u_2 = 0;$$

$$V_2 = 0;$$

$$\frac{dV_2}{dx_2} = 0;$$

$$M_2(0) = EJ_2 \frac{d^2 V_2}{dx_2^2} = -M_{02};$$

при $x_2 = l_2$

$$T_2(l_2) = 0,$$

$$Q_2(l_2) = 0,$$

$$M_2(l_2) = 0.$$

(19)

У подальшому, враховуючи, що в реальних робототехнічних системах вектор $\vec{\omega}$ є невеликим, прискореннями Коріоліса \vec{a}_1^c та \vec{a}_2^c будемо нехтувати.

Підставляючи (2) – (15) до (1), одержимо:

$$\begin{aligned}
 EF_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \rho F_1 \omega_1^2 x_1 + \rho F_1 g \cos \varphi_1 &= 0, \\
 EJ_1 \frac{\partial^4 V_1}{\partial x_1^4} + \rho F_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} + \rho F_1 \varepsilon_1 x_1 - EF_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} - \\
 - EF_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \rho F_1 g \sin \varphi_1 &= 0,
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \rho F_2 \omega_1^2 l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \rho F_2 \omega_2^2 x_2 - \\
 - \rho F_2 \varepsilon_1 l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \rho F_2 \ddot{v}_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \\
 + \rho F_2 g \cos \varphi_2 &= 0, \\
 EJ_2 \frac{\partial^4 V_2}{\partial x_2^4} + \rho F_2 \omega_1^2 l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \\
 + \rho F_2 \varepsilon_1 l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \rho F_2 \varepsilon_2 x_2 + \\
 + \rho F_2 \ddot{v}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \rho F_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} - \\
 - EF_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} - EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \rho F_2 g \sin \varphi_2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Для інтегрування рівнянь (20) за часом скористаємось неявною різницевою схемою (метод Хуболта), згідно якої другі похідні за часом при $t = t_{n+1}$ замінимо їхніми скінченнорізницевами аналогами у формі:

$$\begin{aligned}
 \ddot{v}_1 &= \frac{1}{\Delta t^2} [2v_{1,n+1}(x_1) - 5v_{1,n}(x_1) + \\
 &+ 4v_{1,n-1}(x_1) - v_{1,n-2}(x_1)]l, \\
 \ddot{v}_2 &= \frac{1}{\Delta t^2} [2V_{2,n+1}(x_2) - 5V_{2,n}(x_2) + \\
 &+ 4V_{2,n-1}(x_2) - V_{2,n-2}(x_2)]l,
 \end{aligned} \tag{21}$$

де $v_{1,n+1} = v_1(t_{n+1}), v_{2,n+1} = v_2(t_{n+1}), \Delta t = t_{n+1} - t_n$.

Застосовуючи кроковий метод, за допомогою (21) з системи рівнянь з частковими похідними (20) одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь на кроці $n + 1$:

