

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГАРМОНІЧНОГО БАЛАНСУ ДЛЯ АНАЛІЗУ МАЯТНИКОВИХ КОЛИВАНЬ ВАНТАЖУ В ПРОЦЕСАХ ПУСКУ/ГАЛЬМУВАННЯ МОСТОВИХ КРАНІВ

Юрій Човнюк<sup>1</sup>, Костянтин Почка<sup>2</sup>, Михайло Діктерук<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Національний університет біоресурсів і природокористування України, вул. Героїв Оборони, 11, Київ, Україна

<sup>2</sup> Київський національний університет будівництва і архітектури, Повітофлотський пр-кт 31, Київ, Україна, +38(044)241-55-52

### APPLICATION OF THE HARMONIC BALANCE METHOD FOR THE LOAD PENDULAR OSCILLATIONS ANALYSIS AT START UP/SLOWDOWN MODES WITH RESPECT TO THE BRIDGE CRANES

Yuriy Chovnyuk<sup>1</sup>, Kostyantyn Pochka<sup>2</sup>, Mykhaylo Dykteruk<sup>2</sup>

<sup>1</sup> National University of Life Environmental Sciences of Ukraine, Heroyiv Oborony st., 11, Kyiv, Ukraine

<sup>2</sup> Kyiv National University of Construction and Architecture, Povitoflotsky Prospect 31, Kyiv, Ukraine

**АНОТАЦІЯ.** Наведено аналіз маятникових коливань вантажу в процесах пуску/гальмування мостових кранів. Застосування методу гармонічного балансу дозволяє встановити динамічну піддатливість та динамічні переміщення як функції частоти коливань з демпфіруванням, обумовленим сухим тертям.

**Ключові слова:** метод гармонічного балансу, аналіз, маятникові коливання, вантаж, пуск/гальмування, мостові крани.

**АННОТАЦИЯ.** Приведен анализ маятниковых колебаний груза в процессах пуска/торможения мостовых кранов. Применение метода гармонического баланса позволяет установить динамическую податливость и динамические перемещения как функции частоты колебаний с демпфированием, обусловленным сухим трением.

**Ключевые слова:** метод гармонического баланса, анализ, маятниковые колебания, груз, пуск/торможение, мостовые краны.

**SUMMARY. Purpose.** Definitions of the principal patterns of load motion (pendular oscillations) in the start up/slow down modes of the hoisting (overhead) cranes. **Methodology/approach.** Researches in this work have analytical character with application in the dynamical analysis of the overhead crane's "load wagon – rope - load" system of the harmonic balance method allowing adequately take into account existing forces of the rubbing friction. **Findings.** Results received in prospect may applied for specification and modification of the existing engineering methods of the similar systems' calculations both at the stage of their designing/drafting and at the stage of real exploitation. **Research limitations/implications.** Application of the harmonic balance method for the load pendular oscillations analysis at the start up/slow down modes of the overhead cranes allowed defining amplitude and phase-frequency characteristics of the arising oscillations given the rubbing friction forces. The existing rubbing friction in the cranes' system does not delete unrestricted increase of the resonance oscillations' amplitude. **Originality/value.** The work has scientific and practical interest.

**Key words:** harmonic balance method, analysis, pendular oscillations, load, start up/slowdown, bridge cranes.

**Постановка проблеми.** При роботі кранів спостерігаються маятникові коливання вантажу, котрі викликають нерівномірний рух кранів або їх вантажних візків, додаткові навантаження на силові елементи кранів, створюють незручності при їх експлуатації, що необхідно враховувати при уточнених розрахунках кранів.

У мостових, козлових і деяких інших кранів стандартних параметрів, які переміщуються вздовж рейкового шляху, частота маятникових коливань вантажу відносно крана суттєво нижче частоти пружних коливань кранової металоконструкції і трансмісії механізму пересування. Навіть за малої довжини виска канатів (не більше 3 м) частота маятникових коливань вантажу не перевищує  $2...2,6 \text{ рад/с}$ , у той час як частота пружних коливань кранів у кілька разів, а то й у десятки разів вище.

