КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ КІНЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИХ ВІБРАЦІЙНИХ СИСТЕМ: ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

Юрій Човнюк[1], *Костянтин Почка*[2], *Володимир Кравчук*[2], *Михайло Діктерук*[2]

[1] *Національний університет біоресурсів і природокористування*
03041, вул. Героїв Оборони, 15, Київ, Україна, e-mail: ychovnyuk@ukr.net
[2] *Київський національний університет будівництва і архітектури*
03680, Повітрофлотський просп, 31, Київ, Україна, e-mail: ychovnyuk@ukr.net

CONCEPTUAL BASES OF THE KINEMATIC ANALYSIS OF LINEAR DISCRETE AND CONTINUAL VIBRATION SYSTEMS: USE OF INTEGRATED TRANSFORMATION OF LAPLACE

Yuriy Chovnyuk[1], *Konstantin Pochka*[2], *Volodimir Kravchuk*[2], *Mykhaylo Dykteruk*[2]

[1] *National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine*
03041, Heroyiv Oborony st., 15, Kyiv, Ukraine, ychovnyuk@ukr.net
[2] *Kyiv National University of Construction and Architecture*
03680, Povitroflotskyy Prospect, 31, Kyiv, Ukraine, ychovnyuk@ukr.net

АНОТАЦІЯ. За допомогою інтегрального перетворення Лапласа отримано інтегральне зображення розв'язку крайової задачі для однорідного хвильового рівняння із врахуванням зовнішнього та внутрішнього тертя з типовими граничними умовами. При цьому в крайові умови входять друга та перша похідна по часовій змінній, а також перша похідна по просторовій змінній. Досліджено спектр задачі, виписані її головні розв'язки. Для горизонтального та вертикального деформування прошарку вібросистемою використані відповідні реологічні моделі оброблюваного матеріалу.

Ключові слова: *концепція, основи, кінематика, аналіз, лінійність, вібрація, дискретно-континуальна система, інтегральне перетворення Лапласа.*

АННОТАЦИЯ. С помощью интегрального преобразования Лапласа получено интегральное изображение решения краевой задачи для однородного волнового уравнения с учётом внешнего и внутреннего трения с типичными граничными условиями. При этом в краевые условия входят вторая и первая производные по временной переменной, а также первая производная по пространственной переменной. Исследован спектр задачи, выписаны её главные решения. Для горизонтального и вертикального деформирования слоя вибросистемой использованы соответствующие реологические модели обрабатываемого материала.

Ключевые слова: *концепция, основы, кинематика, анализ, линейность, вибрация, дискретно-континуальная система, интегральное преобразование Лапласа.*

ABSTRACT. ***Purpose.*** *Justification of a method of integrated transformation of Laplace for obtaining solutions of a regional task, characteristic at research (the kinematic analysis) of discrete and continual vibration systems is the purpose of this work.* ***Methodology/approach.*** *Researches in this work are of analytical character.* ***Findings.*** *The integrated image according to Laplace of the solution of a classical hyperbolic regional task for discrete and continual vibration systems of formation and consolidation of concrete/construction mixes is proved and received (for a case of existence in regional conditions of the first and second derivatives clockwise of a variable and the first derivative on a spatial variable). The task range is established, its main decisions (Green's functions which are given rise by heterogeneity of regional conditions) are written out.* ***Research limitations/implications.*** *The results received in work can be used further for specification and improvement of the existing engineering methods of calculation of vibration systems of discrete and continual type for consolidation and formation of concrete/construction mixes (in that number by shock and vibration methods) both at a stage of their design / designing, and in the modes of real operation.* ***Originality/value.*** *The work has scientific and practical interest.*

Key words: *concept, bases, kinematics, analysis, linearity, vibration, discrete and continual system, integrated transformation of Laplace.*

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Одним із ефективних методів побудови точних аналітичних розв'язків рівнянь математичної фізики є метод інтегральних перетворень. Цей метод дає змогу знаходити аналітичний вид розв'язків багатьох задач математичної фізики, що дуже зручно для дослідження властивостей розв'язків. На думку авторів даної роботи, метод інтегрального перетворення Лапласа може бути використаний для кінематично-силового аналізу лінійних дискретно-континуальних вібраційних систем, призначених для обробки (формування, ущільнення та інше) різноманітних сумішей (бетонних, будівельних тощо) або ґрунту при їх горизонтальному/вертикальному деформуванні. При цьому оброблюване середовище описується доволі складною реологічною моделлю, яка враховує, наприклад, пружні та дисипативні (в'язкість) процеси, що відбуваються у ньому, а також дозволяє дослідити можливі коливання та хвилеутворення, що супроводжують формування (ущільнення).

ОГЛЯД ПУБЛІКАЦІЙ

У підручниках та посібниках з математичної фізики наведені постановки різноманітних крайових задач [1], але для багатьох з них не знайдені аналітичні розв'язки. У працях [2-4] розв'язана крайова задача для рівняння коливання у випадку розташування вантажу (у вібросистемах – це привантаження) на лівому кінці та крайової умови першого роду на правому кінці, а також розв'язана крайова задача для рівняння коливання з розташуванням вантажів на обох кінцях у випадку однорідного рівняння, однорідних початкових умов та неоднорідних крайових умов [5]. Результати цитованих вище робіт використані у дослідженні. При цьому застосування перетворення Лапласа здійснюється у межах методів та підходів робіт [6, 7].

МЕТА РОБОТИ

Мета роботи полягає у обґрунтуванні методу інтегрального перетворення Лапласа для отримання розв'язків крайової задачі, характерної при дослідженні (кінематичному аналізі) дискретно-континуальних вібраційних систем.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо однорідний напружений стрижень довжиною l, кінці якого навантажені: до кожного з них прикріплена пружина жорсткістю c, до пружини прикріплено вантаж (привантаження) m, на який діє сила тертя, пропорційна швидкості. Цей підхід типовий при моделюванні дискретно-континуальних вібраційних систем, призначених для формування та ущільнення бетонних/будівельних сумішей.

Задача про малі поздовжні коливання жорсткого стрижня математично приводить до побудови обмеженого у області $D=\{(t,x): t>0,\ x\in(0,l)\}$ розв'язку рівняння коливання для переміщення $u(x,t)$ у стрижні:

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (1)$$

з початковими умовами

$$u\big|_{t=0}=0; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \qquad (2)$$

та крайовими умовами [1]:

$$\begin{aligned}&\left.\left(m\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\eta\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+c\cdot u-E\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=g_1(t);\\ &\left.\left(m\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\eta\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+c\cdot u+E\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=g_2(t),\end{aligned} \qquad (3)$$

де m – маса прикріпленого вантажу (привантаження); $E\cdot S=const$ (E – модуль Юнга матеріалу стрижня, S – площа його поперечного перерізу у точках $x=0$ та $x=l$); c – жорсткість пружини; η – коефіцієнт в'язкого тертя. У (1) $a=\sqrt{E/\rho}$ – швидкість розповсюдження у стрижні поздовжніх хвиль; ρ – щільність матеріалу стрижня (рис. 1).

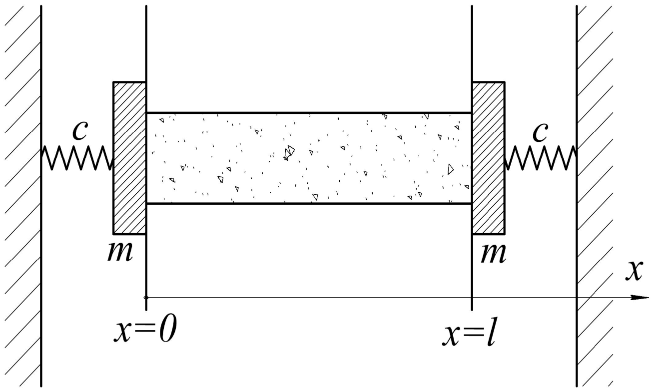

Рис. 1. Геометрія задачі

Fig. 1. Task geometry

Припустимо, що задані та шукана функції є оригіналами Лапласа стосовно часової змінної t [6]. У зображенні за Лапласом задачі (1)…(3) відповідає крайова задача: побудувати на $(0,\ l)$ розв'язок рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-q^2\right)\cdot u^*(p,\,x)=0\,, \qquad (4)$$