$$\begin{aligned}
 EF_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \Big|_{t+1} + \rho F_1 \omega_1^2 \Big|_{t+1} x_1 + \rho F_1 g \cos \varphi_1 \Big|_{t+1} &= 0; \\
 EJ_1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x_1^4} \Big|_{t+1} + \frac{\rho F_1}{\Delta t^2} (2v_1|_{t+1} - 5v_1|_t + 4v_1|_{t-1} - v_1|_{t-2}) + \\
 + \rho F_1 \varepsilon_1 \Big|_{t+1} x_1 - EF_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_t \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \Big|_{t+1} - EF_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \Big|_t \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Big|_{t+1} + \\
 + \rho F_1 g \sin \varphi_1 \Big|_{t+1} &= 0; \\
 EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} + \rho F_2 \omega_1^2 \Big|_{t+1} l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} + \rho F_2 \omega_2^2 \Big|_{t+1} x_2 - \\
 - \rho F_2 \varepsilon_1 \Big|_{t+1} l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} - \frac{\rho F_2}{\Delta t^2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} \times \\
 \times [2v_1(l_1) \Big|_{t+1} - 5v_1(l_1) \Big|_t + 4v_1(l_1) \Big|_{t-1} - v_1(l_1) \Big|_{t-2}] + \\
 + \rho F_2 g \cos \varphi_2 \Big|_{t+1} &= 0;
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 EJ_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x_2^4} \Big|_{t+1} + \rho F_2 \omega_1^2 \Big|_{t+1} l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} + \\
 + \rho F_2 \varepsilon_1 \Big|_{t+1} l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} + \frac{\rho F_2}{\Delta t^2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} \times \\
 \times [2v_1(l_1) \Big|_{t+1} - 5v_1(l_1) \Big|_t + 4v_1(l_1) \Big|_{t-1} - v_1(l_1) \Big|_{t-2}] + \\
 + \rho F_2 \varepsilon_2 \Big|_{t+1} x_2 + \frac{\rho F_2}{\Delta t^2} [2v_2|_{t+1} - 5v_2|_t + 4v_2|_{t-1} - v_2|_{t-2}] - \\
 - EF_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_t \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} - EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_t \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Big|_{t+1} + \rho F_2 g \sin \varphi_2 \Big|_{t+1} &= 0.
 \end{aligned}$$

Припустимо, що функції u_1, u_2, v_1 та v_2 в моменти часу $t = t_n, t_{n-1}, t_{n-2}$ відомі. Тоді розв'язок системи (22) може бути знайдений з неоднорідної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$EF_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \Big|_{t+1} = -\rho F_1 \omega_1^2 \Big|_{t+1} x_1 - \rho F_1 g \cos \varphi_1 \Big|_{t+1}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 EJ_1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x_1^4} \Big|_{t+1} + \frac{2\rho F_1}{\Delta t^2} v_1 \Big|_{t+1} + \rho F_1 \varepsilon_1 \Big|_{t+1} - \\
 - EF_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_t \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \Big|_{t+1} - EF_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \Big|_t \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Big|_{t+1} = \\
 = -\frac{\rho F_1}{\Delta t^2} (-5v_1|_t + 4v_1|_{t-1} - v_1|_{t-2}) - \rho F_1 g \sin \varphi_1 \Big|_{t+1},
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 & EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} - \rho F_2 \varepsilon_1 \Big|_{t+1} l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} - \\
 & - \frac{2\rho F_2}{\Delta t^2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} \times \\
 & \times \left[v_1^1(l_1) \Big|_{t+1} C_3 + v_1^{\varepsilon_1}(l_1) \Big|_{t+1} \varepsilon_1 \Big|_{t+1} \right] = \\
 & = -\rho F_2 \omega_1^2 \Big|_{t+1} l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} - \rho F_2 \omega_2^2 \Big|_{t+1} x_2 + \\
 & + \left[2v_1^f(l_1) \Big|_{t+1} - 5v_1(l_1) \Big|_t + 4v_1(l_1) \Big|_{t-1} - v_1(l_1) \Big|_{t-2} \right] \times \\
 & \times \frac{\rho F_2}{\Delta t^2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} - \rho F_2 g \cos \varphi_2 \Big|_{t+1},
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 & EJ_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x_2^4} \Big|_{t+1} + \rho F_2 \varepsilon_1 \Big|_{t+1} l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} - \\
 & - \frac{2\rho F_2}{\Delta t^2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} \left[v_1^1(l_1) \Big|_{t+1} C_3 + v_1^{\varepsilon_1}(l_1) \Big|_{t+1} \varepsilon_1 \Big|_{t+1} \right] + \\
 & + \rho F_2 \varepsilon_2 \Big|_{t+1} x_2 + \frac{2\rho F_2}{\Delta t^2} v_2 \Big|_{t+1} - EF_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_t \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} - \\
 & - EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_t \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Big|_{t+1} = -\rho F_2 \omega_1^2 \Big|_{t+1} l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} - \\
 & - \frac{\rho F_2}{\Delta t^2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} \left[2v_1^f(l_1) \Big|_{t+1} - 5v_1(l_1) \Big|_t + \right. \\
 & \left. + 4v_1(l_1) \Big|_{t-1} - v_1(l_1) \Big|_{t-2} \right] - \\
 & - \frac{\rho F_2}{\Delta t^2} (-5v_2 \Big|_t + 4v_2 \Big|_{t-1} - v_2 \Big|_{t-2}) - \rho F_2 g \sin \varphi_2 \Big|_{t+1}
 \end{aligned} \tag{26}$$