Отже, маятникові коливання вантажу можна вважати практично незалежними від

пружних коливань крана й при їх розрахунку металоконструкцію і трансмісію механізму пересування можна приймати абсолютно жорсткими. При визначенні динамічних навантажень, діючих на металоконструкцію і трансмісію механізму пересування, закон зміни горизонтальної складової натягу канатів, що виникає у результаті маятникових коливань вантажу, можна задати у вигляді відомої функції часу, визначеної за схемою абсолютно жорсткого крана. Цей прийом дозволяє знизити порядок рівнянь руху кранової динамічної системи на дві одиниці.

На думку авторів даної роботи, задачі аналізу динамічних навантажень кранів у процесах їх пуску та гальмування, а також розгойдування вантажу при цьому вимагають подальшого уточнення, вдосконалення і чисельно-аналітичних досліджень.

**Огляд публікацій за темою дослідження.** Динаміку вантажопідйомних кранів ви-

вчав Н.А. Лобов [1], а коливання механічних (деформованих) систем – автори [2, 3]. Проте, у створених вказаними авторами моделях не враховані сили сухого тертя, які притаманні крановим системам. Ці сили вносять нелінійні збурення у рух кранів, вантажних візків і вантажів на канатах, з'єднаних із вказаними візками. Ця обставина суттєво ускладнює динамічний аналіз задачі (навіть для невеликих кутів відхилення вантажу на канаті ( $\varphi$ ) від вертикалі, тобто  $\varphi \ll 1$ ). Але використання методу гармонічного балансу [4] дозволяє відшукати, на погляд авторів даної роботи, хоча й наближені, але досить “точні” (в межах розглянутої моделі) аналітичні розв’язки типових динамічних задач для кранових систем. Саме цьому і присвячене дане дослідження.

**Мета даної роботи** полягає у встановленні основних закономірностей руху (зокрема, маятникових коливань) вантажу в режимах пуску/гальмування вантажопідйомних (мостових) кранів. При цьому використаний у динамічному аналізі системи “вантажний візок – канат – вантаж” мостового крана метод гармонічного балансу, який дозволяє адекватно враховувати наявні сили сухого тертя.

#### Виклад основного матеріалу

Розрахункова схема (як і аналогова) для аналізу маятникових коливань вантажу на канаті наведена у [1]. Щоправда, у зазначеній роботі відсутній аналіз вказаних коливань за наявної сили сухого тертя вантажного візка з рейками.

Приймаючи гіпотезу малих кутів відхилення канатів від вертикалі [1], зведемо математичну модель до наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{W}_1 + k_1 \cdot (W_1 - W_2) = 0; \\ m_2 \cdot \ddot{W}_2 + k_1 \cdot (W_2 - W_1) + \\ + \mu \cdot N \cdot \text{sign} \dot{W}_2 = P(t), \end{cases} \quad (1)$$

де  $W_1$  – горизонтальне переміщення маси  $m_1$  (вантаж на канаті);  $W_2$  – горизонтальне переміщення маси  $m_2$  (вантажного візка);  $k_1 = \frac{m_1 \cdot g}{H}$ ;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ;  $H$  – довжина

виска каната;  $N = (m_1 + m_2) \cdot g$ ;  $\mu$  – коефіцієнт тертя ковзання вантажного візка вдовж рейкового шляху;  $P(t)$  – сумарне тягове/гальмівне зусилля привідних коліс крана (чи візка).

Розглянемо рух крана з гнучко підвішеним вантажем у період його розгону. Оскільки період маятникових коливань вантажу більше чи одного порядку з часом розгону крана, при розв’язуванні системи (1) можна прийняти [1], що рушійна сила привідного двигуна механізму пересування постійна і дорівнює середньому значенню пускового зусилля (тобто  $P(t) = P_0 = \text{const}$ ). (Якщо враховувати сили опору оточуючого вантаж повітряного середовища, тоді у першому рівнянні системи (1) слід у правій частині поставити  $F(t)$ ).

