

УДК 519.876.5

*М.А. Дороніна*

*(Україна, Дніпропетровськ, Державний ВНЗ «Національний гірничий університет»)*

## **ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ**

**Вступ.** Одним із актуальних питань при дослідженні процесів збагачення корисних копалин є моделювання розподілу електромагнітних полів та визначення їх силових характеристик. Для вирішення проблем, що виникають при моделюванні електромагнітних полів, широко використовується сучасне програмне забезпечення, в основі якого лежать алгоритми числових методів. Ці методи дозволяють конструктивно проаналізувати та розрахувати потрібні характеристики полів.

**Мета роботи.** Провести порівняльний аналіз програмних продуктів числової математики та визначити особливості моделювання електромагнітних полів

**Основна частина.** Раніше для розв'язання задач аналізу та розрахунку електромагнітних полів широко використовувалися методи аналогового моделювання, в основу яких покладено принципи подібності. Ці методи можна поділити на методи фізичної та математичної подібності. При фізичному моделюванні відповідні величини моделі та оригіналу мають подібну фізичну природу. При математичній подібності модель та оригінал можуть мати різну фізичну природу, але мають однакову математичну структуру. До переваг таких методів можна віднести універсальність та можливість моделювання процесів у реальному часовому масштабі. Недоліками є те, що потрібні попередні розрахунки, для забезпечення умов подібності та значні витрати на виготовлення моделей.

Також вдало використовуються методи аналітичного моделювання. Це методи дзеркального та конформного відображення, методи інтегрування рівняння Пуассона та рівняння Лапласа. Ці методи не є універсальними, бо часто виникають складності з математичними перетвореннями та їх реалізацією. У тому разі, коли розрахунок аналітичними методами не є доцільним, використовують методи графічної побудови полів. Але і це дозволяє розв'язувати лише обмежену групу задач. Отже більш раціональним є використання числових методів моделювання.

Числові методи моделювання електромагнітних полів базуються на використанні принципів просторової та просторово-часової дискретизації. З їхньою допомогою можна отримати результати з урахуванням геометрії деталей та властивостей матеріалів.

Можна виділити два варіанти використання числових методів:

1. в частотній області, коли моделювання гармонійних полів відбувається на фіксованій частоті;
2. в часовій області, коли моделювання полів залежить від часу.

Перший метод дозволяє враховувати залежність властивостей матеріалу від частоти, але тоді складніше враховувати не лінійність параметрів матеріалу. Другий дозволяє дослідити зміни у часі, виявити не лінійність параметрів, але складніше встановити залежність від частоти.

Взагалі задачі моделювання електромагнітних полів зводяться до розв'язання рівнянь Максвелла. Для їх розв'язання рівнянь необхідно правильно вибрати крайові умови, що зв'язують значення напруженості та індукції магнітного та електричного полів по різні сторони від поверхонь, що характеризуються певною поверхневою щільністю електричного заряду.

Для кожної окремої задачі ці рівняння треба розв'язувати заново, враховуючи певні початкові та крайові умови. Тому доцільніше використовувати програмне забезпечення, в основу якого покладені алгоритми числових методів. Одним із таких є метод моментів, який є окремим випадком методу Гальоркіна [1]. Є задача, що описується диференціальним рівнянням в обмеженій області  $D(x,y)$

$$L(u) = 0 \quad (1)$$

При крайових умовах  $S(u) = 0$  невідому  $u$  достатньо точно можна описати наближеним рішенням:

$$u_a = u_0(x, y) + \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x, y) \quad (2)$$

де  $\phi_j$  - відомі аналітичні базові функції;  $a_j$  - коефіцієнти, які потрібно визначити.

Тоді як функція  $u_0(x, y)$  введена, для того щоб забезпечити виконання крайових умов. При підстановці рівняння (2) в (1) отримаємо відхил  $F(a_0, a_1, \dots, a_n, x, y)$ , відмінний від нуля:

$$F(a_0, a_1, \dots, a_n, x, y) = L(u_a) = L(u_0) + \sum_{j=0}^N a_j L(\phi_j) \quad (3)$$

Тоді невідомі коефіцієнти  $a_j$  можна знайти з матричного рівняння:

$$\sum_{j=1}^N a_j (L(\phi_j), \phi_k) = (L(u_0), \phi_k) \quad (4)$$

Для методу моментів вагові коефіцієнти знаходять з виразу  $\omega_k(x) = x^k$ , або інколи зручніше використовувати метод інтегральних співвідношень. Тоді вагова функція задається як  $\omega_k(u) = (1 \square u)^k$ .

Як ми бачимо, цей метод перетворює диференціальне рівняння в систему алгебраїчних рівнянь. Метод моментів лежить в основі деяких програмних продуктів EMAP та ASAP. Тому він є дуже зручним для моделювання електромагнітних полів, але в ньому важко враховувати складні геометричні фігури та отримана матриця є повністю заповненою, а не розрідженою, як у сіткових методах, внаслідок чого значно збільшується час обчислення.

Сіткові методи добре зарекомендували себе при моделюванні електромагнітних полів. Такі методи дозволяють отримати конкретні числові рішення. Для цього певну величину у просторово-часовій області заміняють максимально наближеним дискретним аналогом. Звісно, сіткові методи мають значну похибку при дискретизації, але її можна мінімізувати, збільшивши кількість вузлів.