за крайових умов (16) – (19), записаних також в момент часу $t = t_{n+1}$.

Відзначимо, що, незважаючи на те, що порядок системи (23) – (26) дорівнює дванадцяти, при кількості крайових умов (16) – (19), яка дорівнює чотирнадцяти, крайова задача, що розглядається, для системи (16) – (19), (23) – (26) виявляється поставленою коректно, оскільки в рівняннях (23) – (26) невідомими величинами, окрім $u_1(x_1), v_1(x_1), u_2(x_2)$ та $v_2(x_2)$, є також кутові прискорення ε_1 та ε_2 . При цьому $\varphi_1, \omega_1, \varphi_2$ та ω_2 вважаються відомими, спосіб їх визначення на кожному кроці буде описаний нижче.

Розв'язок системи (16) – (19), (23) – (26) будемо за допомогою методу початкових параметрів. Для цього $u_{1,n+1}(x_1), v_{1,n+1}(x_1), u_{2,n+1}(x_2), v_{2,n+1}(x_2)$ при $t = t_{n+1}$ представимо у вигляді лінійної комбінації

$$u_1(x_1) = u_1^1(x_1)C_1 + u_1^f(x_1), \tag{27}$$

$$v_1(x_1) = v_1^1(x_1)C_3 + v_1^{\varepsilon_1}(x_1)\varepsilon_1 + v_1^f(x_1), \tag{28}$$

$$u_2(x_2) = u_2^1(x_2)C_4 + u_2^3(x_2)C_3 + u_2^{\varepsilon_1}(x_2)\varepsilon_1 + u_2^f(x_2), \tag{29}$$

$$v_2(x_2) = v_2^1(x_2)C_6 + v_2^3(x_2)C_3 + v_2^{\varepsilon_1}(x_2)\varepsilon_1 + v_2^{\varepsilon_2}(x_2)\varepsilon_2 + v_2^f(x_2), \tag{30}$$

опускаючи при цьому індекси $n+1$.

Тут до числа невідомих величин включені

$$C_1 = \frac{du_1(0)}{dx_1} \Big|_{t+1}, C_3 = \frac{d^3 v_1(0)}{dx_1^3} \Big|_{t+1}, C_4 = \frac{du_2(0)}{dx_2} \Big|_{t+1}, C_6 = \frac{d^3 v_2(0)}{dx_2^3} \Big|_{t+1}, \varepsilon_1 \Big|_{t+1} \text{ та } \varepsilon_2 \Big|_{t+1}.$$

За таким підходом рівняння системи пов'язані між собою. Тому визначаємо функції $u_1(x_1), v_1(x_1), u_2(x_2), v_2(x_2)$ у вигляді (27) – (30). Для цього, застосовуючи чисельний метод Рунге – Кутта, будемо функцію $u_1^1(x_1)$ як розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння, яке відповідає рівнянню (23), за початкових умов

$$u_1^1 = 0, \frac{du_1^1(0)}{dx_1} = 1. \tag{31}$$

Функція $u_1^f(x_1)$ визначається розв'язком задачі Коші для рівняння (23) за однорідних початкових умов