Звичайно, за наявної  $F(t)$  та  $P(t)$  така задача, порівняно з розв’язаною у [1], має більш узагальнену постановку. У подальшому (в межах методу гармонічного балансу [4]) будемо розглядати дану задачу у найбільш загальній постановці, тобто:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{W}_1 + k_1 \cdot (W_1 - W_2) = F(t); \\ m_2 \cdot \ddot{W}_2 + k_1 \cdot (W_2 - W_1) + \\ + \mu \cdot N \cdot \text{sign} \dot{W}_2 = P(t). \end{cases} \quad (2)$$

Слід зазначити, що досить важко отримати точні розв’язки задач динаміки для тих систем з демпфіруванням, які мають більше одного степеня вільності руху. (Демпфірування обумовлене тертям у деякій точці). Однак наближені розв’язки можуть бути отримані досить легко за допомогою методу гармонічного балансу. Застосуємо цей підхід для (2). Ці рівняння розв’язуються, якщо прийняти, що  $W_2(t)$  – гармонічна функція часу:

$W_2(t) = W_2 \cdot \cos \omega \cdot t$ . Тоді  $\dot{W}_2 = -\omega W_2 \cdot \sin \omega t$ , а функцію  $\text{sign}(-\omega \cdot W_2 \cdot \sin \omega \cdot t)$  необхідно розкласти у ряд за гармоніками частоти  $\omega$  [4]:

$$\begin{aligned} \text{sign}(\dot{W}_2) &= \text{sign}(-\omega \cdot W_2 \cdot \sin \omega \cdot t) = \\ &= -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{W_2}{|W_2|} \cdot \sin \omega \cdot t + O(\sin n \cdot \omega \cdot t, \cos n \cdot \omega \cdot t). \end{aligned} \quad (3)$$

Тоді для останнього члена лівої частини другого рівняння системи (2) отримаємо:

$$\mu \cdot N \cdot \text{sign}(\dot{W}_2) = -\frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} \cdot \frac{W_2}{|W_2|} \cdot \sin \omega \cdot t. \quad (4)$$

Будемо вважати, що:

$$\begin{cases} W_1 = W_{11} \cdot \cos \omega \cdot t + W_{12} \cdot \sin \omega \cdot t; \\ F(t) = F_{11} \cdot \cos \omega \cdot t + F_{12} \cdot \sin \omega \cdot t; \\ P(t) = P_{11} \cdot \cos \omega \cdot t + P_{12} \cdot \sin \omega \cdot t. \end{cases} \quad (5)$$

Підставляючи ці вирази у (2) й збираючи коефіцієнти при функціях  $\sin \omega \cdot t$  та  $\cos \omega \cdot t$ , отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (-m_1 \cdot \omega^2 + k_1) \cdot W_{11} - k_1 \cdot W_2 = F_{11}; \\ (-m_1 \cdot \omega^2 + k_1) \cdot W_{12} = F_{12}; \\ (-m_2 \cdot \omega^2 + k_1) \cdot W_2 - k_1 \cdot W_{11} = P_{11}; \\ -k_1 \cdot W_{12} - \frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} \cdot \frac{W_2}{|W_2|} = P_{12}. \end{cases} \quad (6)$$

З другого та четвертого рівнянь (6) маємо:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \frac{\left( \frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} \cdot \frac{W_2}{|W_2|} + P_{12} \right)}{(-k_1)}; \\ F_{12} &= \frac{(-m_1 \cdot \omega^2 + k_1) \cdot \left( \frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} \cdot \frac{W_2}{|W_2|} + P_{12} \right)}{(-k_1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

З першого та третього рівнянь (6) визначаємо  $W_{11}$  та  $W_2$ :

$$\begin{cases} W_{11} = \frac{(-m_2 \cdot \omega^2 + k_1) \cdot F_{11} + k_1 \cdot P_{11}}{\Delta}; \\ W_2 = \frac{(-m_1 \cdot \omega^2 + k_1) \cdot P_{11} + k_1 \cdot F_{11}}{\Delta}; \\ \Delta = (-m_1 \cdot \omega^2 + k_1) \cdot (-m_2 \cdot \omega^2 + k_1) - k_1^2. \end{cases} \quad (8)$$

Розглянемо спочатку  $F(t)$ :

$$\begin{aligned} F(t) &= F_{11} \cdot \cos \omega t + F_{12} \cdot \sin \omega t = \\ &= F_{11} \cdot \cos \omega t + \frac{\left[ \begin{aligned} &(-m_1 \cdot \omega^2 + k_1) \times \\ &\times \left( \frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} \cdot \frac{W_2}{|W_2|} + P_{12} \right) \end{aligned} \right]}{(-k_1)} \cdot \sin \omega t. \end{aligned} \quad (9)$$

