

УТОЧНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОЛИВАНЬ ВАНТАЖУ ПРИ ПОВОРІ КРАНА ПІДЙОМНО-ТРАНСПОРТНОЇ МАШИНИ

Михайло Діктерук¹, Юрій Човнюк², Костянтин Почка¹

¹ Київський національний університет будівництва і архітектури, Повітрофлотський просп., 31, Київ, Україна,

² Національний університет біоресурсів і природокористування України, вул. Героїв Оборони, 11, Київ, Україна

THE SPECIFIED MATHEMATICAL MODEL OF FLUCTUATIONS OF FREIGHT AT TURN OF THE CRANE OF THE HOISTING-AND-TRANSPORT CAR

Mykhaylo Dykteruk¹, Yuriy Chovnyuk², Konstantin Pochka¹

¹ Kyiv National University of Construction and Architecture, Povitroflotsky Prospect, 31, Kyiv, Ukraine

² National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Heroyiv Oborony st., 11, Kyiv, Ukraine

АНОТАЦІЯ. У статті запропонована уточнена математична модель стрілової системи крана з двома ступенями вільності руху в умовах рівномірного та нерівномірного нерівноприскореного повороту. Встановлено умови, за яких виникають квазірезонансні коливання вантажу на канаті, за наявності сухого, в'язкого та нелінійного (квадратичного) тертя.

Ключові слова: підйомно-транспортні машини, нерівномірний поворот, стріла, канат, тертя.

АННОТАЦИЯ. В статье предложена уточнённая математическая модель стреловой системы крана с двумя степенями свободы движения в условиях равномерного и неравномерного неравноускоренного поворота. Установлены условия, при которых возникают квазирезонансные колебания груза на канате, при наличии сухого, вязкого и нелинейного (квадратичного) трения.

Ключевые слова: подъёмно-транспортные машины, неравномерный поворот, стрела, канат, трение.

ABSTRACT. Purpose. Consists in justification of model, which всчитываем influence of centrifugal forces on fluctuations of freight which is suspended on a flexible rope, at turn of an arrow of the crane for determination of amplitudes of fluctuations in zones of possible resonances. **Methodology/approach.** Researches in this work are of analytical character. **Findings.** The mathematical model of boom system of the load-lifting crane with two degrees of freedom of movement and in the presence of different types of viscous and nonlinear viscous (quadratic) friction is offered. Options of movement of a leading link (arrow) are considered at its uniform and uneven not uniformly accelerated turn. The developed mathematical model is part of the generalized dynamic model of the crane in the presence of powers of linear/nonlinear viscous friction and can be used further for creation of optimum operated crane mechanisms. **Research limitations/implications.** Results of work can be used further for specification and improvement of existing methods of engineering calculations of operated crane systems both at design/designing stages, and in modes of real operation. **Originality/value.** The work has scientific and practical interest.

Key words: hoisting-and-transport cars, uneven turn, arrow, rope, friction.

Подано 5.03.2014; прийнято 26.05.2014

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Відомо, що робота підйомно-транспортних машин (ПТМ), яка (завжди узгоджена з виробничим циклом), впливає на ефективність, час та продуктивність експлуатації виробничого устаткування, транспортних засобів, тобто на весь технологічний процес промислово-транспортних підприємств. Характер робочих рухів (зокрема, наявні небажані коливання деяких вузлів кранів) визначає навантажувальні, часові, геометричні, кінематично-силові та інші параметри навантажувально-розвантажувальних робіт, транспортно-логістичних процесів.

Відомо, що у ПТМ існують деякі обмеження, які впливають на їхні характеристики: швидкість руху, повороту, захоплення вантажу, прискорення, обертальні моменти. Першочергове значення також має і те, що по суті ПТМ є динамічними системами, стан яких змінюється у часі (завдяки наявним збуренням від тиску вітру, температурних коливань, динамічних навантажень тощо).