$$u_1^f = 0, \frac{du_1^f(0)}{dx_1} = 0. \tag{32}$$

Тепер будемо інші функції. Спочатку підставляємо до рівняння (24) підраховані на попередньому кроці змінні коефіцієнти $\frac{\partial u_1(x_1)}{\partial x_1} \Big|_t, \frac{\partial^2 u_1(x_1)}{\partial x_1^2} \Big|_t$. Після цього за допомогою чисельного інтегрування будемо функцію $v_1^1(x_1)$ як розв'язок рівняння (24) за початкових умов

$$v_1^1(0) = 0, \frac{dv_1^1(0)}{dx_1} = 0, \frac{d^2 v_1^1(0)}{dx_1^2} = 0, \frac{d^3 v_1^1(0)}{dx_1^3} = 1. \tag{33}$$

Для визначення функції $v_1^{\varepsilon_1}(x_1)$ формуємо, виходячи з (24), рівняння

$$EJ_1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x_1^4} \Big|_{t+1} + \frac{2\rho F_1}{\Delta t^2} v_1 \Big|_{t+1} - EF_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_t \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \Big|_{t+1} -$$

$$- EF_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \Big|_t \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Big|_{t+1} = -\rho F_1 x_1, \quad (34)$$

яке розв'язуємо за однорідних початкових умов

$$v_1^{\varepsilon_1}(0) = 0, \frac{dv_1^{\varepsilon_1}(0)}{dx_1} = 0, \frac{d^2 v_1^{\varepsilon_1}(0)}{dx_1^2} = 0, \frac{d^3 v_1^{\varepsilon_1}(0)}{dx_1^3} = 0. \quad (35)$$

Функція $v_1^f(x_1)$ являє собою розв'язок неоднорідного рівняння

$$EJ_1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x_1^4} \Big|_{t+1} + \frac{2\rho F_1}{\Delta t^2} v_1 \Big|_{t+1} -$$

$$- EF_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_t \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \Big|_{t+1} - EF_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \Big|_t \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Big|_{t+1} =$$

$$= -\frac{\rho F_1}{\Delta t^2} (-5v_1 \Big|_t + 4v_1 \Big|_{t-1} - v_1 \Big|_{t-2}) - \rho F_1 g \sin \varphi_1 \Big|_{t+1} \quad (36)$$

з початковими умовами

$$v_1^f(0) = 0, \frac{dv_1^f(0)}{dx_1} = 0, \frac{d^2 v_1^f(0)}{dx_1^2} = -\frac{M_1}{EJ_1},$$

$$\frac{d^3 v_1^f(0)}{dx_1^3} = 0. \quad (37)$$

Далі визначаємо функції $u_2(x_2)$ та $v_2(x_2)$. Для визначення функції $u_2(x_2)$, застосовуючи чисельний метод Рунге – Кутта, будуємо функцію $u_2^1(x_2)$ як розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння, яке відповідає рівнянню (25), за початкових умов

$$u_2^1 = 0, \frac{du_2^1(0)}{dx_2} = 1. \quad (38)$$

До рівняння (25) входять також невідомі константи C_3 та ε_1 , які визначаються в рівнянні (24). Визначаємо C_3 також з рівняння (25), для чого, виходячи з нього, складаємо рівняння

$$EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} = \frac{2\rho F_2}{\Delta t^2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} v_1^1(l_1) \Big|_{t+1}, \quad (39)$$

яке розв'язуємо за однорідних початкових умов

$$u_2^3 = 0, \frac{du_2^3(0)}{dx_2} = 0. \quad (40)$$

Для визначення функції $u_2^{\varepsilon_1}(x_2)$, виходячи з (25), складаємо рівняння

$$EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} = \rho F_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} \left(l_1 + \frac{2}{\Delta t^2} v_1^{\varepsilon_1}(l_1) \Big|_{t+1} \right), \quad (41)$$