Звідси:

$$|F(t)|^2 = F_{11}^2 + \left( \frac{(-m_1 \cdot \omega^2 + k_1)^2}{k_1^2} \times \left[ \frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} \cdot \frac{W_2}{|W_2|} + P_{12} \right]^2 \right). \quad (10)$$

Для  $|W_2|$  маємо:

$$|W_2| = \left| \frac{(-m_1 \cdot \omega^2 + k_1) \cdot P_{11} + k_1 \cdot F_{11}}{\Delta} \right|. \quad (11)$$

Для  $|W_1|$  маємо:

$$|W_1| = \left\{ \frac{\left[ \frac{(-m_2 \cdot \omega^2 + k_1) \cdot F_{11} + k_1 \cdot P_{11}}{\Delta} \right]^2}{\Delta^2} + \frac{\left[ \frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} \cdot \frac{W_2}{|W_2|} + P_{12} \right]^2}{k_1^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

У подальшому розглянемо ситуацію, коли:  $F(t) \equiv 0$ , а  $\dot{W}_2 > 0$  (тобто нехтуємо силою опору повітря, яке діє на вантаж, і розглядаємо період/процес розгону вантажно-го візка).

Для цього випадку маємо:

$$\begin{cases} W_{11} = \frac{k_1 \cdot P_{11}}{\Delta}; \\ W_{12} = \frac{\left( \frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} \cdot \frac{W_2}{|W_2|} + P_{12} \right)}{(-k_1)} = \\ = -\frac{\left( \frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} + P_{12} \right)}{k_1}; \\ |W_1| = \left\{ \left( \frac{k_1 \cdot P_{11}}{\Delta} \right)^2 + \frac{\left[ \frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} + P_{12} \right]^2}{k_1^2} \right\}^{\frac{1}{2}}; \\ W_2 = \frac{(-m_1 \cdot \omega^2 + k_1) \cdot P_{11}}{\Delta}; \\ |W_2| = \left| \frac{(-m_1 \cdot \omega^2 + k_1) \cdot P_{11}}{\Delta} \right|. \end{cases} \quad (13)$$

При виконанні умови:

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m_1} \quad \text{або} \quad P_{11} \equiv 0. \quad (14)$$

$W_2 = 0$ , тобто у цьому випадку немає ковзання тіла 2 ( $m_2$  – маса вантажного візка) вдовж рейкового шляху.

Тіло масою  $m_2$  жорстко приєднується до основи. Разом з тим рух маси  $m_1$  (вантаж на канаті) існує:

$$|W_1| = \left\{ \left( \frac{k_1 \cdot P_{11}}{(-k_1)^2} \right)^2 + \frac{\left[ \frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} + P_{12} \right]^2}{k_1^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \equiv \left\{ \frac{P_{11}^2 + \left[ \frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} + P_{12} \right]^2}{k_1^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

якщо  $P_{11} \neq 0$ . При  $P_{11} = 0$  з (13) маємо:

$$|W_1| = \left| \frac{\frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi} + P_{12}}{k_1} \right| \quad (16)$$

Для того, щоб  $|W_1|$  та  $|W_2|$  одночасно були відмінні від нуля, необхідно, виконання умови:  $\dot{W}_2 > 0$  – розгін,  $\dot{W}_2 < 0$  – гальмування/рух у зворотному напрямку вантажного візка, тобто

$$\frac{(-m_1 \cdot \omega^2 + k_1) \cdot P_{11}}{\Delta} \neq 0. \quad (17)$$

Слід зазначити, що процес навантаження навіть у найпростішій двомасовій розрахунковій схемі носить досить складний характер. Це пояснюється тим, що при кожному пуску/гальмуванні системи виникають вимушені пружні коливання мас з певними (у тому числі випадковими) початковими умовами. Якщо у задачі, що розглядається, для врахування енергії коливань застосовується теорія сухого тертя (з еквівалентною лінеаризацією такого виду тертя у в'язке тертя), тоді деформація пружного ланцюга (каната)  $q = q_1 - q_2$  (де  $q_1$  – переміщення ведучої маси (вантажного візка, масою

$m_2$ ), а  $q_2$  – переміщення веденої маси  $m_1$  (вантажу на канаті)), пов'язана з навантаженням  $S_{np}$  у ланцюгу (канаті) формулою  $S_{np} = q \cdot c$  ( $c$  – коефіцієнт жорсткості системи,  $c \equiv k$ ), визначається у результаті розв'язку диференціального рівняння:

$$\ddot{q} + 2 \cdot n \cdot \dot{q} + v_r^2 \cdot q = \frac{1}{m_1 \cdot m_2} \cdot A(t), \quad (18)$$

