Моделювання робочих процесів машин

АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ НАВАНТАЖЕНЬ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МАШИН: ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

Михайло Діктерук[1], *Юрій Човнюк*[2], *Костянтин Почка*[1]

[1] *Київський національний університет будівництва і архітектури, Повітофлотський пр-кт 31, Київ, Україна, +38(044)241-55-52*
[2] *Національний університет біоресурсів і природокористування України, вул. Героїв Оборони, 11, Київ, Україна*

ANALYTICAL METHODS OF LIFTING MACHINES' LOAD CALCULATION: APPLICATION OF LAPLACE TRANSFORMATION

Mykhaylo Dykteruk[1],*Yuriy Chovnyuk*[2], , *Kostyantyn Pochka*[1]

[1] *Kyiv National University of Construction and Architecture, Povitoflotskyy Prospect 31, Kyiv, Ukraine*
[2] *National University of Life Environmental Sciences of Ukraine, Heroyiv Oborony st., 11, Kyiv, Ukraine*

АНОТАЦІЯ. *Наведено розрахункову та аналогову моделі розрахунку маятникових коливань вантажу, які виникають при експлуатації мостових кранів. У якості аналітичного методу розрахунку навантажень у системі "вантажний візок-канат-вантаж" використане перетворення Лапласа, яке дозволяє врахувати вплив у вказаній системі наявних сил сухого тертя.*
Ключові слова: *розрахунок, навантаження, вантажопідйомні машини, коливання.*

АННОТАЦИЯ. *Приведены расчётная и аналоговая модели расчёта маятниковых колебаний груза, которые возникают при эксплуатации мостовых кранов. В качестве аналитического метода расчёта нагрузок в системе "грузовая тележка-канат-груз" использовано преобразование Лапласа, которое позволяет учитывать влияние в указанной системе присутствующих сил сухого трения.*
Ключевые слова: *расчёт, нагрузка, грузоподъёмные машины, колебания.*

SUMMARY. Purpose. *Application of the Laplace transformation to define principal patterns of motion as well as loads as to the main elements of the overhead cranes' design.* ***Methodology/approach.*** *The objective is achieved both in approximate set and numerically - in adjusting set. For forming the system of initial differential equations the method of Lagrange's equations of the second type is applied.* ***Findings.*** *The results received in prospect may be applied for specification and modernization of the existing engineering methods of the hoisting machines loads' calculation.* ***Research limitations/implications.*** *Through application of the Laplace transformations it's defined the principal patterns of movement and loads as to the main elements of the overhead cranes' design. The adjusted analysis model of the load's pendular oscillations without restriction of the rope's deflection angle from the vertical line based on the second type Lagrange equation research was received.* ***Originality/value.*** *The work has scientific and practical interest.*
Key words: *calculation, load, lifting machines, oscillations.*

Постановка проблеми

Під час роботи мостових кранів спостерігаються маятникові коливання вантажу, які, у свою чергу, викликають нерівномірний рух вказаних кранів чи їхніх вантажних візків, додаткові навантаження на силові елементи кранів, створюють різноманітні незручності при їх експлуатації, що необхідно враховувати при уточнених розрахунках кранів (не тільки мостових).

У мостових, козлових та деяких інших кранів загального призначення, які переміщуються вдовж рейкового шляху, частота маятникових коливань вантажу відносно крана суттєво нижче частоти пружних коливань кранової металоконструкції та трансмісії механізму пересування. Навіть за малої довжини підвіски канатів (не більше 3 *м*) частота маятникових коливань вантажу не перевищує 2…2,6 *рад/с*, у той час як частота пружних коливань кранів у кілька разів, а то й у десятки разів вище.

Отже, маятникові коливання вантажу можна вважати практично незалежними від пружних коливань крана і при їх розрахунках металоконструкцію та трансмісію механізму пересування можна приймати абсолютно жорсткими. При визначенні динамічних навантажень, діючих на металоконструкцію і трансмісію механізму пересування (вантажного візка), закон зміни горизонтальної складової натягу канатів, яка виникає як наслідок маятникових коливань вантажу, можна задати у вигляді відомої функції часу, яка визначена у межах моделі абсолютно жорсткого крана. Цей прийом дозволяє знизити порядок рівнянь руху кранової динамічної системи на дві одиниці [1].