яке розв'язуємо за однорідних початкових умов

$$u_2^{\varepsilon_1} = 0, \frac{du_2^{\varepsilon_1}(0)}{dx_2} = 0. \quad (42)$$

Функція $u_2^f(x_2)$ є розв'язком неоднорідного рівняння

$$EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} = -\rho F_2 \omega_1^2 \Big|_{t+1} l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} -$$

$$- \rho F_2 \omega_2^2 \Big|_{t+1} + \frac{\rho F_2}{\Delta t^2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} \times$$

$$\times \left[2v_1^f(l_1) \Big|_{t+1} - 5v_1(l_1) \Big|_t + 4v_1(l_1) \Big|_{t-1} - v_1(l_1) \Big|_{t-2} \right] -$$

$$- \rho F_2 g \cos \varphi_2 \Big|_{t+1} \quad (43)$$

з однорідними початковими умовами

$$u_2^f = 0, \frac{du_2^f(0)}{dx_2} = 0. \quad (44)$$

Аналогічно складаємо функції $v_2(x_2)$. Спочатку за допомогою чисельного інтегрування будуємо функцію $v_2^1(x_2)$ як розв'язок рівняння (26) за початкових умов

$$v_2^1(0) = 0, \frac{dv_2^1(0)}{dx_2} = 0, \frac{d^2 v_2^1(0)}{dx_2^2} = 0, \frac{d^3 v_2^1(0)}{dx_2^3} = 1. \quad (45)$$

Для визначення функції $v_2^3(x_2)$, виходячи з (26), складаємо рівняння

$$EJ_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x_2^4} \Big|_{t+1} + \frac{2\rho F_2}{\Delta t^2} v_2 \Big|_{t+1} - EF_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_t \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} -$$

$$- EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_t \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Big|_{t+1} = - \frac{2\rho F_2}{\Delta t^2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} v_1^1(l_1) \Big|_{t+1}, \quad (46)$$

яке розв'язуємо за однорідних початкових умов

$$v_2^3(0) = 0, \frac{dv_2^3(0)}{dx_2} = 0, \frac{d^2 v_2^3(0)}{dx_2^2} = 0, \frac{d^3 v_2^3(0)}{dx_2^3} = 0. \quad (47)$$

Функція $v_2^{\varepsilon_1}(x_2)$ є розв'язком рівняння, яке виходить з (26)

$$EJ_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x_2^4} \Big|_{t+1} + \frac{2\rho F_2}{\Delta t^2} v_2 \Big|_{t+1} - EF_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_t \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} -$$

$$- EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_t \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Big|_{t+1} =$$

$$= -\rho F_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} \left(l_1 + \frac{2}{\Delta t^2} v_1^{\varepsilon_1}(l_1) \Big|_{t+1} \right) \quad (48)$$

за однорідних початкових умов

$$v_2^{\varepsilon_1}(0) = 0, \frac{dv_2^{\varepsilon_1}(0)}{dx_2} = 0, \frac{d^2 v_2^{\varepsilon_1}(0)}{dx_2^2} = 0, \frac{d^3 v_2^{\varepsilon_1}(0)}{dx_2^3} = 0. \quad (49)$$

Для визначення функції $v_2^{\varepsilon_2}(x_2)$, виходячи з (26), складаємо рівняння

$$EJ_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x_2^4} \Big|_{t+1} + \frac{2\rho F_2}{\Delta t^2} v_2 \Big|_{t+1} - EF_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_t \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} -$$

$$- EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_t \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Big|_{t+1} = -\rho F_2 x_2, \quad (50)$$

яке розв'язуємо за однорідних початкових умов

$$v_2^{\varepsilon_2}(0) = 0, \frac{dv_2^{\varepsilon_2}(0)}{dx_2} = 0, \frac{d^2 v_2^{\varepsilon_2}(0)}{dx_2^2} = 0, \frac{d^3 v_2^{\varepsilon_2}(0)}{dx_2^3} = 0. \quad (51)$$