Для вдосконалення та оптимізації конструктивно-експлуатаційних показників ПТМ може бути використана уточнена математична модель процесу їх експлуатації, яка встановлює умови “шкідливих” (небажаних) резонансів у даній механічній сис-

темі (зокрема, розгойдувань вантажу на канаті крана при здійсненні останнім маневру повороту).

ОГЛЯД ПУБЛІКАЦІЙ

Зменшення продуктивності ПТМ виникає, зокрема, при розгойдуванні вантажу на гнучкому підвісі (канаті). Особливо значних амплітуд це розгойдування вантажу набуває при повороті крана внаслідок дії відцентрової сили та сили інерції вантажу за режимів пуску/гальмування ПТМ.

Отже, вантаж одночасно здійснює коливання, що відбуваються у площині хитання стріли, а також зміщується з цієї площини. У цьому разі суперпозиція цих двох коливань ускладнює роботу кранівника та суттєво знижує безпеку виконання різноманітних робіт на ПТМ. З метою зменшення розгойдувань вантажу слід збільшувати тривалість розгону, застосовувати керування електродвигуном, що розганяє або гальмує кран за законом відповідно до [1, 2]. Слід зазначити, що подібні методи керування не враховують різноманітні конструктивні та експлуатаційні фактори, а саме: зазори у передавальних механізмах та жорсткість елементів конструкції ПТМ.

Тому актуальною є задача оптимізації режимів повороту крана, за яких враховано вплив конструктивних особливостей ПТМ, а небажані коливання елементів є мінімальні. Нелінійні маятникові коливання вантажу на гнучкому підвісі за різних режимів обертання розглянуті у [3]. Автори [6], використовуючи підходи [4, 5], обґрунтовують математичну модель коливань вантажу при повороту крана ПТМ, проте у даній роботі допущені недоліки і знайдені розв'язки не визначають вірно умови резонансів, а також відсутні впливи сил тертя (різного роду), які уточнюють характеристики руху крана, зокрема, за наявності резонансних ситуацій. Таким чином, наявні спроби та моделі коливань вантажу при поворотах кранів ПТМ, вимагають подальших уточнень і обґрунтувань.

МЕТА РОБОТИ

Мета даної роботи полягає у обґрунтуванні моделі, яка враховує вплив відцентрових сил на коливання вантажу, що підвищений на гнучкому канаті, при повороті стріли крана для визначення амплітуд коливань у зонах можливих резонансів.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Для визначення функції Лагранжа і виведення рівнянь руху вантажу можна використати результати досліджень [3, 6]. Введемо наступні позначення: m – маса вантажу; l – довжина підвісу (каната); r – відстань від точки підвісу до осі обертання; ω – колова швидкість повороту крана; θ – кут відхилення каната від вертикалі; ϕ – кут повороту стріли крана; t – час.

Остаточно можна отримати наступну математичну модель руху вантажу на канаті крана під час його обертання навколо власної осі:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \left(\frac{r}{l} + \sin \theta \right) \cos \theta \dot{\phi}^2 + \frac{g}{l} \sin \theta = 0; \\ \dot{\phi} = \phi(t), \end{cases} \quad (1)$$

де $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння.

Якщо ввести позначення $\alpha = r/l$, $\beta = g/l$, тоді (1) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - (\alpha + \sin \theta) \cos \theta \dot{\phi}^2 + \beta \sin \theta = 0; \\ \dot{\phi} = \phi(t). \end{cases} \quad (2)$$

1. *Розглянемо випадок повороту крана з постійною кутовою швидкістю ω , де $\dot{\phi} = \omega = \text{const}$.* Крім того, вважатимемо θ малим кутом, тобто $\theta \ll 1$. Тоді (2) приймає вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - (\alpha + \theta) \omega^2 + \beta \theta = 0; \\ \dot{\phi} = \omega t. \end{cases} \quad (3)$$