Огляд публікацій за темою дослідження. Динаміка мостових кранів подана у монографії С.А. Казака [2]. Стійкість руху мостових кранів досліджує автор [3]. Динаміка підйому вантажу мостовими кранами описана й всебічно досліджена у роботах Н.А. Лобова [4, 5].

Слід зазначити, що автори вказаних вище робіт розрахунок маятникових коливань вантажу на канатах здійснюють за найпростішою схемою двомасової системи [5, 6], а кути відхилення канатів від вертикалі вважають малими (не перевищують 10…12^0). Проте у цих дослідженнях не врахований нелінійний характер опору рухові вантажного візка (сухе тертя) і завдяки лінійності вихідної системи диференціальних рівнянь (для вантажного візка і вантажу на канаті) розв'язки задачі отримані методом класичного підходу математичного аналізу (до розв'язку задачі Коші). Але існує можливість [7] врахувати нелінійні сили опору рухові вантажного візка крана (у вигляді сил сухого тертя) шляхом застосування перетворення Лапласа, що і реалізовано у даному дослідженні.

Мета даної роботи полягає у застосуванні перетворення Лапласа для встановлення основних закономірностей руху та для визначення навантажень головних елементів конструкції мостового крана. При цьому задача вирішується як у наближеній постановці (малі кути відхилення каната від вертикалі), так і чисельно – в уточненій постановці (для будь-яких кутів відхилення каната від вертикалі). Для складання системи вихідних диференціальних рівнянь (в уточненій постановці задачі) використаний метод рівнянь Лагранжа другого роду [6, 8].

Виклад основного матеріалу

1. <u>Наближена схема та динамічна модель аналізу маятникових коливань вантажу Лобова Н.А.-Казака С.А.</u>

Рівняння руху крана та вантажу в горизонтальному напрямку [5] для малих кутів відхилення канатів від вертикалі мають вид:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + \dfrac{m_2 \cdot g}{H} \cdot (x_1 - x_2) = P - W \cdot \operatorname{sign}(\dot{x}_1) \ ; \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 + \dfrac{m_2 \cdot g}{H} \cdot (x_1 - x_2) = 0 \ , \end{cases} \qquad (1)$$

де введені наступні позначення: m_1 – маса крана чи вантажного візка, приведена до поступального переміщення крана чи візка; m_2 – маса вантажу; $G = m_2 \cdot g$ – сила тяжіння вантажу; g – прискорення вільного падіння ($g \approx 9{,}81 м/с^2$); P – сумарне тягове чи гальмівне зусилля привідних коліс крана або візка; W – амплітуда сили опору пересуванню крана чи візка; x_1 та x_2 – горизонтальні переміщення мас m_1 та m_2; $S = G = m_2 \cdot g$ – сумарний натяг канатів; $x_2 = x_1 + H \cdot \varphi$; φ – кут відхилення канатів від вертикалі (не перевищує 10…12^0); $\sin\varphi \approx \varphi$; $\cos\varphi \approx 1{,}0$; $T = S \cdot \varphi = = m_2 \cdot g \cdot (x_2 - x_1) / H$ – горизонтальна складова сили натягу канатів; H – довжина виска канатів.

Застосуємо до рівнянь системи (1) перетворення Лапласа:

$$x_1(t) \leftrightarrow \tilde{x}_1(p); \quad x_2(t) \leftrightarrow \tilde{x}_2(p); \quad P(t) \leftrightarrow \tilde{P}(p), \qquad (2)$$

де p – параметр вказаного перетворення. Крім того, вважаємо, що виконуються наступні початкові умови:

$$x_1(t)\big|_{t=0} = x_2(t)\big|_{t=0} = \dot{x}_1(t)\big|_{t=0} = \dot{x}_2(t)\big|_{t=0} = 0 \, . \qquad (3)$$

Стосовно перетворення Лапласа функції $\operatorname{sign}(\dot{x}_1(t))$ використаємо підхід роботи [7]:

$$\mathrm{W} \cdot \operatorname{sign}(\dot{x}_1) \leftrightarrow L\{\mathrm{W} \cdot \operatorname{sign}(\dot{x}_1)\} = = \mathrm{W} \cdot \left[\frac{1}{p} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cdot \frac{1}{p} \cdot e^{-j \cdot p \cdot T} \right], \qquad (4)$$

де T – період часу, через який швидкість $\dot{x}_1(t)$ перетворюється у нуль. (У подальшо му розглядається усталений режим руху системи).