де  $n$  – параметр, який характеризує згасання коливань,  $n = \frac{\mu \cdot N \cdot (m_1 + m_2)}{\pi \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot |A| \cdot \omega}$ ,

$q = A \cdot \cos \omega \cdot t$ ,  $v_r = \sqrt{\frac{c \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}}$  – кругова

частота вільних коливань відповідної консервативної системи;  $A(t)$  – зовнішній вплив,  $A(t) = m_1 \cdot S_\delta(t)$ , де  $S_\delta(t)$  – зусилля двигуна чи гальмівне зусилля. Оскільки використане представлення  $q = A \cdot \cos \omega \cdot t$ , тоді після його підстановки у рівняння (18) отримаємо:

$$\ddot{q} + v_r^2 \cdot q - \frac{4 \cdot \mu \cdot N \cdot A \cdot (m_1 + m_2)}{\pi \cdot |A| \cdot m_1 \cdot m_2} \cdot \sin \omega \cdot t = F \cdot \cos(\omega \cdot t + \gamma) \cdot \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}. \quad (19)$$

У (19)  $F$  – амплітуда сили двигуна/гальм;  $\gamma$  – початкова фаза коливань;  $\omega$  – частота (кругова) коливань. Подібний режим виникає при буксуванні крана вдовж рейкового шляху (по суті,  $\omega$  – частота буксування, котрі виникають з тих чи інших причин).

Рівняння (19) виникає як результат еквівалентної лінеаризації (за силами тертя) задачі:

$$m^* \cdot \ddot{q} + c \cdot q = F(t) - \mu \cdot N \cdot \text{sign}(\dot{q}); \quad F(t) = F \cdot \cos(\omega \cdot t + \gamma); \quad m^* = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}. \quad (20)$$

Прирівнюючи праві й ліві частини (19), отримаємо два рівняння для коефіцієнтів при  $\sin \omega \cdot t$  та  $\cos \omega \cdot t$  (вважаючи  $q = A \cdot \cos \omega \cdot t$ ), з яких і знаходимо  $A$  та  $\gamma$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} |A| = \frac{\sqrt{A_0^2 - \left(\frac{4 \cdot a}{\pi}\right)^2}}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}; \quad A_0 = \frac{F}{c}; \\ \operatorname{tg} \gamma = \frac{\left(\frac{4 \cdot \mu \cdot N}{\pi}\right)}{|A| \cdot (c - m^* \cdot \omega^2)}; \quad a = \frac{\mu \cdot N}{c}. \end{array} \right. \quad (21)$$

Цей наближений розв'язок (19) відрізняється несуттєво від точного розв'язку (20), отриманого нижче, але при цьому зберігає всі суттєві якісні характеристики. При  $A_0 \gg \frac{4 \cdot a}{\pi}$  обидва розв'язки (21) і точний (див. далі) співпадають.

Для точного розв'язку (20) маємо:

а) при  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega}$

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) = a \cdot \left[ 1 - \frac{\cos\left\{\omega_0 \cdot \left(t - \frac{\pi}{2 \cdot \omega}\right)\right\}}{\cos\left(\omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega}\right)} \right] + \\ \quad + \frac{A_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \gamma)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}; \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\omega_0 = \frac{c}{m^*};$$

$$\operatorname{tg} \gamma = - \left\{ \frac{A_0^2}{\left[ a \cdot \omega_0 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi \cdot \omega_0}{2 \cdot \omega}\right) \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \right]^2} - 1 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

б) якщо коливання продовжуються за цим режимом руху безперервно, тоді для  $q(t)$  правдива умова  $\dot{q}(t) > 0$ , що призводить до наступної нерівності:

$$\frac{a \cdot \sin\left[\omega_0 \cdot \left(t - \frac{\pi}{2 \cdot \omega}\right)\right]}{\cos\left(\omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega}\right)} - \frac{A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \gamma)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} < 0, \quad (23)$$

яка і є умовою існування незгасаючих коливань.