за крайовими умовами

$$\left.\left(E\cdot S\cdot\frac{d}{dx}-q_1\right)\cdot u^*(p,x)\right|_{x=0}=-g_1^*(p);$$
$$\left.\left(E\cdot S\cdot\frac{d}{dx}+q_1\right)\cdot u^*(p,x)\right|_{x=l}=-g_2^*(p). \qquad (5)$$

У (5) прийняті позначення:

$$\begin{cases} q^2=a^{-2}\cdot p^2;\;\; p=\delta+i\cdot s;\;\; i^2=-1; \\ q_1=m\cdot p^2+\eta\cdot p+k; \\ u^*(p,x)=L[u(p,x)]; \\ g_1^*(p)=L[g_1(t)];\;\; g_2^*(p)=L[g_2(t)], \end{cases} \qquad (6)$$

де $L[f(t,x)]$ – перетворення (образ) Лапласа для функції $f(t,x)$ – просторової (x) та часової (t) координат.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Фур'є

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-q^2\right)\cdot u^*=0 \qquad (7)$$

утворюють функції $ch(q\cdot x)$ та $sh(q\cdot x)$. Це дає можливість побудувати розв'язок крайової задачі (4) та (5) у вигляді

$$u^*(p,\,x)=A_1\cdot ch(q\cdot x)+A_2\cdot sh(q\cdot x). \qquad (8)$$

Знайдемо сталі A_1 та A_2, підставивши функцію $u^*(p,\,x)$, що зображується формулою (8), у крайові умови (5). Слід зазначити, що функцію $q_{1,2}(t)$ можна розглядати як і ті, котрі використовуються для моделювання ударно-вібраційних процесів ущільнення сумішей. Зазвичай $q_{1,2}(t)$ – гармонічні функції часу t, тобто $\sim\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}(\omega\cdot t+\varphi)$). Для A_1 та A_2 одержимо систему двох алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -q_1\cdot A_1+q\cdot E\cdot S\cdot A_2=-g_1^*(p); \\ (E\cdot S\cdot q\cdot sh(q\cdot l)+q_1\cdot ch(q\cdot l))\cdot A_1+ \\ (E\cdot S\cdot q\cdot ch(q\cdot l)+q_1\cdot sh(q\cdot l))\cdot A_2=g_2^*(p). \end{cases} \qquad (9)$$

Визначник цієї системи (9)

$$\Delta=\begin{vmatrix} -q_1; & qES; \\ ESqsh(q\cdot l)+ & ESqch(ql)+ \\ +q_1ch(q\cdot l); & +q_1sh(ql) \end{vmatrix}=$$
$$=-\begin{pmatrix} 2q_1ESqch(q\cdot l)+ \\ +\left(q_1^2+q^2(ES)^2\right)\cdot sh(ql) \end{pmatrix}\equiv-\Delta^*(p). \qquad (10)$$

Припускаючи, що $\Delta^*(p)\neq 0$, обчислимо A_1 та A_2 за формулами Крамера:

$$\begin{cases} A_1=\dfrac{g_1^*(p)\cdot\left[qESch(ql)+q_1sh(ql)\right]}{\Delta^*(p)}+ \\ +\dfrac{g_2^*(p)ESq}{\Delta^*(p)}; \\ A_2=\dfrac{g_2^*(p)q_1-g_1^*(p)}{\Delta^*(p)}\cdot \\ \cdot\left[qESsh(ql)+q_1\cdot ch(ql)\right]. \end{cases} \qquad (11)$$

Тоді єдиний розв'язок крайової задачі (4) та (5) запишеться у наступному вигляді

$$\begin{aligned} u^*(p,x)=W_1^*(p,x)\cdot g_1^*(p)+ \\ +W_2^*(p,x)\cdot g_2^*(p) \end{aligned}. \qquad (12)$$

У виразі (12) беруть участь породжені крайовими умовами (5) функції Гріна:

$$\begin{cases} W_1^*(p,x)=\dfrac{qESch\left[q\cdot(l+x)\right]}{\Delta^*(p)}+ \\ +\dfrac{q_1sh\left[q\cdot(l-x)\right]}{\Delta^*(p)}; \\ W_2^*(p,x)=\dfrac{qESch(qx)+q_1\cdot sh(qx)}{\Delta^*(p)}. \end{cases} \qquad (13)$$