Рівняння для θ у (3) можна розв'язати за початкових умов: $\theta|_{t=0} = \dot{\theta}|_{t=0} = 0$. Розв'язок можна подати наступним співвідношенням:

$$\theta(t) = \frac{\alpha\omega^2}{(\beta - \omega^2)} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right), \quad (4)$$

де $\Omega = \sqrt{\beta - \omega^2}$; $\beta > \omega^2$

$$\theta(t) = \frac{\alpha\omega^2}{\gamma^2} \operatorname{ch}(\gamma t) - \frac{\alpha\omega^2}{\gamma^2}, \quad (5)$$

де $\gamma = \sqrt{\omega^2 - \beta}$, $\omega^2 > \beta$.

При $\beta = \omega^2$ маємо:

$$\theta(t) = \frac{\alpha\omega^2 t^2}{4}. \quad (6)$$

2. Розв'яжемо систему (2) за будь-яких значень θ та початкових умов $\theta|_{t=0} = \dot{\theta}|_{t=0} = 0$ для $\phi = \omega t$ чисельними методами. Проаналізуємо вплив параметрів (α, β, ω) на амплітуду коливань та закон $\theta(t)$. Для уточненого аналізу використаємо метод фазових портретів $(\theta, \dot{\theta})$ та $(\ddot{\theta}, \dot{\theta})$. Результати чисельного аналізу для різних значень α, β та $\omega = \text{const}$ подані далі на графіках на рис. 1.

3. Розглянемо випадок резонансу, коли $\beta = \omega^2$, а $\theta(t)$ визначається співвідношенням (6). Оскільки вантаж не повинен відхилятися більше, ніж на 90° , (тому що його траєкторію в цьому випадку не можна представити у вигляді кола), тоді можна визначити область значень α та β , за яких для даної ω амплітуда коливань θ не перевищує 90° . Подамо (6) при $\beta = \omega^2$ у наступному вигляді:

$$\theta = \frac{\alpha\beta t^2}{4}. \quad (7)$$

Таблиця 1. Значення t^*, c для різних α, β і ω

Table 1. Values t^*, c for the different α, β і ω

α	$\beta = \omega^2, c^{-2}$							
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
1	7,93	4,85	4,58	3,96	3,54	3,24	2,80	2,51
2	5,60	3,96	3,24	2,80	2,51	2,29	1,98	1,77
3	4,58	3,24	2,64	2,29	2,05	1,87	2,62	1,45
4	3,96	2,80	2,29	1,98	1,77	1,62	1,40	1,25
5	3,54	2,51	2,05	1,77	1,59	1,45	1,25	1,12
6	3,24	2,29	1,87	1,62	1,45	1,32	1,14	1,02
7	3,00	2,12	1,73	1,50	1,34	1,22	1,06	0,95

Тоді проміжок часу, через який $\theta = \pi/2$, складає:

$$t^* = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta}}. \quad (8)$$

У таблиці подані значення t^*, c для різних значень α, β і ω .

4. Розглянемо далі випадок нерівномірного нерівноприскороного повороту стріли крана, тобто $\dot{\phi} \neq 0$. Для дослідження такого руху слід задати таку залежність $\omega(t)$, яка найбільш точно відповідає руху реальної машини. Для цього можна використати залежність [4, 6]:

$$\omega(t) = \omega_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{2 \cdot t_{\Pi}} t\right), \quad (9)$$

де ω_0 – кутова швидкість повороту стріли крана; t_{Π} – час пуску механізму повороту (згідно [4] $t_{\Pi} = 5 c$). У подальших чисельних розрахунках на ПЕОМ цього випадку (розв'язок системи (2) за умови $\dot{\phi} \equiv \omega(t)$ (9)) α змінюється у межах (1...5), β змінюється у межах (0,5...1) c^{-2} , а ω набуває значень (0,4; 0,6; 1,0) c^{-2} . Результати розрахунків на ПЕОМ подані на рис. 2.