Враховуючи (2)-(4), розв'язки (1) у виразах, отриманих після перетворення Лапласа, можна подати наступним чином:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(p) = \dfrac{\left\{\tilde{P}(p) - \dfrac{W}{p}\left[1 + 2\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left((-1)^j \exp(-jpT)\right)\right]\right\}\left(p^2 + \Omega^2\right)}{p^2 \cdot \left[m_1\left(p^2 + \Omega^2\right) + m_2 \cdot \Omega^2\right]}; \\ \tilde{x}_2(p) = \dfrac{\Omega^2}{\left(p^2 + \Omega^2\right)} \cdot \tilde{x}_1(p); \ \ \Omega^2 = \dfrac{g}{H}. \end{cases} \quad (5)$$

Отже, (5) – це точний розв'язок задачі у зображеннях Лапласа за початкових умов (3). Застосовуючи зворотне перетворення L^{-1} розв'язків (5) і повертаючись до оригіналів $x_1(t)$, $x_2(t)$ отримаємо повний розв'язок задачі (1), (3) у аналітичному виді.

2. <u>Уточнена модель аналізу маятникових коливань вантажу на основі дослідження рівнянь Лагранжа другого роду</u>

Використаємо результати роботи [8] і визначимо функцію Лагранжа для моделювання динаміки мостового крана з вантажем на канаті, який можна описати (на відміну від попередньої моделі, розглянутої у пункті 1) у термінах змінних: x – переміщення вантажного візка та φ – кут відхилення каната від вертикалі. При цьому на величину кута φ ніяких обмежень не накладаємо!

Функція Лагранжа $\tilde{L}$ набуває вигляду [8]:

$$\tilde{L} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} \cdot \left(H^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 2 \cdot H \cdot \dot{x} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi\right) + m_2 \cdot g \cdot H \cdot \cos\varphi \ . \quad (6)$$

Зрозуміло, що тепер x та φ – незалежні змінні. Для (6) маємо наступну математичну модель для аналізу динаміки руху мостового крана (точніше, його механізму підйому вантажу):

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} = P(t) - W \cdot \operatorname{sign}(\dot{x}) \ ; \\ T = S \cdot \sin\varphi = m_2 \cdot g \cdot \operatorname{tg}\varphi \ ; \\ \ddot{\varphi} + \Omega^2 \cdot \sin\varphi + \dfrac{\ddot{x}}{H} \cdot \cos\varphi = 0 \ ; \\ S = {m_2 \cdot g}/{\cos\varphi} \ . \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) кардинально відрізняється від (1). Її можна звести до одного рівняння для φ:

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2 \cdot \sin\varphi + \frac{\left[P(t) - W \cdot \operatorname{sign}(\dot{x})\right]}{(m_1 + m_2) \cdot H} \cdot \cos\varphi = 0 \, . \quad (8)$$

При цьому $x(t)$ визначається з рівняння:

$$\ddot{x} = \frac{\left[P(t) - W \cdot \operatorname{sign}(\dot{x})\right]}{(m_1 + m_2)} \, . \quad (9)$$

При $\varphi << 1$ рівняння (8) набуває вигляду:

$$\ddot{\phi} + \Omega^2 \cdot \phi - \frac{W \cdot \operatorname{sign}(\dot{x})}{(m_1 + m_2) \cdot H} = -\frac{1}{H} \cdot \frac{P(t)}{(m_1 + m_2)} \, . \quad (10)$$

З рівняння (10) випливає, що у ті моменти часу, коли $\dot{x} > 0$, виникає від'ємне (за знаком), так зване "антисухе" тертя, що може навіть при $P(t) \to 0$ призводити до самозбудження коливань кута φ – кута відхилення каната з вантажем від вертикалі. Результатом цього процесу буде суттєве розгойдування вантажу на канаті, що є небажаним!