Повертаючись у рівності (12) до оригіналу, одержуємо інтегральне зображення розв'язку задачі (1)- (3)

$$\begin{aligned} u(x,t)=\int_0^t W_1(t-\tau,x)\cdot g_1(\tau)\,d\tau+ \\ +\int_0^t W_2(t-\tau,x)\cdot g_2(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \qquad (14)$$

У формулі (14) за визначенням

$$W_j(t,x)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\int_{\delta_0-i\cdot\infty}^{\delta_0+i\cdot\infty}W_j^*(p,x)\cdot e^{p\cdot t}dp, \quad j=1,\ 2 \qquad (15)$$

де δ_0 – абсциса збіжності інтеграла перетворення Лапласа.

Визначимо прийнятий (коректний для інженерних розрахунків вібросистем дискретно-континуального типу) вигляд функцій $W_j(t,x),\quad j=1,\ 2$.

Особливості функцій $W_j^*(p,x)$ зосереджені у коренях рівняння

$$\Delta^*(p)\equiv 2q_1ESqch(ql)+ +\left(q_1^2+q^2(ES)^2\right)sh(ql)=0. \qquad (16)$$

Слід зазначити, що точка $p=0$ є правильною (усувною) особливою точкою для функцій $W_1^*(p,x)$ та $W_2^*(p,x)$.

Можна показати [5], що рівняння (16) не має коренів у півплощині $\operatorname{Re}p\geq 0$ за винятком точки $p=0$ (простий нуль). Це дає можливість покласти в рівностях (15) $\delta_0=0$. Тоді рівності (15) набувають вигляду

$$W_j(t,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\operatorname{Re}\left[W_j^*(is,\ x)e^{i\cdot s\cdot t}\right]ds, \quad j=1,\ 2. \qquad (17)$$

Визначимо функції:

$$\begin{cases}\Delta^*(i\cdot s)=\omega_1(s,l_1,l_2)+i\omega_2(s,l);\\ \omega_1(s,l_1,l_2)=-\dfrac{2\eta s^2(E\cdot S)}{a}\cdot\cos\left(\dfrac{sl_1}{a}\right)-\\ -2\eta s\left(k-ms^2\right)\sin\left(\dfrac{sl_2}{a}\right);\\ \omega_2(s,l)=-\dfrac{2\cdot(ES)\cdot s}{a}\left(k-ms^2\right)\cos\left(\dfrac{sl}{a}\right)+\\ +\left[\left(k-m\cdot s^2\right)^2-\eta^2s^2-\dfrac{s^2(ES)^2}{a^2}\right]\sin\left(\dfrac{sl}{a}\right);\\ v_1(s,t)=\cos(st)\,\omega_1(s,l_1,l_2)-\sin(st)\,\omega_2(s,l);\\ v_2(s,t)=\cos(st)\,\omega_2(s,l)+\sin(st)\,\omega_1(s,l_1,l_2)\end{cases} \qquad (18)$$

У результаті виконання зазначених операцій одержуємо коректні для інженерних розрахунків дискретно-континуальних вібраційних систем ущільнення бетонних/будівельних сумішей вирази головних розв'язків задачі [7]:

$$\begin{cases}W_1(t,x)=\\ =\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{(2s\eta)^{-1}\omega_1(s,l+x,l-x)v_2(s,t)}{\left[\omega_1(s,l,l)\right]^2+\left[\omega_2(s,l)\right]^2}-\dfrac{\eta s\sin\left[\dfrac{s(l-x)}{a}\right]v_1(s,t)}{\left[\omega_1(s,l,l)\right]^2+\left[\omega_2(s,l)\right]^2}\right)ds;\\ W_2(t,x)=\\ =\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{(2s\eta)^{-1}\omega_1(s,x,x)v_2(s,t)}{\left[\omega_1(s,l,l)\right]^2+\left[\omega_2(s,l)\right]^2}-\dfrac{\eta s\sin\left[\dfrac{sx}{a}\right]v_1(s,t)}{\left[\omega_1(s,l,l)\right]^2+\left[\omega_2(s,l)\right]^2}\right)ds.\end{cases} \qquad (19)$$

Якщо функції $g_1,g_2\in C^{(2)}([0,\ \infty))$, то функція $u(x,t)$, визначена формулою (14), є класичним розв'язком гіперболічної задачі (1)-(3). При цьому головні розв'язки $W_j(t,x)$ та $(j=1,\ 2)$ визначаються формулами (19).

ВИСНОВОК

1. Обґрунтовано і отримано інтегральне зображення по Лапласу розв'язку класичної гіперболічної крайової задачі для дискретно-континуальних вібраційних систем формування та ущільнення бетонних/будівельних сумішей (для випадку наявності у крайових умовах першої та другої похідних по часовій змінній та першої похідної по просторовій змінній).

2. Встановлено спектр задачі, виписані її головні розв'язки (функції Гріна, породжені неоднорідністю крайових умов).

3. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку вібраційних систем дискретно-континуального типу для ущільнення і формування бетонних/будівельних

сумішей (у тому числі ударно-вібраційними методами) як на стадії їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Комеч А.И.* Практическое решение уравнений математической физики. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1986. – 160 с.
2. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
3. *Ленюк О.М.* Моделювання коливних процесів в елементах конструкцій з включенням вантажу на кінці. // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Збірник наукових праць. – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 14. – С. 102-108.
4. *Ленюк О.М.* Неоднорідна крайова задача для рівняння коливання з вантажем на лівому кінці. // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2013. – Вып. 2 (47). – С. 197-201.
5. *Ленюк О.М.* Моделювання коливних процесів з включенням вантажів на кінцях. // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2014. – Вып. 3 (50). – С. 341-345.
6. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1965. – 288 с.
7. Лаврентьев М.А. Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
8. *Човнюк Ю.* Застосування методу гармонічного балансу для аналізу маятникових коливань вантажу в процесах пуску/гальмування мостових кранів / Ю. Човнюк, К. Почка, М. Діктерук // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – 2011. – №80. – С. 8-13.

REFERENCES

1. *Komech A.I., 1986.* Prakticheskoe reshenie uravnenij matematicheskoj fiziki [Practical solution of the equations of mathematical physics]. Moscow, Moscow university Publ., 160.
2. *Filippov A.P., 1970.* Kolebanija deformiruemyh system [Fluctuations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 736.
3. *Lenjuk O.M., 2006.* Modeljuvannja kolivnih procesiv v elementah konstrukcij z vkljuchennjam vantazhu na kinci [Modeling of oscillatory processes in elements of designs with inclusion of freight on the ends]. Krajovi zadachi dlja diferencial'nih rivnjan' [Regional tasks for the differential equations: Collection of scientific works], No. 14, 102-108.
4. *Lenjuk O.M., 2013.* Neodnoridna krajova zadacha dlja rivnjannja kolivannja z vantazhem na livomu kinci [Non-uniform regional task for the fluctuation equation with freight on the left end]. Vestnik Hersonskogo nacional'nogo tehnicheskogo universiteta [Bulletin of the Kherson national technical university], No. 2 (47), 197-201.
5. *Lenjuk O.M., 2014.* Modeljuvannja kolivnih procesiv z vkljuchennjam vantazhiv na kin-cjah [Modeling of oscillatory processes with inclusion of freights on the ends]. Vestnik Hersonskogo nacional'nogo tehnicheskogo universiteta [Bulletin of the Kherson national technical university], No. 3 (50), 341-345.
6. *Dech G., 1965.* Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniju preobrazovanija Laplasa [The management to practical application of transformation of Laplace]. Moscow, Nauka Publ., 288.
7. *Lavrent'ev M.A. Shabat B.V., 1987.* Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of the complex variable]. Moscow, Nauka Publ., 688.
8. *Chovnjuk Ju., Pochka K., Dikteruk M., 2011.* Zastosuvannja metodu garmonich-nogo balansu dlja analizu majatnikovih kolivan' vantazhu v procesah pusku/gal'muvannja mostovih kraniv [Application of harmonic balance analysis pendulum oscillation load in the process of starting/braking overhead crane]. Girnichi, budivel'ni, dorozhni ta meliorativni mashini [Mining, construction, road and agricultural machines], No.80, 8-13.