

## СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РУХОМ ВАНТАЖОПІДЙОМНИМИ КРАНАМИ

Юрій Ромасевич, Вячеслав Ловейкін

Національний університет біоресурсів і природокористування України  
вул. Героїв Оборони, 11, Київ, Україна, e-mail: [d.um@mail.ru](mailto:d.um@mail.ru)

## THE SYNTHESIS OF CRANE MOVEMENT OPTIMAL CONTROL

Yuriy Romasevich, Vyatcheslav Loveikin

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine  
Heroiv Oborony Str., 11, Kyiv, Ukraine

**АНОТАЦІЯ.** У статті наведено постановку задачі оптимального керування рухом вантажопідйомного крана із вантажем на гнучкому підвісі. Запропоновано комплексний безрозмірний критерій, який відображає стан динамічної системи „кран-вантаж” у фазовому просторі і „витрати” на керування системою. Для розв’язання поставленої задачі використано метод динамічного програмування. Для установлення умови стійкості руху крана із вантажем на гнучкому підвісі використано алгебраїчний критерій Рауса-Гурвіца. Функція оптимального керування знайдена у вигляді зворотного зв’язку. Побудовані графіки функції оптимального керування та неklasичний фазовий портрет руху системи.

**Ключові слова:** оптимальне керування, вантажопідйомний кран, гальмування, динамічне програмування, стійкість руху, коливання.

**АННОТАЦИЯ.** В статье приведена постановка задачи оптимального управления движением грузоподъемного крана с грузом на гибком подвесе. Предложен комплексный безразмерный критерий, который отражает состояние динамической системы „кран-груз” в фазовом пространстве и „расходы” на управление системой. Для решения поставленной задачи использован метод динамического программирования. Для установления устойчивости движения крана с грузом на гибком подвесе использован алгебраический критерий Рауса - Гурвица. Функция оптимального управления найдена в виде обратной связи. Построены графики функции оптимального управления и неклассический фазовый портрет движения системы.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, грузоподъемный кран, торможение, динамическое программирование, устойчивость движения, колебания.

**ABSTRACT. Purpose.** As the article shows the task setting of optimal control movement of the crane with load. The **purpose** of the study is to synthesis of optimal control of the movement of load-lifting crane with a load on a flexible suspension that eliminates vibrations during braking load of the crane under the action of load unpredictable (stochastic) external influences. The study used the **methods** of: numerical integration of the differential equations of the dynamic system motion, dynamic programming and Routh–Hurwitz stability criterion. The **findings** of the article can rise the load-lifting crane productivity and convenience of its using. **Implications:** using optimal control eliminates unwanted vibrations on the flexible cargo suspension even under the action of wind gusts. Also, significantly reducing the load on the crane operator and increases the efficiency of the crane. **Originality:** the above study can be used for design of working algorithms of mechatronic systems of load-lifting cranes.

**Key words:** optimal control, load-lifting crane, inhibition, dynamic programming, stability of motion, fluctuations.

Подано 18.02.2014; прийнято 22.04.2014

## ВСТУП

Велика кількість вантажопідйомних кранів працює у стохастичних зовнішніх середовищах [1]. Робота у таких середовищах характеризується непередбачуваними впливами на рух кранів та вантажів, які вони переміщують. Яскравим прикладом можуть слугувати порталні крани, робота яких пов’язана із вітровими навантаженнями. У випадку переміщення вантажів із значною площею (наприклад, контейнери) вітрові пориви можуть викликати небажані коливання вантажу, що знижує продуктивність

крана. Для того, щоб знизити небажану дію вітрових поривів та інших непередбачуваних факторів, які впливають на динаміку руху крана та вантажу, необхідно отримати такий закон зміни керування (моменту приводу, швидкості руху крана), який би враховував фактичний стан динамічної системи „кран-вантаж”. Крім того, цей закон повинен забезпечувати покращення експлуатаційних характеристик крана, наприклад, зниження рівня динамічних навантажень у елементах його конструкції, або підвищення енергоефективності тощо. Для досягнення вказаних вимог необхідно про-

вести оптимізацію режимів руху крана. Тобто, функція керування краном повинна бути оптимальною.

### МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою приведеного дослідження є синтез оптимального керування рухом вантажопідійомного крана з вантажем на гнучкому підвісі, яке дозволяє усунути коливання вантажу протягом гальмування крана при дії на вантаж непередбачуваних (стохастичних) зовнішніх впливів. Для того, щоб досягнути поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання:

- виконати постановку задачі оптимального керування вантажопідійомним краном з вантажем на гнучкому підвісі;
- синтезувати оптимальне керування рухом крана із вантажем на гнучкому підвісі, яке дає змогу усунути небажані коливання вантажу протягом гальмування крана;
- вказати напрямки досліджень в області практичної реалізації отриманого оптимального керування рухом крана.

### ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Розв'яжемо задачу визначення оптимального керування рухом вантажопідійомного крана із вантажем на гнучкому підвісі у режимі гальмування. Для проведення досліджень прийнято двомасову модель механізму пересування крана (рис. 1), яка досить широко використовується у задачах дослідження динаміки та оптимального керування рухом кранів прольотного типу [2-6]. Зробимо зауваження стосовно прийнятої динамічної моделі (рис. 1): вона відображає лише коливання вантажу на гнучкому підвісі, при цьому не враховуються коливання у привідному механізмі крана, а також коливання кранової металоконструкції. Вказані коливання мають частоти на декілька порядків більші за частоту коливань вантажу на гнучкому підвісі і тому у розрахунках можна прийняти, що кран рухається по абсолютно жорсткій основі, а прийнятий закон зміни привідного зусилля  $F$  „абсолютно точно” реалізується приво-

дом крана (у розрахунках нехтують динамічними процесами привідного механізму крана). Звичайно, можна прийняти іншу модель динаміки руху крана, яка б враховувала коливання кранової металоконструкції та коливання у крановому приводі [7]. Така модель дасть можливість поставити задачу усунення цих небажаних коливань. Однак, вказане усунення коливань неможливо здійснити за допомогою оптимального керування у вигляді зворотного зв'язку. Це пов'язано з тим, що частоти вказаних коливань є значними і система керування рухом крана не встигає реагувати на часову еволюцію динамічної системи.

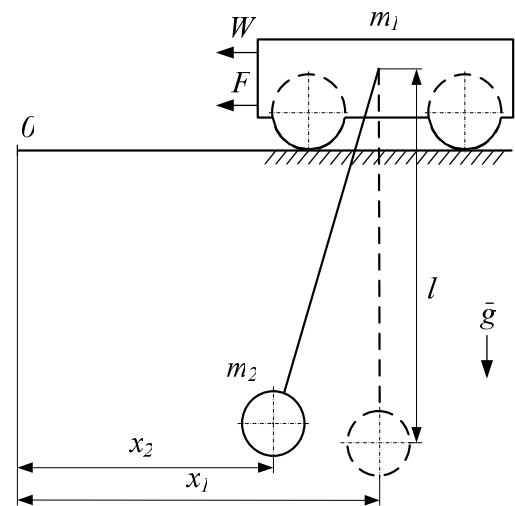


Рис. 1. Розрахункова модель системи „кран-вантаж”

Fig. 1. Calculating model of system „crane-load”

Приведена розрахункова схема руху крана із вантажем на гнучкому підвісі (рис. 1) описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = -F - W \operatorname{sign} \dot{x}_1; \\ \ddot{x}_2 + \frac{g}{l} (x_2 - x_1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $m_1$  – приведена маса привідного механізму і вантажного крана;  $m_2$  – маса вантажу;  $x_1, x_2$  – координати центрів мас відповідно крана і вантажу;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $l$  – довжина гнучкого підвісу,  $F$  – сумарне тягове або гальмівне зусилля, що діє на кран (у даній роботі зусилля  $F$  є гальмівним, отже його напрям співпадає із напрямом приведеної сили опору переми-

щенню крана);  $W$  – приведена сила опору переміщенню крана.

Будемо вважати, що при переміщенні крана протягом гальмування він не змінює свою швидкість, тобто  $sign\dot{x}_1 = 1$ .

Для усунення коливань вантажу та зупинки крана у заданому положенні необхідно забезпечити такі умови:

$$\begin{cases} x_1(T) = x_2(T) = s; \\ \dot{x}_1(T) = \dot{x}_2(T) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де  $x_1(T)$  і  $x_2(T)$  – координати центрів мас відповідно карана і вантажу в момент часу  $T$ ;  $\dot{x}_1(T)$  і  $\dot{x}_2(T)$  – швидкість крана і вантажу відповідно у момент часу  $T$ ;  $s$  – задане положення крана у момент часу  $T$ ;  $T$  – момент закінчення гальмування ( $T$  є нефіксованим).