Нарешті, функція $v_2^f(x_2)$ являє собою розв'язок неоднорідного рівняння

$$EJ_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x_2^4} \Big|_{t+1} + \frac{2\rho F_2}{\Delta t^2} v_2 \Big|_{t+1} - EF_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_t \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \Big|_{t+1} -$$

$$- EF_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \Big|_t \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Big|_{t+1} = - \frac{\rho F_2}{\Delta t^2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} \times$$

$$\times \left[2v_1^f(l_1) \Big|_{t+1} - 5v_1(l_1) \Big|_t + 4v_1(l_1) \Big|_{t-1} - v_1(l_1) \Big|_{t-2} \right] -$$

$$- \frac{\rho F_2}{\Delta t^2} (-5v_2 \Big|_t + 4v_2 \Big|_{t-1} - v_2 \Big|_{t-2}) -$$

$$- \rho F_2 \omega_1^2 \Big|_{t+1} l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \Big|_{t+1} - \rho F_2 g \sin \varphi_2 \Big|_{t+1} \quad (52)$$

з початковими умовами

$$v_2^f(0) = 0, \frac{dv_2^f(0)}{dx_2} = 0, \frac{d^2 v_2^f(0)}{dx_2^2} = - \frac{M_2}{EJ_2}, \frac{d^3 v_2^f(0)}{dx_2^3} = 0. \quad (53)$$

За допомогою знайдених часткових розв'язків, виходячи з граничних умов (19) на кінці $x_2 = l_2$, складається лінійна система алгебраїчних рівнянь з шістьма невідомими, яка дозволяє знайти невизначені константи $C_1, C_3, C_4, C_6, \varepsilon_1$ та ε_2 , а разом з тим – і розв'язок системи рівнянь (23) – (26) в момент часу $t + \Delta t$. Продовжуючи процес надалі, можна дослідити динамічну поведінку стрижнів на потрібному інтервалі часу.

Висновки

В даній роботі на прикладі двох ланок (ведучої та веденої) дволанкового маніпулятора викладена методика дослідження динамічної поведінки пружного маніпулятора, який керується зовнішніми моментами.

Література

1. Акуленко Л. Д., Гукасян А. А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора // Известия АН СССР, Механика твёрдого тела. 1983, №5. С. 33 – 41.
2. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями // Известия АН СССР, Механика твёрдого тела. 1981, №3. С. 118 – 124.
3. Голенков В. Г. Математичне моделювання динаміки пружної ланки одноланкового маніпулятора з вантажем на кінці // Гірничі, будівельні, дорожні та мелію-

- ративні машини: Всеукраїнський збірник наукових праць. Випуск 71. – К.: КНУБА, 2008, С. 96 – 99.
4. Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Кошкин В. Л. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наукова думка, 1992.– 344 с.
 5. Гуляев В. И., Лизунов П. П. Колебания систем твёрдых и деформируемых тел при сложном движении. – Киев: Вища школа, 1989.– 200 с.
 6. Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями // Известия АН СССР, Механика твёрдого тела. 1984, №2. с. 51 – 58.
 7. Chapnik V. V., Heppler G. R., Aplevich J. D. Modeling Impact on a One – Link Flexible Robotic Arm. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 7, No. 4, August 1991, p. p. 479 – 488.
 8. Wen – Jieh Wang, Shui – Shong Lu, Chen – Fa Hsu. Experiments on the Position Control of a One – Link Flexible Robotic Arm. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 5, No. 3, June 1989, p. p. 373 – 377.
 9. Yossi Chait, Milan Miclavcic, C. R. Macculer, Clark J. Radcliffe. A Natural Modal Expansion for the Flexible Robotic Arm Problem Via a Self – Adjoint Formulation. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 6, No. 4, October 1990, p. p. 601 – 603.
- Рецензент: В. В. Гайдайчук, д. т. н., проф. (КНУБА)
- Отримано: 7.12.2009 р.