Результати розрахунку основних кінематичних параметрів задачі (φ, $\dot{\varphi}$, φ, x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $x_{1,2}$, $\dot{x}_{1,2}$, $\ddot{x}_{1,2}$), величин зусиль T та S у межах моделей, розвинених у пунктах 1 та 2, наведені нижче (рис. 1) для довжини канатів 20 *м*. Крім того, представлені фазові портрети систем, що розглядаються, як класичного – типу ($x, \dot{x}$), ($\dot{x}_{1,2}, x_{1,2}$), ($\varphi, \dot{\varphi}$), так і вищих порядків – типу ($x, \ddot{x}$), ($\dot{\varphi}, \varphi$) і т.д., які описують особливості динаміки вказаних систем.

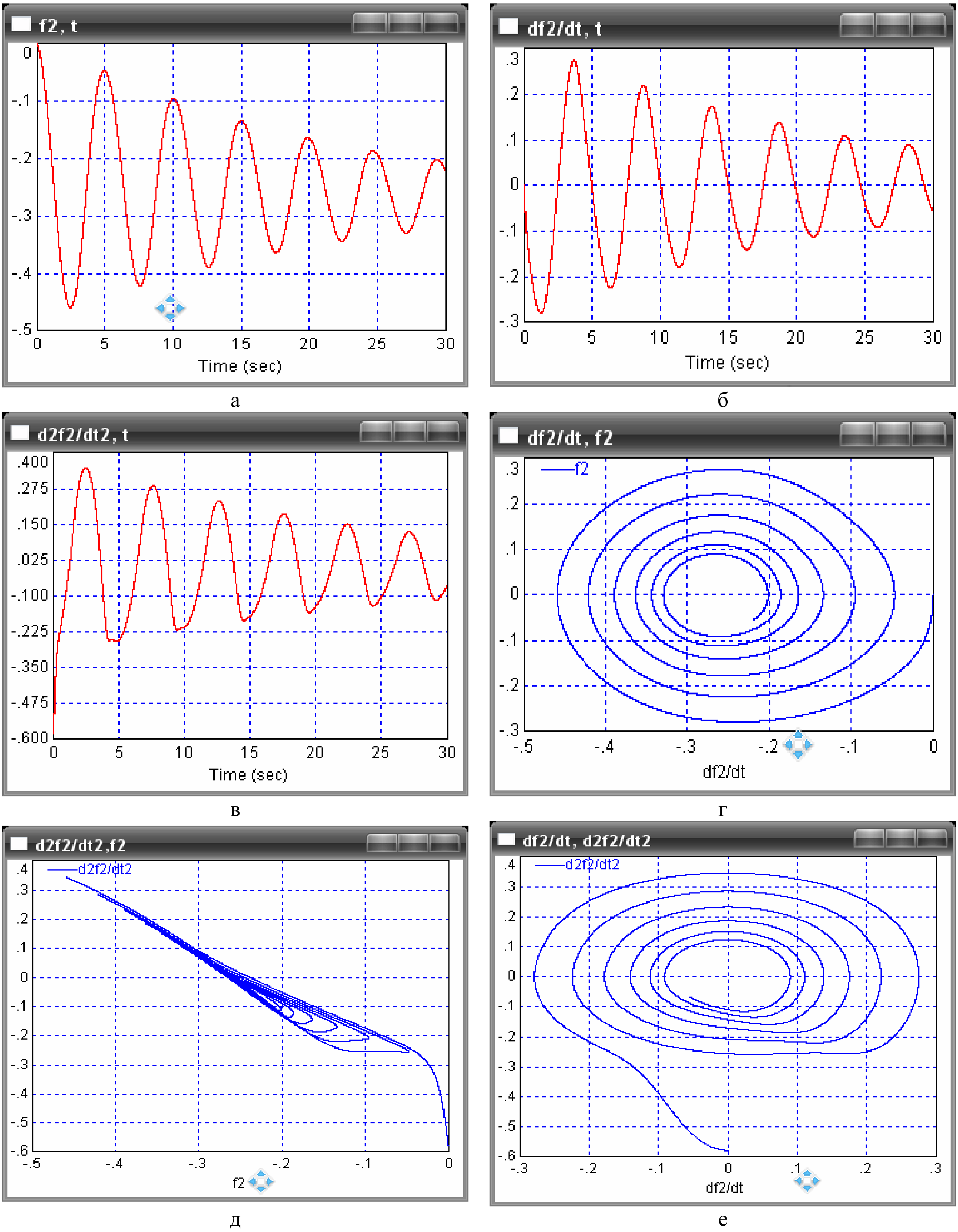

Рис. 1. Графічні залежності $\varphi=\varphi(t)$ – а, $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}(t)$ – б, $\ddot{\varphi}=\ddot{\varphi}(t)$ – в та фазові портрети ($\dot{\varphi}$, φ) – г, ($\ddot{\varphi}$, φ) – д, ($\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$) – е для довжини каната 20м

Fig. 1. Graphic dependence $\varphi=\varphi(t)$ - а, $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}(t)$ – б, $\ddot{\varphi}=\ddot{\varphi}(t)$ – в and phase portraits ($\dot{\varphi}$, φ) – г, ($\ddot{\varphi}$, φ) – д, ($\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$) – е for the rope of length 20m

Висновки

1. Завдяки застосуванню перетворень Лапласа встановлено основні закономірності руху та визначено навантаження головних елементів конструкції мостового крана.
2. Отримано уточнену модель аналізу маятникових коливань вантажу без обмежень кута відхилення каната від вертикалі на основі дослідження рівнянь Лагранжа другого роду.
3. Отримані у роботі результати можна у подальшому використовувати для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку *навантажень вантажопідйомних машин*.

Література

1. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. / Л.И. Мандельштам. – М.: Наука, 1972. – 418 с.
2. *Казак С.А.* Динамика мостовых кранов. / С.А. Казак. – М.: Машиностроение, 1968. – 472 с.