Введемо позначення:  $y_0 = \frac{l}{g}(x_2 - s)$ ,

$u = \frac{-F - W}{m_1}$ , тоді систему рівнянь (1) мож-

на переписати у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1; \\ \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{y}_2 = y_3; \\ \dot{y}_3 = u - \Omega^2 y_2, \end{cases} \quad (3)$$

де  $\Omega$  – частота власних маятникових коливань вантажу відносно рухомої точки підвісу ( $\Omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l}}$ ). Для отриманої сис-

теми рівнянь запишемо кінцеві умови руху системи „кран-вантаж”:

$$y_0(T) = y_1(T) = y_2(T) = y_3(T) = 0. \quad (4)$$

Початкові умови визначаються значеннями фазових координат на початку гальмування крана з вантажем:

$$\begin{cases} y_0(0) = \Omega_0^{-2}(x_2(0) - s); \\ y_1(0) = \Omega_0^{-2}\dot{x}_2(0); \\ y_2(0) = \Omega_0^{-2}\ddot{x}_2(0); \\ y_3(0) = \Omega_0^{-2}\ddot{\ddot{x}}_2(0), \end{cases} \quad (5)$$

де  $\Omega_0$  – частота власних маятникових коливань вантажу відносно нерухомої точки підвісу ( $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ). Критерій, який потре-

бує мінімізації, представлено у такому вигляді:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T [\delta_0 y_0^2 + \delta_1 y_1^2 + \delta_2 + (y_0 \Omega_0^2 + (y_2)^2 + \delta_3 (y_1 \Omega_0^2 + y_3)^2 + \delta_4 u^2) dt], \quad (6)$$

де  $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  – деякі коефіцієнти. Пояснимо чому саме такий критерій обрано. Показник  $y_0^2$  відображає величину відстані від поточного до заданого стану вантажу, тобто до місця адресації. Показник  $y_1^2$  відображає величину швидкості руху вантажу, яку необхідно зменшити до нуля протягом гальмування. Два інші одиничні показники характеризують аналогічні величини (положення та швидкість), які відносяться до руху крана. Останній доданок вказує витрати на керування, він пропорційний змінним електричним втратам у електроприводі крана, тобто цей показник повинен бути якнайменшим. Таким чином, критерій (6) забороняє тривале „існування” фазової точки динамічної системи на значній відстані від початку координат, отже динамічна система „буде намагатись” потрапити у задане положення якнайшвидше.

Множник перед критерієм  $\frac{1}{T}$  показує те

що, розмірність критерію співпадає з розмірністю його підінтегрального виразу (детальніше про це буде сказано нижче). Крім того, вираз (6) є середнім значенням підінтегрального виразу, яке він приймає протягом часу  $t \in [0, T]$ . Одиничні показники, які входять у критерій (6) мають різний фізичний зміст, тому їх необхідно призводити до одної розмірності або до безрозмірної величини. У подальшому будемо вважати, що цю функцію виконують коефіцієнти  $\delta_i$  ( $i=0, 1, 2, 3, 4$ ). Це означає, що коефіцієнти  $\delta_i$  ( $i=0, 1, 2, 3, 4$ ) представляються у вигляді добутку двох величин:

$$\delta_i = k_i \tilde{I}_i, \quad (7)$$

де  $k_i$  – ваговий коефіцієнт, який відображає важливість  $i$ -того одиничного критерію з виразу (6);  $\tilde{I}_i$  – деякий коефіцієнт, який зводить розмірність одиничного критерію до безрозмірного вигляду. Розкриємо сут-

ність коефіцієнтів  $\tilde{I}_i$  для кожного одиничного критерію:

$$\begin{cases} \tilde{I}_0 = \tilde{I}_2 = s^{-2}; \\ \tilde{I}_1 = \tilde{I}_3 = v^{-2}; \\ \tilde{I}_4 = u_{ном}^{-2}, \end{cases} \quad (8)$$

де  $v$  – номінальна швидкість руху крана;  $u_{ном}$  – значення керування, яке відповідає номінальному приводному зусиллю крана ( $u_{ном} = \frac{F_{ном}}{m_1}$ ). При синтезі оптимального

керування не враховуємо обмеження, які накладаються на привід крана. Це дасть змогу розв'язати задачу оптимального керування.

Для розв'язування поставленої задачі використаємо метод динамічного програмування [8]. Основне функціональне рівняння запишеться наступним чином

$$\begin{aligned} \min[\delta_0 y_0^2 + \delta_1 y_1^2 + \delta_2 (y_0 \Omega_0^2 + y_2)^2 + \\ + \delta_3 (y_1 \Omega_0^2 + y_3)^2 + \delta_4 u^2 + \frac{\partial S}{\partial y_0} y_1 + \\ + \frac{\partial S}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial S}{\partial y_2} y_3 + \frac{\partial S}{\partial y_3} (u - \Omega^2 y_2)] = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $S$  - функція Беллмана. Мінімум лівої частини рівняння (9) будемо шукати по параметру керування  $u$  для чого продиференціюємо її за  $u$  та прирівнюємо отримане до нуля