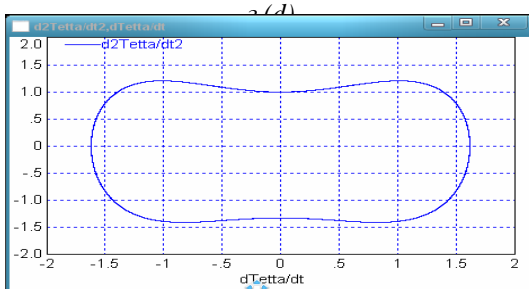
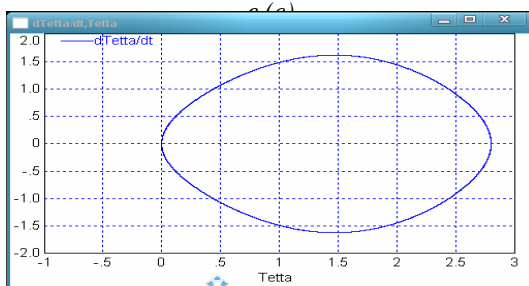
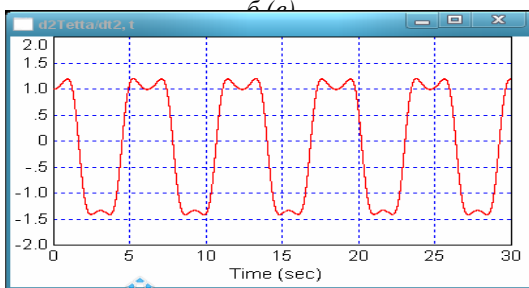
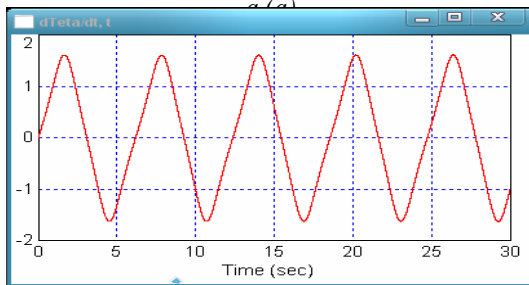
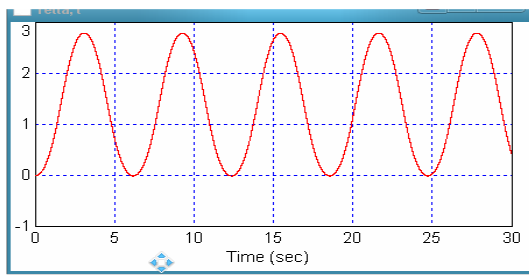
Для узагальнення досліджень ми провели розрахунки на ПЕОМ для випадків, коли наявні різні види в'язкого тертя, а саме:

- 1) класичне (ньютонівське) в'язке тертя $\sim \dot{\theta}$;
- 2) нелінійне квадратичне в'язке тертя $\sim \dot{\theta}^2$.

У цих випадках $\omega = \omega(t)$, а рівняння для визначення закону $\theta(t)$ буде:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - (\alpha + \sin \theta) \cos \theta \dot{\phi}^2 + \gamma_1 \dot{\theta} + \\ \quad + \gamma_2 \dot{\theta}^2 + \beta \sin \theta = 0; \quad (10) \\ \dot{\phi} = \omega(t) = \omega_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{2 \cdot t_{\Pi}} t\right). \end{cases}$$

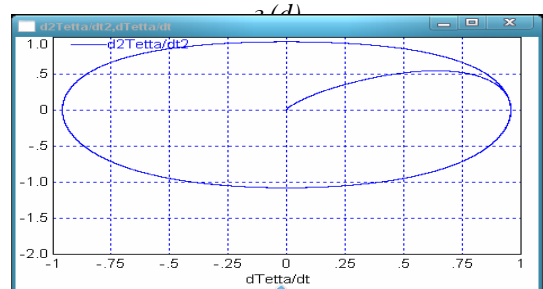
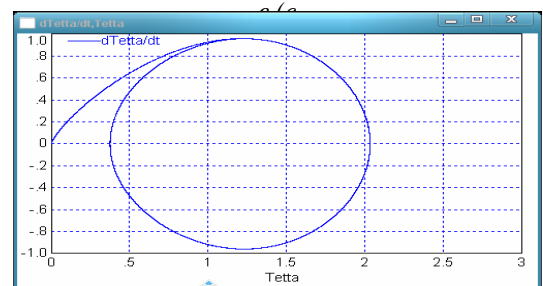
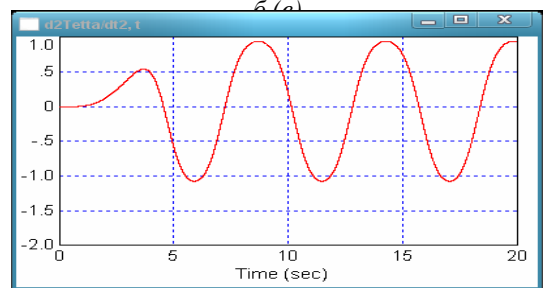
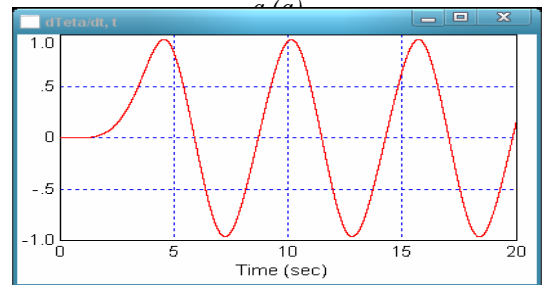
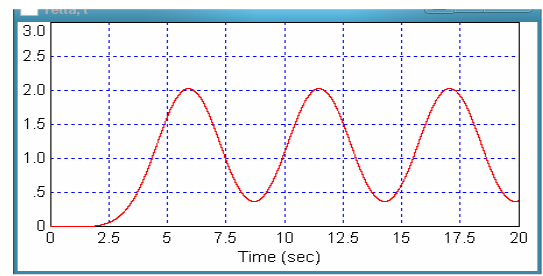
Результати чисельного розрахунку на ПЕОМ моделі руху відповідно до (10) подані на рис. 3 та 4.



$\partial (e)$

Рис. 1. Графічні залежності $\theta(t) - a$, $\dot{\theta}(t) - b$, $\ddot{\theta}(t) - c$, $(\theta, \dot{\theta}) - d$ та $(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) - e$ при наступних параметрах $\alpha = 1$, $\beta = 0,2 \text{ c}^{-2}$, $\omega = 1,0 \text{ c}^{-1} = \text{const}$

Fig. 1. Graphic dependences $\theta(t) - a$, $\dot{\theta}(t) - b$, $\ddot{\theta}(t) - c$, $(\theta, \dot{\theta}) - d$ та $(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) - e$ at the following parameters $\alpha = 1$, $\beta = 0,2 \text{ c}^{-2}$, $\omega = 1,0 \text{ c}^{-1} = \text{const}$



$\partial (e)$

Рис. 2. Графічні залежності $\theta(t) - a$, $\dot{\theta}(t) - b$, $\ddot{\theta}(t) - c$, $(\theta, \dot{\theta}) - d$ та $(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) - e$ при наступних параметрах $\alpha = 3$, $\beta = 0,5 \text{ c}^{-2}$, $\omega_0 = 0,6 \text{ c}^{-1}$, $\dot{\varphi} \neq 0$

Fig. 2. Graphic dependences $\theta(t) - a$, $\dot{\theta}(t) - b$, $\ddot{\theta}(t) - c$, $(\theta, \dot{\theta}) - d$ та $(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) - e$ at the following parameters $\alpha = 3$, $\beta = 0,5 \text{ c}^{-2}$, $\omega_0 = 0,6 \text{ c}^{-1}$, $\dot{\varphi} \neq 0$

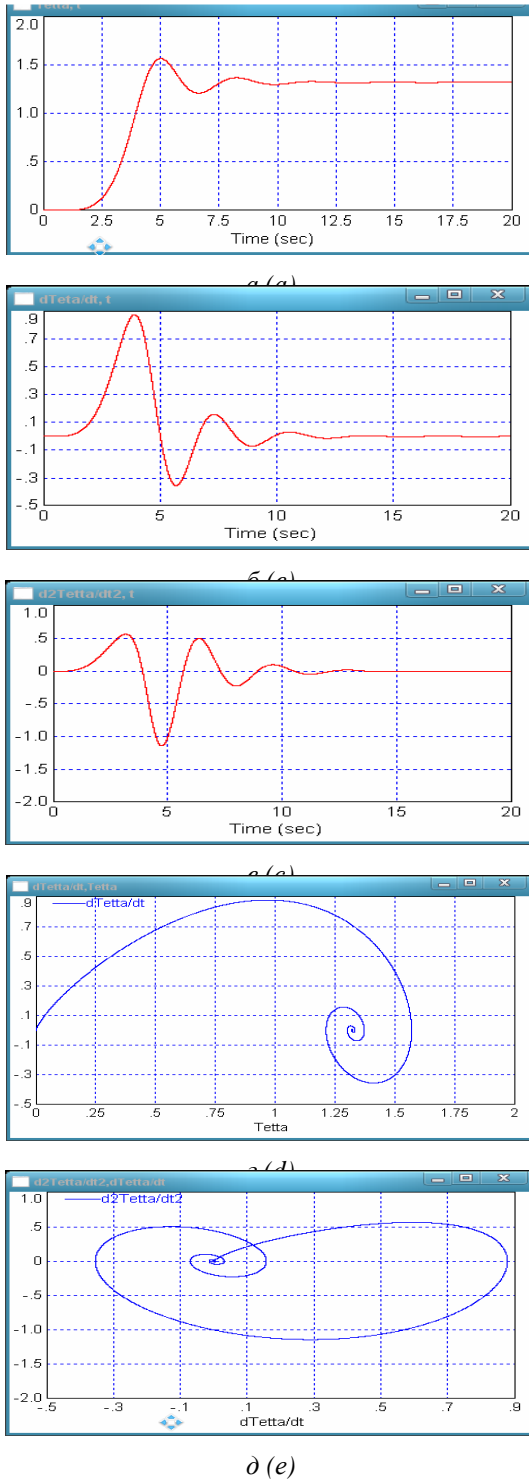


Рис. 3. Графічні залежності $\theta(t) - a$, $\dot{\theta}(t) - b$, $\ddot{\theta}(t) - c$, $(\theta, \dot{\theta}) - d$ та $(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) - e$ при наступних параметрах $\alpha = 3$, $\beta = 1,0 c^{-2}$, $\omega_0 = 1,0 c^{-1}$, $\dot{\varphi} \neq 0$ та при наявності лінійного в'язкого тертя $\gamma = 1,0 c^{-1}$

Fig. 3. Graphic dependences $\theta(t) - a$, $\dot{\theta}(t) - b$, $\ddot{\theta}(t) - c$, $(\theta, \dot{\theta}) - d$ та $(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) - e$ at the following parameters $\alpha = 3$, $\beta = 1,0 c^{-2}$, $\omega_0 = 1,0 c^{-1}$, $\dot{\varphi} \neq 0$ and in the presence of linear viscous friction $\gamma = 1,0 c^{-1}$

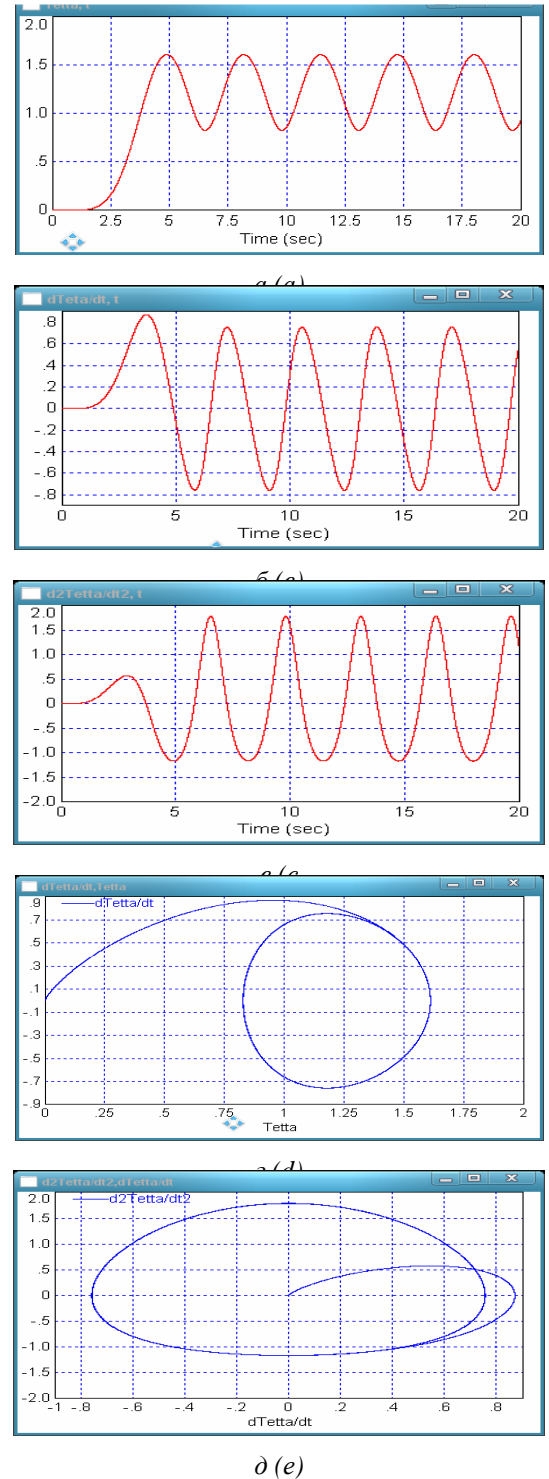


Рис. 4. Графічні залежності $\theta(t) - a$, $\dot{\theta}(t) - b$, $\ddot{\theta}(t) - c$, $(\theta, \dot{\theta}) - d$ та $(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) - e$ при наступних параметрах $\alpha = 3$, $\beta = 1,0 c^{-2}$, $\omega_0 = 1,0 c^{-1}$, $\dot{\varphi} \neq 0$ та при наявності нелінійного в'язкого тертя $\gamma = 1,0 c^{-1}$

Fig. 4. Graphic dependences $\theta(t) - a$, $\dot{\theta}(t) - b$, $\ddot{\theta}(t) - c$, $(\theta, \dot{\theta}) - d$ та $(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) - e$ at the following parameters $\alpha = 3$, $\beta = 1,0 c^{-2}$, $\omega_0 = 1,0 c^{-1}$, $\dot{\varphi} \neq 0$ and in the presence of nonlinear viscous friction $\gamma = 1,0 c^{-1}$

ВИСНОВКИ

1. Запропонована математична модель стрілової системи вантажопідйомного крана з двома ступенями вільності руху та наявності різних видів в'язкого та нелінійного в'язкого (квадратичного) тертя.

2. Розглянуто варіанти руху ведучої ланки (стріли) за її рівномірному та нерівномірному нерівноприскореному повороті. Розроблена математична модель є частиною узагальненої динамічної моделі крана за наявних сил лінійного/нелінійного в'язкого тертя і може бути у подальшому використана для створення оптимальних керованих кранових механізмів.

3. Визначені часові параметри при входженні механічної системи у резонанс ($\beta = \omega^2$) за $\theta \ll 1$ при різних значеннях α , β та ω .

4. Отримані чисельні результати дослідження даної механічної системи методом фазових портретів дозволяють встановити суттєві відмінності впливу різновидів сил тертя на закон руху $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ та $\ddot{\theta}(t)$.

5. Результати даної роботи можуть бути у подальшому використані для уточнення та вдосконалення існуючих методів інженерних розрахунків керованих кранових систем як на стадіях проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Найденко Е.В.* Микропроцессорное управление асинхронным электроприводом механизма поворота с подвешенным грузом // Электротехнические и компьютерные системы. – 2009. – Вып. 73. – С. 16-20.

2. *Тепляков А.Г.* Реализация оптимального управления электроприводом механизма поворота // Электромашинобудовання та електрообладнання. – 2004. – Вып. 62. – С. 36-39.

3. *Ловейкин В.С., Бойко А.В., Човнюк Ю.В.* Нелінійні маятникові коливання вантажу на гнучкому підвісі при різних режимах обертання // Вісник ТНТУ. – 2010. – Том 15. – № 3. – С. 41-48.

4. *Иванченко Ф.К. и др.* Расчёты грузоподъёмных и транспортирующих машин. – К.: Вища школа, 1978. – 576 с.

5. *Приймаков О.Г., Градинський Ю.О.* Визначення енергокінематичних параметрів кулькових млинів для виготовлення вогнегасних порошків // Проблемы пожарной безопасности. – 2013. – Вып. 33. – С. 147-156.

6. *Приймаков О.Г., Градинський Ю.О.* Математична модель коливань вантажу при повороті крана підйомно-транспортної машини // Сільськогосподарські машини. – 2013. – Вып. 25. – С. 111-117.

REFERENCES

1. *Najdenko E.V.*, 2009. Mikroprocessornoe upravlenie asinhronnym jelektroprivodom mehanizma povorota s podveshennym gruzom [Microprocessor control of the asynchronous electric drive of the mechanism of turn with the suspended freight]. Jeletrotehniczeskie i komp'juternye sistemy [Electrotechnical and computer systems], no. 73. 16-20.

2. *Tepljakov A.G.*, 2004. Realizacija optimal'nogo upravlenija jelektroprivodom mehanizma povorota [Realization of optimum control by the electric drive of the mechanism of turn]. Elektromashinobudovannja ta elektroobladnannja [Electric machine industry and electric equipment], no. 62, 36-39.

3. *Lovejkin V.S., Bojko A.V., Chovnjuk Ju.V.*, 2010. Nelinijni majatnikovii kolivannja vantazhu na gnuchkomu pidvisi pri riznih rezhimah obertannja [Nonlinear pendular fluctuations of freight on flexible subweight at different modes of rotation]. Visnik TNTU [TNTU bulletin]. Tom 15, no. 3. 41-48.

4. *Ivanchenko F.K. i dr.*, 1978. Raschjoty gruzopodjomnyh i transportirujushhih mashin [Calculations of load-lifting and transporting cars]. Kyiv, Vishha shkola Publ., 576.

5. *Prijmakov O.G., Gradins'kij Ju.O.*, 2013. Vznachennja energokinematicnih parametriv kul'kovih mliniv dlja vigotvlennja vognegasnih poroshkiv [Determination of power and kinematic parameters of ball mills for production of powders for fire suppression]. Problemy pozharnoj bezopasnosti [Problems of fire safety], no. 33. 147-156.

6. *Prijmakov O.G., Gradins'kij Ju.O.*, 2013. Matematichna model' kolivan' vantazhu pri povoroti kрана pidjomno-transportnoi mashini [Mathematical model of fluctuations of freight at turn of the crane of the hoisting-and-transport car]. Sil'skogospodars'ki mashini [Agricultural cars], no. 25. 111-117.