3. *Лобов Н.А.* Об устойчивости движения мостовых кранов. / Н.А. Лобов. // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. – 1977. – № 255. – С. 3-24.
4. *Лобов Н.А.* Динамика подъёма груза мостовыми кранами. / Н.А. Лобов. // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. – 1982. – № 371. – С. 42-75.
5. *Лобов Н.А.* Динамика грузоподъёмных кранов. / Н.А. Лобов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
6. *Брауде В.И.* Системные методы расчёта грузоподъёмных машин. / В.И. Брауде, М.С. Тер-Мхитаров. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1985. – 181 с.
7. *Овчинников П.Ф.* Виброреология. / П.Ф. Овчинников. – Киев: Наукова думка, 1983. – 272 с.
8. *Ландау Л.Д.* Механика. Т. 1. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1961. – 220 с.

References

1. *Mandelshtam L.I.*, 1972. Lekcii po teorii kolebanij [Lectures on the theory of fluctuations]. Moscow, Nauka Publ., 418.
2. *Kazak S.A.*, 1968. Dinamika mostovyh kranov [Dynamics of bridge cranes]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 472.
3. *Lobov N.A.*, 1977. Ob ustojchivosti dvizhenija mostovyh kranov [About stability of movement of bridge cranes]. Trudy MVTU im. N.Je. Baumana [Works of Moscow State Technical University name Bauman], no. 255, 3-24.
4. *Lobov N.A.*, 1982. Dinamika podjoma gruza mostovymi kranami [Dynamics of lifting of loads by bridge cranes]. Trudy MVTU im. N.Je. Baumana [Works of Moscow State Technical University name Bauman], no. 371. 42-75.
5. *Lobov N.A.*, 1985. Dinamika gruzopodjomnyh kranov [Dynamics of load-lifting cranes]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 160.
6. *Braude V.I.*, Ter-Mhitarov M.S., 1985. Sistemnye metody raschjota gruzopodjomnyh mashin [System methods of calculation of load-lifting cars]. St. Petersburg, Mashinostroenie, Leningr. Otdelenie Publ., 181.
7. *Ovchinnikov P.F.*, 1983. Vibroreologija. [Vibrorheology]. Kiev, Naukova dumka Publ., 272.
8. *Landau L.D.*, Lifshic E.M., 1961. Mehanika, vol.1. Moscow, Nauka Publ., 220.

Надійшла до редакції
24.10.2012 р.

Затверджена до друку
29.12.2012 р.