$$2\delta_4 u + \frac{\partial S}{\partial y_3} = 0. \quad (10)$$

Знайдемо з рівняння (10) керування  $u$ , тобто

$$u = -\frac{1}{2\delta_4} \frac{\partial S}{\partial y_3}. \quad (11)$$

Можна переконатись у тому, що вираз (11) доставляє лівій частині рівняння Беллмана (9) мінімум. Для цього необхідно перевірити знак другої похідної правої частини рівняння (9) по параметру керування  $u$ . У результаті вказаних розрахунків отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} [\delta_0 y_0^2 + \delta_1 y_1^2 + \delta_2 (y_0 \Omega_0^2 + y_2)^2 + \\ + \delta_3 (y_1 \Omega_0^2 + y_3)^2 + \delta_4 u^2 + \frac{\partial S}{\partial y_0} y_1 + \frac{\partial S}{\partial y_1} y_2 + \\ + \frac{\partial S}{\partial y_2} y_3 + \frac{\partial S}{\partial y_3} (u - \Omega^2 y_2)] = 2\delta_4 > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Підставимо вираз (11) у рівняння (9), в результаті чого отримаємо:

$$\begin{aligned} \min[\delta_0 y_0^2 + \delta_1 y_1^2 + \delta_2 (y_0 \Omega_0^2 + y_2)^2 + \\ + \delta_3 (y_1 \Omega_0^2 + y_3)^2 + \frac{1}{4\delta_4} (\frac{\partial S}{\partial y_3})^2 + \frac{\partial S}{\partial y_0} y_1 + \\ + \frac{\partial S}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial S}{\partial y_2} y_3 - \frac{\partial S}{\partial y_3} (\Omega^2 y_2 + \frac{1}{2\delta_4} \frac{\partial S}{\partial y_3})] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Рівняння (13) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати його розв'язок у вигляді квадратичної форми, як це прийнято при розв'язуванні подібних задач [9]:

$$S = \sum_{i=0}^3 A_i y_i^2 + A_4 y_0 y_1 + A_5 y_0 y_2 + \quad (14)$$

$$+ A_6 y_0 y_3 + A_7 y_1 y_2 + A_8 y_1 y_3 + A_9 y_2 y_3,$$

де  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$  – постійні коефіцієнти, які необхідно визначити.

Візьмемо частинні похідні з виразу (14) за параметрами  $y_0, y_1, y_2, y_3$  та отримаємо

$$\frac{\partial S}{\partial y_0} = 2A_0 y_0 + A_4 y_1 + A_5 y_2 + A_6 y_3, \quad (15)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = A_4 y_0 + 2A_1 y_1 + A_7 y_2 + A_8 y_3, \quad (16)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_2} = A_5 y_0 + A_7 y_1 + 2A_2 y_2 + A_9 y_3, \quad (17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_3} = A_6 y_0 + A_8 y_1 + A_9 y_2 + 2A_3 y_3. \quad (18)$$

Підставимо вирази (15-18) у рівняння (13) та після перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} y_0^2 (\delta_2 \Omega_0^4 - \frac{A_6^2}{4\delta_4}) + y_1^2 (A_4 - \frac{A_8^2}{4\delta_4} + \\ + \delta_3 \Omega_0^4) + y_2^2 (A_7 + \delta_0 + \delta_2 - \frac{A_9^2}{4\delta_4} - \\ - A_9 \Omega^2) + y_3^2 (A_9 + \delta_1 + \delta_3 - \frac{A_3^2}{\delta_4}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ y_0 y_1 (2A_0 - \frac{A_6 A_8}{2\delta_4}) + y_0 y_2 (A_4 - \\
 &- \frac{A_6 (A_9 + 2\delta_4 \Omega^2)}{2\delta_4} + 2\delta_2 \Omega_0^2) + y_0 y_3 (A_5 - \\
 &- \frac{A_3 A_6}{\delta_4}) + y_1 y_2 (2A_1 + A_5 - \frac{A_8 A_9}{2\delta_4} + \\
 &+ \frac{2\delta_4 \Omega^2}{2\delta_4}) + y_1 y_3 (A_6 + A_7 - \frac{A_8 A_9}{2\delta_4} - \\
 &- \frac{2A_8 \delta_4 \Omega^2}{2\delta_4}) + y_2 y_3 (2A_2 + A_8 - \\
 &- \frac{A_3 (A_9 + 2\delta_4 \Omega^2)}{\delta_4}) = 0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Рівняння (19) буде справедливим у тому випадку, коли вирази у дужках будуть дорівнювати нулю, оскільки  $y_0 \neq 0$ ,  $y_1 \neq 0$ ,  $y_2 \neq 0$ ,  $y_3 \neq 0$  одночасно. Рівняння (19) можна замінити на систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}
 \delta_2 \Omega_0^4 - \frac{A_6^2}{4\delta_4} = 0; \\
 A_4 - \frac{A_8^2}{4\delta_4} + \delta_3 \Omega_0^4 = 0; \\
 A_7 + \delta_0 + \delta_2 - \frac{A_9^2}{4\delta_4} - A_9 \Omega^2 = 0; \\
 A_9 + \delta_1 + \delta_3 - \frac{A_3^2}{\delta_4} = 0; \\
 2A_0 - \frac{A_6 A_8}{2\delta_4} = 0; \\
 A_4 - \frac{A_6 (A_9 + 2\delta_4 \Omega^2)}{2\delta_4} + 2\delta_2 \Omega_0^2 = 0; \\
 A_5 - \frac{A_3 A_6}{\delta_4} = 0; \\
 2A_1 + A_5 - \frac{A_8 (A_9 + 2\delta_4 \Omega^2)}{2\delta_4} = 0; \\
 A_6 + A_7 - \frac{A_8 A_9}{2\delta_4} - \frac{2A_8 \delta_4 \Omega^2}{2\delta_4} = 0; \\
 2A_2 + A_8 - \frac{A_3 (A_9 + 2\delta_4 \Omega^2)}{\delta_4} = 0.
 \end{cases} \tag{20}$$

Використовуючи рівняння (11) та (18), запишемо:

$$u = -\frac{A_6 y_0 + A_8 y_1 + A_9 y_2 + 2A_3 y_3}{2\delta_4}. \tag{21}$$

Отже, нас цікавлять лише три коефіцієнта  $A_6$ ,  $A_8$ ,  $A_9$ ,  $A_3$ . Для їхнього знаходження перейдемо до іншої системи із чотирьох рівнянь, яку можна отримати з системи (20), зробивши деякі перетворення:

$$\begin{cases}
 \delta_2 \Omega_0^4 - \frac{A_6^2}{4\delta_4} = 0; \\
 A_9 + \delta_1 + \delta_3 - \frac{A_3^2}{\delta_4} = 0; \\
 A_8^2 - 2A_6 (A_9 + 2\delta_4 \Omega^2) + 8\delta_2 \delta_4 \Omega_0^2 - \\
 - 4\delta_3 \delta_4 \Omega_0^4 = 0; \\
 4\delta_0 \delta_4 + 4\delta_2 \delta_4 - 4A_6 \delta_4 + 4A_3 A_8 - \\
 - A_9^2 - 4A_9 \delta_4 \Omega^2 - 8\delta_3 \delta_4 \Omega_0^2 = 0.
 \end{cases} \tag{22}$$

Перше рівняння системи рівнянь (22) залежить тільки від невідомого коефіцієнта  $A_6$ , тому його можна розв'язати не враховуючи інші рівняння системи (22). У результаті розв'язання отримаємо

$$A_6 = \pm 2\Omega_0^2 \sqrt{\delta_4 \delta_2}. \tag{23}$$

Вибір знака перед виразом  $A_6$  необхідно проводити із врахуванням вимоги стійкості розв'язку системи рівнянь (3). Детальніше про це буде сказано трохи пізніше.

Із другого рівняння системи (22) виразимо невідомий коефіцієнт  $A_9$ :

$$A_9 = \frac{A_3^2}{\delta_4} - \delta_1 - \delta_3. \tag{24}$$

Надалі із четвертого рівняння системи (22) знайдемо коефіцієнт  $A_8$ :

$$\begin{aligned}
 A_8 = &\frac{A_6 \delta_4}{A_3} + \frac{A_9^2}{4A_3} + \frac{A_9 \delta_4 \Omega^2}{A_3} + \\
 &+ \frac{2\delta_3 \delta_4 \Omega_0^2}{A_3} - \frac{\delta_0 \delta_4}{A_3} - \frac{\delta_2 \delta_4}{A_3}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Підставляючи вирази (24) та (25) у третє рівняння системи (22), сформуємо алгебраїчне рівняння восьмого степеня відносно невідомого коефіцієнта  $A_3$ . Вводячи заміну  $A_3^2 = \tilde{A}_3$ , зведемо отримане рівняння восьмої степені до рівняння четвертої степені:

$$\tilde{A}_3^4 + \tilde{A}_3^3 B_1 + \tilde{A}_3^2 B_2 + \tilde{A}_3 B_3 + B_4 = 0, \tag{26}$$

де  $B_1, B_2, B_3, B_4$  – коефіцієнти, які знаходяться із таких виразів:

$$\begin{cases} B_1 = 4\delta_4(2\delta_4\Omega^2 - \delta_3 - \delta_1); \\ B_2 = 2\delta_4^2(3\delta_1^2 + 3\delta_3^2 + 6\delta_1(\delta_3 - 2\delta_4\Omega^2) - 4\delta_4(3A_6 + \delta_0 + \delta_2 - 2\delta_4\Omega^4) + \delta_3\delta_4(8\Omega_0^2 - 12\Omega^2)); \\ B_3 = 4\delta_4^3((2\delta_4\Omega^2 - \delta_1 - \delta_3)(-4(A_6 + \delta_0 + \delta_2)\delta_4 + (\delta_1 + \delta_3)(\delta_1 + \delta_3 - 4\delta_4\Omega^2)) - 8\delta_4(-4\delta_2\delta_4 + \delta_3(\delta_1 + \delta_3 - 2\delta_4\Omega^2))\Omega_0^2 - 16\delta_3\delta_4^2\Omega_0^4); \\ B_4 = \delta_4^4(\delta_1^2 + \delta_3^2 + 4(A_6 - \delta_0 - \delta_2)\delta_4 + 2\delta_1(\delta_3 - 2\delta_4\Omega^2) - 4\delta_3\delta_4(\Omega^2 - 2\Omega_0^2))^2. \end{cases} \quad (27)$$

За допомогою методу Декарта-Ейлера [10] отримані чотири корені рівняння (25). Оскільки коренів рівняння (24) – чотири, то існує вісім значень коефіцієнта  $A_3$ . Необхідно з цих значень обрати один, для чого використаємо теорію стійкості розв'язків диференціальних рівнянь. Застосуємо алгебраїчний критерій Рауса-Гурвіца [11]. Для цього зведемо систему диференціальних рівнянь (3) до одного диференціального рівняння четвертого порядку, тобто

$$\begin{aligned} y_0^{VI} + \frac{A_3}{\delta_4} \ddot{y}_0 + \left( \frac{A_9}{2\delta_4} + \Omega^2 \right) \ddot{y}_0 + \\ + \frac{A_8}{2\delta_4} \dot{y}_0 + \frac{A_6}{2\delta_4} y_0 = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає диференціальному рівнянню (28):

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \frac{A_3}{\delta_4} \lambda^3 + \left( \frac{A_9}{2\delta_4} + \Omega^2 \right) \lambda^2 + \\ + \frac{A_8}{2\delta_4} \lambda + \frac{A_6}{2\delta_4} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Складемо матрицю Гурвіца:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{A_3}{\delta_4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{A_8}{2\delta_4} & \frac{A_9}{2\delta_4} + \Omega^2 & \frac{A_3}{\delta_4} & 1 \\ 0 & \frac{A_6}{2\delta_4} & \frac{A_8}{2\delta_4} & \frac{A_9}{2\delta_4} + \Omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_6}{2\delta_4} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Тепер складемо діагональні мінори матриці Гурвіца (30), які із використанням виразів (24) та (25), можна подати наступними виразами

$$\Delta_1 = \frac{A_3}{\delta_4}; \quad (31)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{A_3}{\delta_4} & 1 \\ \frac{A_8}{2\delta_4} & \frac{A_9}{2\delta_4} + \Omega^2 \end{vmatrix} = \quad (32)$$

$$= A_3 A_9 - A_8 \delta_4 + 2 A_3 \delta_4 \Omega^2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{A_3}{\delta_4} & 1 & 0 \\ \frac{A_8}{2\delta_4} & \frac{A_9}{2\delta_4} + \Omega^2 & \frac{A_3}{\delta_4} \\ 0 & \frac{A_6}{2\delta_4} & \frac{A_8}{2\delta_4} \end{vmatrix} = \quad (33)$$

$$= -2A_3^2 A_6 - A_8^2 \delta_4 + A_3 A_8 (A_9 + 2\delta_4 \Omega^2).$$

Необхідною умовою стійкості розв'язку диференціального рівняння (28) є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння (29). Можемо відкинути від'ємні корені, які були отримані при знаходженні невідомого коефіцієнта  $A_3$ . Отже, залишається чотири значення коефіцієнта  $A_3$ , з яких необхідно обрати лише один. Позначимо їх так:  $A_{3(1)}, A_{3(2)}, A_{3(3)}, A_{3(4)}$ .

Достатніми умовами стійкості руху системи є додатність діагональних мінорів (31)-(33) матриці Гурвіца (30). Перший діагональний мінор співпадає із необхідною умовою стійкості руху системи, оскільки коефіцієнт  $\delta_4$  завжди додатній. Аналіз достатніх умов стійкості руху динамічної системи, які представляються як:

$$\begin{cases} \Delta_2 > 0; \\ \Delta_3 > 0, \end{cases} \quad (34)$$

є досить складною задачею. Це пов'язано з тим, що невідомі коефіцієнти, які входять у вирази (32) та (33), залежать від коефіцієнтів  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  та від частоти  $\Omega$ . Для того, щоб визначити значення коефіцієнта  $A_3$  розрахуємо значення діагональних мінорів  $\Delta_2$  та  $\Delta_3$  для наступних параметрів системи:  $l=10$  м;  $m_1=1000$  кг;  $m_2=2000$  кг;  $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0,2$ ;  $\delta_4=1-\delta_1-\delta_2-\delta_3$ . Розрахунки будемо проводити для всіх коефіцієнтів:  $A_{3(1)}$ ,

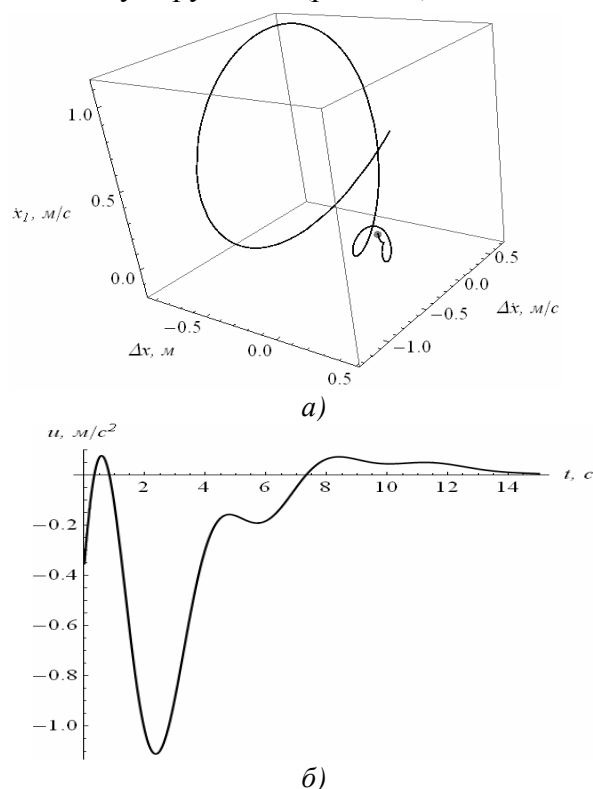
$A_{3(2)}, A_{3(3)}, A_{3(4)}$ . Результати розрахунків занесемо у табл. 1.

**Таблиця 1.** Значення діагональних мінорів  $\Delta_2$  та  $\Delta_3$  для коефіцієнтів  $A_{3(1)}, A_{3(2)}, A_{3(3)}, A_{3(4)}$   
**Table 1.** Values of diagonal minors  $\Delta_2$  and  $\Delta_3$  for coefficients  $A_{3(1)}, A_{3(2)}, A_{3(3)}, A_{3(4)}$

Діагональні мінори	Коефіцієнти			
	$A_{3(1)}$	$A_{3(2)}$	$A_{3(3)}$	$A_{3(4)}$
$\Delta_2$	19,81i	-2,66i	3,09	6,68
$\Delta_3$	-54,83	8,71	-5,87	13,58

Із всіх приведених значень діагональних мінорів лише коефіцієнт  $A_{3(4)}$  забезпечує виконання умов (34), тобто рух динамічної системи буде стійким. Знайдений коефіцієнт  $A_3$  означає те, що оптимізаційна задача у вигляді зворотного зв'язку розв'язана.

Приведемо графіки, які відповідають оптимальному керуванню (рис. 2, а).



**Рис. 2.** Графіки: а) неklasичний фазовий портрет руху динамічної системи у координатах „кут відхилення каната з вантажем від вертикалі – швидкість кута відхилення каната з вантажем від вертикалі – швидкість руху крана”; б) функції керування рухом системи  
**Fig. 2.** The plots: a) non-classical phase portrait of the dynamic movement in coordsnades „angle rope with a load of vertical - the speed of the rope deflection angle from the vertical load - the speed of the crane”; b) the control-function of svstem.

Аналіз графіків на рис. 2 показує, що протягом гальмування фазова точка переходить у початок координат, який позначено точкою сірого кольору. Це означає, що кран зупиняється, а коливання вантажу припиняються. Перевагою синтезованого оптимального керування є те, що воно враховує фактичний стан динамічної системи.

Аналіз графіка на рис. 2, б показує, що протягом гальмування крана функція керування його рухом може набувати великих значень. Для встановлення можливості реалізації оптимального керування необхідно проаналізувати обмеження, які накладаються на керування. Розв'язок оптимізаційної задачі виконаний без врахування обмежень. Подальші дослідження синтезованого оптимального керування полягають у розробці способів врахування різноманітних обмежень, які накладаються на функцію керування.

## ВИСНОВКИ

Синтезоване у роботі оптимальне керування рухом крана з вантажем на гнучкому підвісі дозволяє на етапі гальмування крана усунути небажані коливання вантажу. Це означає, що зупинка крана буде супроводжуватись гасінням коливань вантажу, що збільшує продуктивність крана та значно покращує умови роботи кранівника. Оскільки оптимальне керування рухом крана визначене у вигляді зворотного зв'язку, то його практична реалізація не викликає ускладнень під час дії на вантаж та кран зовнішніх непередбачуваних впливів, наприклад, поривів вітру. Це дозволяє використовувати його для керування рухом вантажопідйомних кранів у морських та річкових портах.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Подобед Н.Е.* Математическое моделирование ветровых нагрузок на механизмы передвижения порталных кранов с прямой стрелой / Н.Е. Подобед, В.А. Подобед, В.И. Меньшиков // Вестник МГТУ, т.12, № 1. – 2009. – С. 27-33, 2009.

2. *Комаров М.С.* Динамика грузоподъемных машин / Комаров М.С. – М.: Машиностроение, 1969. – 206 с.
3. *Казак С.А.* Динамика мостовых кранов / Казак С.А. – М.: Машиностроение, 1968. – 331 с.
4. *Смехов А.А.* Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами / А.А. Смехов, Н.И. Єрофеев. – М.: Машиностроение, 1975. – 239 с.
5. *Ловейкин В.С.* Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин / В.С. Ловейкин – К.: УМК ВО, 1990. – 168 с.
6. *Герасимьяк Р.П.* Анализ и синтез крановых электромеханических систем / Р.П. Герасимьяк, В.А. Лещёв. – Одесса.: СМІЛ, 2008. – 192 с.
7. *Будиков Л.Я.* Многопараметрический анализ динамики грузоподъемных кранов мостового типа / Л.Я. Будиков – Луганск: Издательство ВУГУ, 1997. – 210 с.
8. *Беллман Р.* Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус [перевод с англ. Митрофановой, Н.М., Первозванского А.А., Хусу А.П., Шалаевского О.В.] – М.: Наука, 1965. – 460 с.
9. *Олейников В.А.* Основы оптимального и экстремального управления / В.А. Олейников, Н.С. Зотов, А.М. Пришвин. – М.: Высшая школа, 1969. – 296 с.
10. *Корн Г.* Справочник по высшей математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
11. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления / Е.П. Попов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 304 с.
- N.E. Podobed, V.A. Podobed, V.I. Menshikov. Vistnik MGTU, T. 12, № 1 –. 27-33.
2. *Komarov M.S.* 1968. Dinamica gruzopodyomnih mashin [Dynamics of load-lifting machines]. Moskow. Mashinistroyeniye, 206.
3. *Kazak S.A.* 1968. Dinamica mostovih kranov [Dynamics of bridge cranes]. Moskow. Mashinistroyeniye, 331.
4. *Smehov A.A., Erofeev N.I.* 1975. Optimalnoye upravlenie podemno-transportnyuyu machinami [Optimal control of handling machinery]. Moskow. Mashinistroyeniye, 239.
5. *Loveikin V.S.* 1990. Raschety optimalnih regimov dvizhenia mehanizmov stroitel-nih mashin [Calculation of optimum modes of movement mechanisms of construction machinery]. Kiev. UMK. 168.
6. *Gerasimyak R.P., Leschev V.A.* 2008. Analiz i sintez kranovih elektromehani-cheskikh system [Analysis and synthesis of crane electromechanical systems]. Odessa. SMIL. 192.
7. *Budikov L.Ya.* 1997. Mnogoparametricheskiy analiz dinamiki kranov mostovogo tipa [Multivariable analysis of the dynamics of cargo cranes bridge type]. Lugansk. VUGU. 210.
8. *Bellman R., Dreifus S.* 1965. Prikladnie zadachi dinamicheskogo programmirovania [Applied of dynamic programming]. Moskow. Nauka. 460.
9. *Oleinikov V.A., Zotov N.S., Prishvin A.M.* 1969. Osnovy optimalnogo i extremalnogo upravlenia [Foundations of optimal and extreme control]. Moskow. Vyschaya shkola. 296.
10. *Korn G., Korn T.* 1973. Spravochnik po visshei matematike dla nauchnih rabotnikov i ingenerov [Handbook of higher mathematics for scientists and engineers] Moskow. Nauka. 832.
11. *Popov E.P.* 1989. Teoria lineinyh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya i upravleniya [The theory of linear systems of automatic regulation and control]. Moskow. Gl. red. fiz.-mat. lit. 304.

REFERENCES