

УДК 519.6:65.012.1(574.63:581.132)

**В. І. Лаврик**, **А. С. Глазок**

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ  
«ЦВІТІННЯ» ВОДИ НА КИСНЕВИЙ РЕЖИМ**

Стаття присвячена побудові математичної моделі кисневого режиму водних об'єктів у період «цвітіння» води. Модель враховує вплив основних чинників, зокрема інтенсивності фотосинтезу, на добову динаміку вмісту розчиненого кисню та органічних речовин (за біохімічним споживанням кисню). На прикладі Київського водосховища проведено імітаційний (числовий) експеримент, за допомогою якого показано можливі зміни досліджуваних параметрів зі зміною інтенсивності фотосинтезу під час «цвітіння» води.

**Ключові слова:** математична модель, фотосинтез, «цвітіння» води, імітаційний експеримент, кисневий режим.

Вміст розчиненого у воді кисню (РК) належить до найважливіших фізико-хімічних показників якості води, які впливають на екологічний стан водних екосистем. Кисень є одним з найбільш потужних природних окиснювачів, а його вміст значною мірою визначає інтенсивність процесів самоочищення, фізико-хімічної трансформації і кругообігу речовин [9, 10]. Проте прогнозування цього показника пов'язане зі значними труднощами і потребує розробки такої математичної моделі, яка б враховувала найбільш істотні чинники впливу на формування кисневого режиму водойм [6, 7]. На відміну від раніше розглянутих моделей [3—5], розроблена нами модель враховує вплив інтенсивності фотосинтезу на динаміку кисневого режиму в літній період під час «цвітіння» води. На заключному етапі вегетації, коли відбувається масове відмирання водоростей, вивільняється велика кількість органічної речовини, на розкладання якої також необхідна значна кількість розчиненого кисню. У свою чергу, зменшення його вмісту призводить до погіршення якості води [2, 4].

*Побудова математичної моделі, що враховує інтенсивність фотосинтезу під час «цвітіння» води.* Для побудови математичної моделі динаміки вмісту РК та органічних речовин (за БСК) у водних об'єктах необхідно враховувати основні чинники, які впливають на ці показники. Останні надходять у водний об'єкт з площі водозбору, а кисень — через водну поверхню завдяки обміну з атмосферою. На динаміку обох показників впливає також інтенсивність фотосинтезу та бактеріальної деструкції.

© В. І. Лаврик, А. С. Глазок, 2015

Враховуючи вищезазначені чинники, динаміку РК—БСК будемо описувати через відповідні значення за допомогою таких диференціальних рівнянь:

$$\frac{dC_{\text{БСК}}}{dt} = \frac{Q_{\text{БСК}}}{W} - k_1 C_{\text{БСК}} - \frac{q}{W} C_{\text{БСК}} + F_{\text{БСК}}; \quad (1)$$

$$\frac{dC_{\text{РК}}}{dt} = \frac{Q_{\text{РК}}}{W} + k_2 C_{\text{РК}}^* - k_2 C_{\text{РК}} - k_1 C_{\text{БСК}} - \frac{q}{W} C_{\text{РК}} + F_{\text{РК}}; \quad (2)$$

де  $W$  — об'єм водного об'єкта,  $\text{м}^3$ ;  $C_{\text{БСК}}$ ,  $C_{\text{РК}}$  — концентрація органічних речовин (БСК) та РК у водному об'єкті,  $\text{г}/\text{м}^3$ ;  $C_{\text{РК}}^*$  — концентрація кисню при його насиченні або мінімально допустима у водному об'єкті,  $\text{г}/\text{м}^3$ ;  $Q_{\text{БСК}}$ ,  $Q_{\text{РК}}$  — швидкість надходження органічних речовин (ОР) і РК,  $\text{г}/\text{год}$ ;  $F_{\text{БСК}}$ ,  $F_{\text{РК}}$  — утворення ОР та РК під час фотосинтезу,  $\text{г}/\text{м}^3$ ;  $k_1$  — коефіцієнт швидкості деструкції (мінералізації) ОР,  $\text{год}^{-1}$ ;  $k_2$  — коефіцієнт швидкості аерації  $\text{год}^{-1}$ ;  $q$  — витрати води водного об'єкта,  $\text{м}^3/\text{год}$ .

Розв'язання даної системи без урахування фотосинтезу ( $F_{\text{БСК}} = F_{\text{РК}} = 0$ ) має такий вигляд:

$$C_{\text{БСК}}(t) = (C_{\text{БСК}}^{(0)} - \bar{C}_{\text{БСК}})e^{-\alpha t} + \bar{C}_{\text{БСК}}; \quad (3)$$

$$C_{\text{РК}}(t) = \bar{C}_{\text{РК}} + \frac{k_1}{\alpha - \beta} (C_{\text{БСК}}^{(0)} - \bar{C}_{\text{БСК}})e^{-\alpha t} + \left[ C_{\text{РК}}^{(0)} - \bar{C}_{\text{РК}} - \frac{k_1}{\alpha - \beta} (C_{\text{БСК}}^{(0)} - \bar{C}_{\text{БСК}}) \right] e^{-\beta t}; \quad (4)$$

де позначено:

$$\tau = \frac{W}{q}; k_1 + \frac{1}{\tau} = \alpha; k_2 + \frac{1}{\tau} = \beta; \frac{Q_{\text{РК}}}{W} + k_2 C_{\text{РК}}^* = \gamma; \bar{C}_{\text{БСК}} = \frac{Q_{\text{БСК}}}{\alpha W}; \bar{C}_{\text{РК}} = \frac{\gamma - k_1 C_{\text{БСК}}}{\beta} = \frac{1}{\beta} \left( \gamma - \frac{k_1 Q_{\text{БСК}}}{\alpha W} \right) \quad (5)$$

Вплив фотосинтезу на динаміку БСК і РК під час «цвітіння» можна описати періодичними функціями з добовим періодом  $T = 24$  год

Ці функції необхідно додати до правої частини рівнянь (3) і (4) у такому загальному вигляді:

$$F_{\text{РК}}(t) = A_1 - B_1 \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0); \quad (6)$$

$$F_{\text{БСК}}(t) = A_2 - B_2 \cos \frac{2\pi}{T}(t - t_0), \quad (7)$$

де через  $F_{\text{БСК}}$  і  $F_{\text{РК}}$  позначено концентрації відповідно РК і ОР, які утворюються під час фотосинтезу. Сталі  $A_1, B_1, A_2$  і  $B_2$  визначаються на підставі даних експериментальних і натурних спостережень.

Відомо, що під час мінімальної інтенсивності фотосинтезу, яка спостерігається у темний період, утворюється мінімальна кількість РК і навпаки. У той же час значення БСК досягає максимуму вночі, а вдень воно буде знижуватись. Отже, виконуються такі додаткові умови:

$$F_{\text{РК}}(12) = F_{\text{РК}}^{\max}; F_{\text{РК}}(0) = F_{\text{РК}}^{\min}; \quad (8)$$

$$F_{\text{БСК}}(0) = F_{\text{БСК}}^{\max}; F_{\text{БСК}}(12) = F_{\text{БСК}}^{\min}; T = 0, 2, 4, 6, \dots 24. \quad (9)$$

Використовуючи додаткові умови (8), співвідношення (7) і приймаючи  $T = 24$  год, одержимо

$$F_{\text{РК}}^{\min} = A_1 - B_1; F_{\text{РК}}^{\max} = A_1 + B_1. \quad (10)$$

Сталі  $A_1$  і  $B_1$  будуть дорівнювати:

$$A_1 = \frac{1}{2}(F_{\text{РК}}^{\min} + F_{\text{РК}}^{\max}), \quad (11)$$

$$B_1 = \frac{1}{2}(F_{\text{РК}}^{\max} - F_{\text{РК}}^{\min}). \quad (12)$$

Тепер рівність (7) запишемо так:

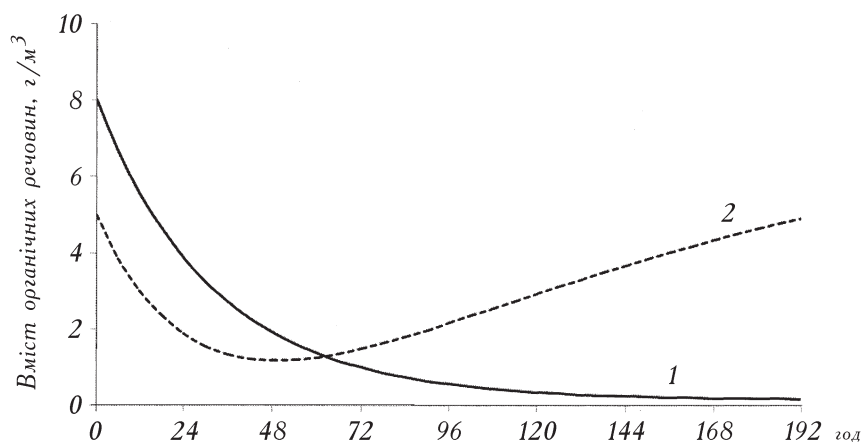
$$F_{\text{РК}}(t) = \frac{1}{2}(F_{\text{РК}}^{\min} + F_{\text{РК}}^{\max}) - \frac{1}{2}(F_{\text{РК}}^{\max} - F_{\text{РК}}^{\min}) \cos \frac{\pi}{12}t. \quad (13)$$

Аналогічно одержуємо:

$$F_{\text{БСК}}(t) = \frac{1}{2}(F_{\text{БСК}}^{\min} + F_{\text{БСК}}^{\max}) - \frac{1}{2}(F_{\text{БСК}}^{\max} - F_{\text{БСК}}^{\min}) \cos \frac{\pi}{12}t. \quad (14)$$

Зауважимо, що додаткові умови, які отримують на підставі даних експериментальних або натурних спостережень, можуть бути задані для будь-яких значень часу  $t_1$  і  $t_2$ :  $F_{\text{БСК}}(t_1)$ ,  $F_{\text{РК}}(t_1)$ ,  $F_{\text{БСК}}(t_2)$ ,  $F_{\text{РК}}(t_2)$ .

*Проведення імітаційного експерименту.* Для проведення імітаційного (числового) експерименту з метою вивчення і прогнозування впливу



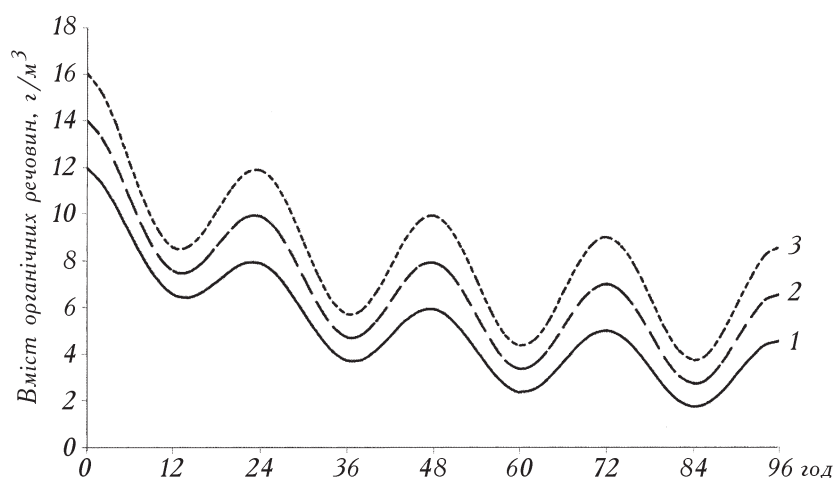
1. Динаміка вмісту органічних речовин (1) та розчиненого кисню (2) у Київському водосховищі без урахування фотосинтезу.

«цвітіння» води на кисневий режим водойм розглянемо конкретні сценарії розрахунку динаміки РК та БСК у Київському водосховищі. Спочатку проведемо розрахунки без урахування фотосинтезу. Для цього використаємо такі вихідні дані [1, 8, 9]:  $W = 3730$  млн.  $m^3$  — об'єм Київського водосховища;  $q = 3,9$  млн.  $m^3/год$  — витрати води водосховища;  $Q_{PK} = 31$  млн.  $г/год$ ,  $Q_{БСК} = 20$  млн.  $г/год$  — надходження відповідно РК і ОР у водосховище;  $C_{PK}^* = 9,02$   $г/м^3$  — мінімально допустима концентрація розчиненого кисню у водосховищі у літній період;  $k_1 = 0,03$   $год^{-1}$  — коефіцієнт швидкості деструкції (мінералізації) легкоокислюваних органічних речовин;  $k_2 = 0,06$   $год^{-1}$  — коефіцієнт швидкості аерації для слабопроточних водних об'єктів;  $C_{PK}^{(0)} = 5$   $г/м^3$ ,  $C_{БСК}^{(0)} = 8$   $г/м^3$  — початкові умови процесу самоочищення водного об'єкта.

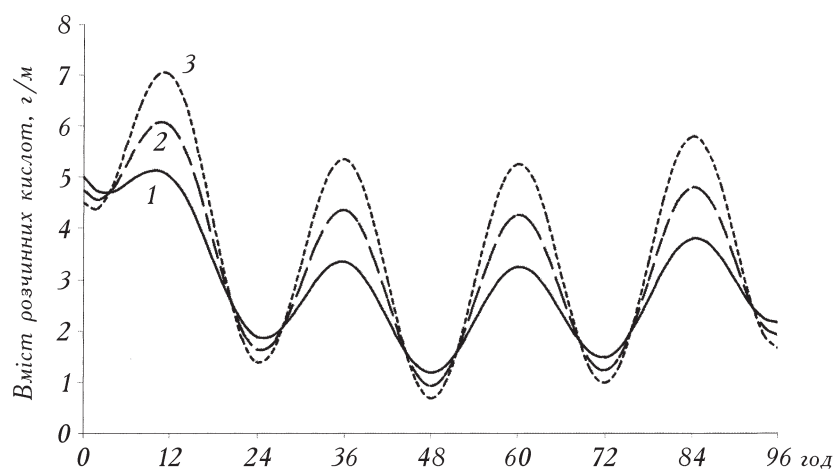
Розрахунки будемо проводити за формулами (3)—(4). Спочатку встановимо значення сталих величин:

- $\alpha = k_1 + \frac{q}{W} = 0,031$ ;
- $\beta = k_2 + \frac{q}{W} = 0,007$ ;
- $\gamma = \frac{Q_{PK}}{W} + k_2 C_{PK}^* = 0,065$ ;
- $\bar{C}_{БСК} = \frac{Q_{БСК}}{\alpha W} = 0,173$ ;
- $\bar{C}_{PK} = \frac{\gamma - k_1 C_{БСК}}{\beta} = \frac{1}{\beta} \left( \gamma - \frac{k_1 Q_{БСК}}{\alpha W} \right) = 8,124$ .

Концентрація РК досягає мінімуму ( $1,2$   $г/м^3$ ) через 48 год від початку процесу самоочищення (рис. 1), після чого зростає з подальшим виходом на



2. Динаміка вмісту органічних речовин під час «цвітіння» води за різної інтенсивності фотосинтезу (1, 2, 3 – див. у тексті).



3. Динаміка вмісту розчиненого кисню під час «цвітіння» води за різної інтенсивності фотосинтезу (1, 2, 3 – див. у тексті).

стаціонарний рівень. Значення БСК поступово зменшується і також виходить на стаціонарний рівень. Показники зрівнюються між 60-ю і 72-ю годинами.

Далі проведемо розрахунки динаміки РК і БСК з урахуванням фотосинтезу фітопланктону за формулами (3)—(4) і (13)—(14), змінюючи при цьому значення  $F_{\text{БСК}}^{\text{max}}$ ,  $F_{\text{БСК}}^{\text{min}}$ ,  $F_{\text{ПК}}^{\text{max}}$  і  $F_{\text{ПК}}^{\text{min}}$ . Розглянемо три різних випадки (сценарії):

$$F_{\text{БПК}}(12) = F_{\text{БСК}}^{\text{min}} = 1 \text{ г/м}^3; F_{\text{БСК}}(0) = F_{\text{БСК}}^{\text{max}} = 4 \text{ г/м}^3;$$

$$F_{PK}(0) = F_{PK}^{\min} = 0 \text{ г/м}^3; F_{PK}(12) = F_{PK}^{\max} = 2 \text{ г/м}^3.$$

$$F_{BCK}(12) = F_{BCK}^{\min} = 2 \text{ г/м}^3; F_{BCK}(0) = F_{BCK}^{\max} = 6 \text{ г/м}^3;$$

$$F_{PK}(0) = F_{PK}^{\min} = -0,25 \text{ г/м}^3; F_{PK}(12) = F_{PK}^{\max} = 3 \text{ г/м}^3.$$

$$F_{BCK}(12) = F_{BCK}^{\min} = 3 \text{ г/м}^3; F_{BCK}(0) = F_{BCK}^{\max} = 8 \text{ г/м}^3;$$

$$F_{PK}(0) = F_{PK}^{\min} = -0,5 \text{ г/м}^3; F_{PK}(12) = F_{PK}^{\max} = 4 \text{ г/м}^3.$$

З аналізу одержаних графіків (рис. 2, 3) випливає, що залежно від значення параметрів  $F_{BCK}^{\max}$ ,  $F_{BCK}^{\min}$ ,  $F_{PK}^{\max}$  і  $F_{PK}^{\min}$ , які характеризують інтенсивність фотосинтезу під час «цвітіння» води, мінімальна (критична) концентрація розчиненого кисню може знижуватись з 1,2 до 0,7 г/м<sup>3</sup>, а максимальне значення БСК — коливатись від 12 до 16 г/м<sup>3</sup>. Зі зростанням інтенсивності фотосинтезу збільшується добова амплітуда концентрації РК.

### Висновки

Математичне моделювання є ефективним інструментом для кількісної оцінки і прогнозування процесів формування кисневого режиму в умовах впливу антропогенних і природних чинників, зокрема евтрофікації та «цвітіння» води.

Розроблена математична модель дозволяє кількісно оцінити вплив фотосинтезу, інтенсивність якого зростає під час «цвітіння» води, на динаміку вмісту розчиненого кисню та органічних речовин у водних об'єктах.

Результати проведеного імітаційного експерименту свідчать, що зі зміною параметрів, які характеризують інтенсивність фотосинтезу, мінімальна концентрація розчиненого кисню у водному об'єкті може досягати критичної, а концентрація органічних речовин — суттєво зростати.

\*\*

*Построена математическая модель кислородного режима водных объектов, которая учитывает влияние интенсивности фотосинтеза на суточную динамику содержания растворенного кислорода (РК) и органического вещества (по БПК). С помощью имитационного эксперимента, проведенного на примере Киевского водохранилища, показаны возможные изменения исследованных показателей с изменением интенсивности фотосинтеза во время «цветения» воды.*

\*\*

*A mathematical model of the oxygen regime of water objects was developed, that takes into account influence of the photosynthesis intensity on daily dynamics of dissolved oxygen (DO) and organic substances (in terms of BOD). A simulation (numerical) experiment was carried out by example of the Kyiv reservoir, which enabled to reveal possible changes of DO and BOD dependently on photosynthesis intensity over the water «bloom».*

\*\*

1. Вишневецький В. І., Косовець О. О. Гідрологічні характеристики річок України. — К.: Ніка-Центр, 2003. — 324 с.
2. Константинов А. С. Общая гидробиология. — М.: Высш. шк., 1986. — 472 с.
3. Лаврик В. І., Скуратівська І. А. Математичне моделювання та оцінка впливу площі водозбору на кисневий режим водних екосистем в умовах їх евтрофікації // Наук. зап. НаУКМА. Біологія та екологія. — 2006. — Т. 54. — С. 46—50.
4. Лаврик В. І., Скуратівська І. А. Оцінка впливу динаміки фосфору на кисневий режим водних екосистем в умовах їх евтрофікації // Екологія довкілля та безпека життєдіяльності. — 2006. — № 3. — С. 79—82.
5. Лаврик В. І., Скуратівська І. А. Прогнозування та керування якістю поверхневого стоку за допомогою імітаційного математичного моделювання // Наук. зап. НаУКМА. Біологія та екологія. — 2004. — Т. 29. — С. 51—57.
6. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології. — К.: Академія, 2002. — 203 с.
7. Моделювання і прогнозування стану довкілля / За ред. В. І. Лаврика. — К.: Академія, 2010. — 400 с.
8. Пааль Л. Л. Инженерные методы расчета формирования качества водотоков. — Таллинн, 1976. — Ч. II. — 101 с.
9. Родзиллер И. Д. Прогноз качества воды водоемов-приемников сточных вод. — М.: Стройиздат, 1984. — 263 с.
10. Романенко В. Д. Основи гідроекології. — К.: Обереги, 2001. — 728 с.