За допомогою аналітичного підходу можна отримати розв'язок і для другої поло-

вини циклу ( $\frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$ ), коли  $\dot{q}(t) < 0$ . Зазначимо, що при  $q \rightarrow \infty$   $\omega \rightarrow \omega_0$ , тобто тертя (типу "сухого") не перешкоджає виникненню при резонансі нескінченно великих амплітуд коливань. Однак ця умова не завжди справедлива для більш складних систем [4].

Далі наведені графічні залежності  $|A|$  та  $\gamma$  для наближеного розв'язку (21) як функції  $\frac{\omega}{\omega_0}$  за інших заданих значеннях вихідних даних (параметрів) кранової системи, що розглядається.

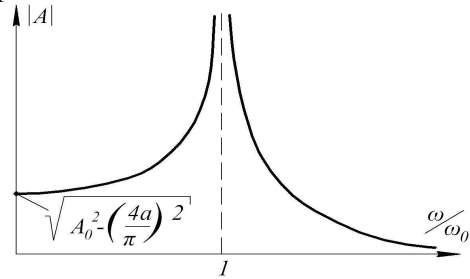


Рис. 1. Залежність  $|A|$  від  $\frac{\omega}{\omega_0}$  (амплітудно-частотна характеристика резонансу  $\omega = \omega_0$ )

Fig. 1. Dependence  $|A|$  on  $\frac{\omega}{\omega_0}$  (amplitude frequency characteristic resonance  $\omega = \omega_0$ )

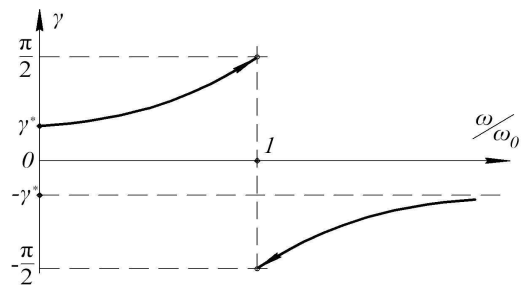


Рис. 2. Залежність  $\gamma$  від  $\frac{\omega}{\omega_0}$  (фазочастотна характеристика резонансу  $\omega = \omega_0$ ):

$$\gamma^* = \operatorname{arctg} \frac{4 \cdot a}{\pi \cdot \sqrt{A_0^2 - \left(\frac{4 \cdot a}{\pi}\right)^2}}$$

Fig. 2. Dependence  $\gamma$  on  $\frac{\omega}{\omega_0}$  (phase frequency characteristic resonance  $\omega = \omega_0$ )

$$\gamma^* = \operatorname{arctg} \frac{4 \cdot a}{\pi \cdot \sqrt{A_0^2 - \left(\frac{4 \cdot a}{\pi}\right)^2}}$$

**Висновки**

1. Застосування методу гармонічного балансу для аналізу маятникових коливань вантажу у процесах пуску/гальмування мостових кранів дозволило визначити амплітудно- та фазочастотні характеристики виникаючих коливань за наявної сили сухого тертя.

2. Наявне у крановій системі сухе тертя не знищує безмежного зростання амплітуди коливань при резонансі ( $\omega \rightarrow \omega_0$ ,  $|A| \rightarrow \infty$ ).

3. Отримані у даній роботі результати можуть бути у подальшому використані для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку подібних систем як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

**Література**

1. *Лобов Н.А.* Динамика грузоподъёмных кранов. / Н.А. Лобов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
2. *Ден-Гартог Дж.* Механические колебания. / Дж. Ден-Гартог. – М.: Физматгиз, 1960. – 464 с.
3. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
4. *Нашиф А.* Демпфирование колебаний. / А. Нашиф, Д. Джоунс, Дж. Хендерсон. – М.: Мир, 1988. – 448 с.

**References**

1. *Lobov N.A.*, 1987. Dinamika gruzopodjomnyh kranov [Dynamics of load-lifting cranes]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 160.
2. *Den-Gartog Dzh.*, 1960. Mehanicheskie kolebanija [Mechanical fluctuations]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 464.
3. *Filippov A.P.*, 1970. Kolebanija deformirue-myh sistem [Fluctuations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 734.
4. *Nashif A.*, Dzhouns D., Henderson Dzh., 1988. Dempfirovanie kolebanij [Damping of fluctuations]. Moscow, Mir Publ., 448.

Надійшла до редакції  
10.12.2012 р.

Затверджена до друку  
26.12.2012 р.

: