АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНИХ МАЯТНИКОВИХ КОЛИВАНЬ ВАНТАЖУ НА КАНАТІ МОСТОВОГО КРАНА ПРИ ВІБРАЦІЯХ ТОЧКИ ПІДВІСУ

Юрій Човнюк[1], Михайло Діктерук[2], Світлана Комоцька[2]

[1] Національний університет біоресурсів і природокористування України, вул. Героїв Оборони, 15, Київ, Україна
[2] Київський національний університет будівництва і архітектури, Повітрофлотський просп., 31, Київ, Україна

THE ANALYSIS OF NONLINEAR PENDULUM'S OSCILLATIONS OF THE LOAD ON THE ROPE OF THE BRIDGE CRANE WITH A VIBRATIVE POINT OF SUSPENSION

Yuriy Chovnyuk[1], Mykhaylo Dykteruk[2], Svetlana Komotskaya[2]

[1] National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Heroyiv Oborony st., 15, Kyiv, Ukraine
[2] Kyiv National University of Construction and Architecture, Povitroflotskyy Prospect, 31, Kyiv, Ukraine

АНОТАЦІЯ. У роботі розглянуті деякі закономірності кінематичних керувань рухами вантажопідйомних кранів. Проведений аналітичний розрахунок нелінійних маятникових коливань вантажу на канаті мостового крана при вібраціях точки підвісу.
***Ключові слова:** аналіз, нелінійні маятникові коливання, вантаж, канат, мостовий кран, вібрація.*

АННОТАЦИЯ. В работе рассмотрены некоторые закономерности кинематических управлений движениями грузоподъемных кранов. Проведен аналитический расчет нелинейных маятниковых колебаний груза на канате мостового крана при вибрациях точки подвеса.
***Ключевые слова:** анализ, нелинейные маятниковые колебания, груз, канат, мостовой кран, вибрация.*

*ABSTRACT. **Purpose.** The purpose of this works is to give the possible classification of kinematic's management of hoisting cranes arises up during the process of resolving of considered by motions of extreme tasks in mechanics of the guided systems. The analytical analysis of the pendulum's nonlinear vibrations of load being on the rope of travelling crane and oscillating at the liqbest point (of the rope) is proposed as well. **Methodology/approach.** Researches in this work are of analytical character. Findings. The conditions for creation of the simple, parametric and general resonances are obtained. **Research limitations/implicetions.** Results of this work can be used further for specification and improvement of existing engineering methods of calculation for such mechanical system as at stages of their design or designing, projection and in modes of real operation. **Originality/value.** The work has scientific and practical interest.*
***Key words:** analysis, nonlinear pendulum's vibrations, load, rope, travelling crane,vibrationt.*

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

При постановці задач у механіці керованих систем нерідко виникають ситуації, коли розмірністю керування є швидкість, прискорення чи їх комбінація. Корисно провести аналіз такого роду задач задля того, щоб встановити деякі закономірності, котрі сприяють відшуканню екстремалей. У даній роботі мова йтиме про екстремалі Понтрягіна, які виникають з розширеного принципу максимуму у формі Гамкрелідзе $[1]$. Даний підхід застосовується в аналізі нелінійних маятникових коливань вантажу на канаті мостового крана при вібраціях точки підвісу.

АНАЛІЗ ПУБЛІКАЦІЙ

У роботах $[3-6]$ розглянуті деякі аспекти оптимізації динаміки керованих систем, узагальнений резонанс у коливних системах, процеси синтезу автоколивань. Проте, на думку авторів даної роботи, ґрунтовний аналіз нелінійних коливань у таких системах, як мостові крани, котрі підтримують нелінійні маятникові коливання вантажу на канаті за умови існування вібрацій точки його підвісу, проведений недостатньо.

МЕТА РОБОТИ

Мета роботи полягає у встановленні основних закономірностей нелінійних маятникових коливань вантажу на канаті мостового крана при вібрації точки підвісу. При цьому використані методи та підходи, викладені у роботах $[3-6]$.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО ЗМІСТУ

Розглянемо рівняння малих коливань математичного маятника одиничної маси при вібраціях точки підвісу – математичної моделі нелінійних коливань вантажу на канаті мостового крану за умов вібрації точки підвісу (вказаного каната). У цьому випадку маємо наступне рівняння:

$$x_1 + 2\varepsilon_0 \cdot \dot{x}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{1}{l} \cdot w_1(t)\right) \cdot x_1 = \frac{1}{l} \cdot w_2(t), \quad (1)$$

де $\delta_1 < g$; $0 \le 2\varepsilon_0 < 2\sqrt{(g-\delta_1)/l}$ - коефіцієнт дисипації (припускаємо існування у системі в'язкого тертя); x_1- кут відхилення вантажу від вертикалі ($\sin x_1 \approx x_1$, оскільки $0 < x_1 << 1$); $g = 9{,}81$ м/с^2; w_1, w_2- вертикальна та горизонтальна складові прискорення точки підвісу; l- довжина маятника (канату).

При цьому вважаємо, що маса математичного маятника відповідає узагальненій масі системи «вантажний візок – канат - вантаж» мостового крану, а функції $w_{1,2}(t)$ задовольняють наступній системі обмежень:

$$w(t) \in W = \left\{ w_j(\cdot) \in L_\Gamma \;\; \|w_j(t)| \le \delta_j,\ j = 1,2 \right\}. \quad (2)$$

При $|x_1(0)| \le \delta_0, \dot{x}(0) = 0$ поставимо задачу про відшукання у системі (1) з функціональним включенням (2) резонансу: *а)* простого, коли $\delta_1 = 0$; *б)* параметричного, коли $\delta_2 = 0$; *в)* узагальненого, коли $\delta_1 \ne 0$, $\delta_2 \ne 0$.

Розв'язуючи задачу про максимальне відхилення на "половині періоду" $\dot{x}_1(t_1) = 0, \dot{x}_1(t) \ne 0$ для будь-якого $t \in (0, t_1)$, отримаємо екстремаль Понтрягіна. Розв'язуючи аналогічну задачу на кожному наступному "напівперіоді", прийдемо до результатів, зазначених нижче. (Можна показати, що розв'язок задачі на $[0, t_k]$, де $t_k = k \cdot t$ й k - будь яке натуральне число, можна отримати "зклеюючи" розв'язки на $[0, t_{k-1}]$ з розв'язками на "напівперіоді" $[t_{k-1}, t_k]$).

Випадок а. Стан $x_1(t) \equiv 0$ робастно стійкий [3]: для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta_0 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ й $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ такі, що існує граничний цикл коливань з максимальним радіусом

$$r_{\max} = \max_{0 \le t \le \frac{\pi}{\omega}} \left\{ \sqrt{ \left(\left(\frac{1}{\omega_0^2} - e^{-\varepsilon_0 t} \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{2}{1-\beta_0} \right) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \right) \right)^2 + \\ + \left(\frac{1}{\omega} e^{-\varepsilon_0 t} \left(\frac{2}{1-\beta_0} \right) \sin \omega t \right)^2 } \right\} \cdot \quad (3)$$

$$\cdot \frac{\delta_2}{l} = \delta_2 R_{\max},$$

де $\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon_0^2}, \beta_0 = e^{-\pi\varepsilon_0/\omega}$; $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{R_{\max}}$. Якщо початкова точка $(x_1(0), x_2(0))$, то радіуси вказаних вище траєкторій розміщені всередині граничного циклу $(x_2 = \dot{x}_1)$. Слід зазначити, що вказані траєкторії не можуть зникнути з околу $\|x(t)\| \le \varepsilon$. Позначимо:- $\|x(t)\| = (x_1; x_2)^T$.

При $w_2^0 = \delta_2 \cdot \mathrm{sign}(\dot{x}_1)$ маємо синтез граничного циклу у системі (1). Якщо початкова точка $(x_1(0), x_2(0))$ належить граничному циклу, то у системі виникають автоколивання, котрі глобально асимптотично орбітально стійкі. Якщо ж точка $(x_1(0), x_2(0))$ розміщена всередині граничного циклу й $w_2 \equiv w_2^0$, будемо мати звичайний резонанс адитивно збуреної системи (1). Амплітуда коливань зростає при $\varepsilon_0 = 0 (x_1(0) = \delta_0, x_2(0) = 0)$ за арифметичною прогресією $\beta_n = \frac{2\delta_2 l}{g} \cdot n + \delta_0$.

Випадок б. При $\delta_2 = 0$ маємо точну оцінку поведінки всіх розв'язків параметрично збуреної системи (1) з функціональним включенням (2). Розв'язавши аналогічну випадку a задачу про максимальне відхилення, матимемо

$$|x(t)| \le e^{\alpha_0 t} \cdot c(x_1(0), x_2(0), \delta_1). \qquad (4)$$

У виразі (4) введені наступні позначення:

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{g/l + \delta_1/l - \varepsilon_0^2}}{K_0} - \varepsilon_0, \qquad (5)$$

де K_0 - єдиний корінь трансцендентного рівняння:

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a^2 \cdot K^2}{1+K^2}\right) + \frac{1}{K}\left(\pi - \operatorname{arctg}K + \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(aK)\right) = 0, \qquad (6)$$

де $a = \sqrt{\dfrac{l \cdot \varepsilon_0^2 - g + \delta_1}{l \cdot \varepsilon_0^2 - g - \delta_1}}$.

Таким чином, при $\alpha_0 < 0$ тривіальний розв'язок системи (1), (2) абсолютно стійкий. Якщо $\alpha_0 > 0$, то має місце параметричний резонанс. Вказаний резонанс можливий при синтезі управління $w_1^0 = \delta_1 \operatorname{sign}(x_1 \dot{x}_1)$. Амплітуда коливань у цьому випадку збільшується при $\varepsilon_0 = 0$ у геометричній прогресії:

$$\beta = \left(\sqrt{\frac{g+\delta_1}{g-\delta_1}}\right)^n \cdot \delta_0. \qquad (7)$$

У випадку $\alpha_0 = 0$ будемо мати замкнені траєкторії руху маятника, які є граничними циклами.

Випадок с. При d$_1$ №0, d$_2$ №0 й $\varepsilon_0 = 0$ має місце узагальнений резонанс, за якого амплітуда зростає у відповідності з рекурентною формулою

$$\beta_n = \frac{l}{(g-\delta_1)}\sqrt{\delta_2 + \frac{(g-\delta_1)}{l}\left(\frac{(g+\delta_1)}{l} \cdot \beta_{n-1}^2 + 2\delta_2\beta_{n-1}\right)} + \frac{\delta_2 \cdot l}{(g-\delta_1)}. \qquad (8)$$

У цьому випадку оптимальні управління $w_1^0(t)$, $w_2^0(t)$ є майже періодичними функціями, котрі визначаються при побудові екстремалей Понтрягіна [4] для задачі про максимальне відхилення.

У роботі [5] показано, що існує граничний цикл при досить малих $\varepsilon_0 \ge 0$. У випадку $w_1 \equiv w_2$ граничний цикл знайдений у [6] за додаткового обмеження на параметри системи (1).

ВИСНОВКИ

1. У системі, яка моделює нелінійні маятникові коливання вантажу на канаті мостового крана при горизонтальних та/або вертикальних коливаннях/вібраціях точки підвісу, знайдені умови виникнення простого, параметричного та узагальненого резонансів.
2. Встановлені основні характеристики вказаних резонансів, стійкість стану розглядуваної системи, а також можливість виникнення граничних циклів.
3. Для проведення аналізу можливих коливань, які виникають у системі, використаний підхід Л.С. Понтрягіна (екстремалі Понтрягіна), який розширений до принципу максимуму у формі Гамкрелідзе.
4. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для інженерних методів розрахунку динамічних гасників коливань вантажу на канаті мостового крана як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації задля оптимізації конструктивних параметрів останніх, що дозволяє за мінімально короткий відрізок часу гасити небажані коливання системи «вантажний візок – канат - вантаж».

ЛІТЕРАТУРА

1. *Арутюнов А.В.* Принцип максимума для задач оптимального управления при ограниченных фазовых координатах в форме Р.В. Гамкрелидзе и его связь с другими условиями оптимальности / А. В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин, Ф. Перейра // Доклады Российской Академии Наук. – 2011. – Т. 436, №6. – С. 738-742.
2. *Александров В.В.* Об экстремалях кинематического управления движением / В. В. Александров, О. В. Александрова, М.А. Буднинский, Г.Ю. Сидоренко // Вестник МГУ. Серия

1: Математика, механика. – 2013. – №3. – С. 38-46.
3. *Александров В.В.* Устойчивость управляемого перевернутого маятника при постоянно действующих горизонтальных возмущениях точки опоры / В.В. Александров, М. Рейес-Ромеро, Г.Ю. Сидоренко, Р. Темолтци-Ауила // Известия РАН Механика твердого тела. – 2010. – №2. – С.41-49.
4. *Александров В.В.* Оптимизация динамики управляемых систем / В.В. Александров, В.Г. Болтянский, С.С. Лемак, Н.А. Парусников, В.М. Тихомиров.- М.: Изд-во МГУ, 2000. – 190 с.
5. *Александрова О.В.* Обобщенный резонанс в колебательной системе / О.В. Александрова // Вестник МГУ. Математика, механика. – 1991. – №3. – С. 89-92.
6. *Александров В.В.* О синтезе автоколебаний / В.В. Александров, О.В. Александрова, И.П. Приходько, Р. Темолтци-Ауила // Вестник МГУ. Математика, механика. – 2007. – №3. – С. 41-43.

REFERENCES

1. *Arutjunov A.V., Karamzin D.Ju., Perejra F., 2011.* Princip maksimuma dlja zadach optimal'nogo upravlenija pri ogranichennyh fazovyh koordinatah v forme R.V. Gamkrelidze i ego svjaz' s drugimi uslovijami optimal'nosti [Maximum principle for optimal control problems for bounded phase coordinates in the form of RV Gamkrelidze and its relation to the other conditions of optimality]. Doklady Rossijskoj Akademii Nauk, Vol. 436, No. 6, 738-742. – (in Russian)
2. *Aleksandrov V.V., Aleksandrova O.V., Budninskij M.A., Sidorenko G.Ju., 2013.* Ob jekstremaljah-kinematicheskogo upravlenija dvizheniem [On extremals kinematic motion control]. Vestnik MGU. Serija 1: Matematika, mehanika, No. 3, 38-46. – (in Russian)
3. *Aleksandrov V.V., Rejes-Romero M., Sidorenko G.Ju., Temoltci-Auila R., 2010.* Ustojchivost' upravljaemogo perevernutogo majatnika pri postojanno dejstvujushhih gorizontal'nyh vozmushhenijah tochki opory [Stability managed inverted pendulum under constantly acting perturbations horizontal pivot point]. Izvestija RAN Mehanika tverdogo tela., No. 2, 41-49. – (in Russian)
4. *Aleksandrov V.V., Boltjanskij V.G., Lemak S.S., Parusnikov N.A., Tihomirov V.M., 2000.* Optimizacija dinamiki upravljaemyh sistem [Optimization of the dynamics of control systems]. Moscow, Izd-vo MGU, 190. – (in Russian)
5. *Aleksandrova O.V.,* 1991. Obobshhennyj rezonans v kolebatel'noj sisteme [Synthesis resonance oscillating system]. Vestnik MGU. Matematika, mehanika, No. 3, 89-92. – (in Russian)
6. *Aleksandrov V.V., Aleksandrova O.V., Prihod'ko I.P., Temoltci-Auila R., 2007.* O sinteze avtokolebanij [On the synthesis of self-oscillation]. Vestnik MGU. Matematika, mehanika, No 3. 41-43. – (in Russian)