Суть методу кінцевих різниць полягає в заміні диференціальних коефіцієнтів рівняння на різниці коефіцієнти, що дозволяє звести неперервне рівняння до його дискретного аналога:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x_0 + i) - u(x_0)}{i}, \quad (5)$$

де  $i$  - шаг дискретизації.

Значною перевагою цього методу є слабка залежність від геометрії конструкції, граничних умов. Але для забезпечення точних результатів шаг дискретизації  $i \neq 0$ , це потребує великих витрат пам'яті та значний час розрахунку. Цей метод найзручніше використовувати для моделювання полів у середині конструкції, оскільки обмежена область дозволяє підібрати шаг дискретизації, який забезпечить потрібну точність, але не буде потребувати значних ресурсів. У цьому методі доволі важко враховувати складні неоднорідні геометричні форми конструкції, тому зазвичай метод кінцевих різниць використовується при моделюванні однорідної розрахункової області. Метод кінцевих різниць використовується в програмних пакетах: Quick Wave польської компанії QWED, Microwave Studio німецької компанії CST, Fidelity компанії Zeland Software, XFDTD американської компанії Remcom.

Основною ідеєю методу кінцевих елементів є розбиття розрахункової області на ряд незалежних ділянок, а потім побудова апроксимації окремо для кожної ділянки. Апроксимуючі базисні функції можуть бути визначені окремо для кожної ділянки. Якщо ці ділянки мають просту форму і базисні функції, то доволі просто використовувати зазначений спосіб для конструкцій складної форми[2]. Метод кінцевих елементів широко використовується в програмних продуктах: HFSS компанії Ansoft, ANSYS та Multiphysics компанії ANSYS, Femlab компанії COOSMO та ELCUT російської компанії Тор.

Точність цих методів залежить від вибору базисних функцій, кроку дискретизації та похибки округлення. Порівняти рішення крайової задачі з її дискретним аналогом можна лише у вузлах сітки. Якщо  $u_n$  – сіткова функція визначена на сітці  $S^n$ , значення якої у вузлах сітки буде розв'язанням крайової задачі  $L(u) = f$ . Результати дискретного аналога будуть тим точніше, чим менше величина  $\|\hat{u}_n - u_n\|_n$ . Таким чином точність методу можна регулювати. Рекомендується вибирати похибку у 2-5 разів меншу неоправної, яка була обумовлена неточністю початкових даних і не може бути скорегована в процесі обчислення.

Аналізуючи ці методи можна виділити певний алгоритм моделювання електромагнітних полів, представлений на рис. 1.



**Рис. 1. Узагальнений алгоритм моделювання електромагнітних полів**

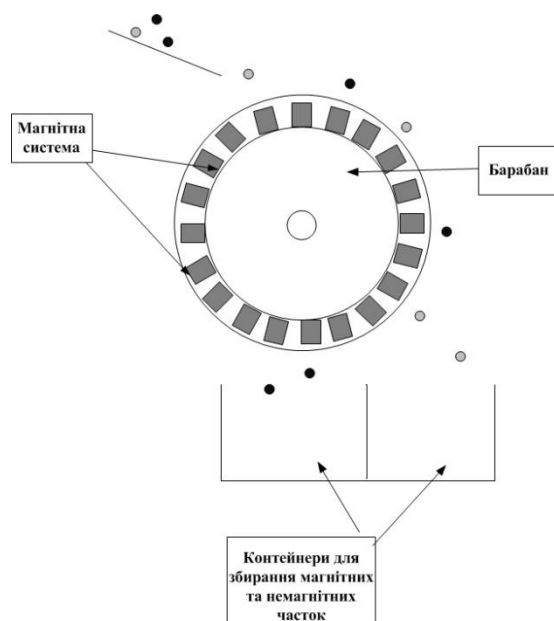
Кожний з розглянутих методів має свої переваги та недоліки, які зведені в табл. 1.

Таблиця 1

Метод	Врахування геометричних форм конструкції	Точність методу	Час обчислення за допомогою програмних продуктів
<b>Метод моментів</b>	Складно враховувати, бо кожна з базисних функцій кожної ділянки має задовольняти крайовим та початковим умовам .	Найточніший з наведених. Основну похибку може дати неправильно вибрана базисна функція.	Великий
<b>Метод кінцевих різниць</b>	Складно враховувати, тому рекомендується застосовувати для моделювання полів у середині конструкції	Залежить від вибору крайових умов та кроку дискретизації.	Середній, залежить від кроку дискретизації
<b>Метод кінцевих елементів</b>	Шляхом використання ізопараметричного перетворення не складно врахувати складні геометричні форми.	Може давати дуже точні результати, це залежатиме від вибору кроку дискретизації.	Середній, залежить від кроку дискретизації

Найуніверсальнішим можна вважати метод кінцевих елементів. За його допомогою можна врахувати складні геометричні форми конструкції, навіть якщо є розриви. Вибравши оптимальний крок дискретизації забезпечити потрібну точність, а також можна вибрати нерівномірний крок дискретизації, тобто у вузлах де нас цікавить розподіл полів можна задати більш шильний крок, а чим далі - менший. Також цей метод дозволяє враховувати властивості матеріалів конструкції та не потребує складних попередніх розрахунків.

Побудуємо модель барабана магнітного сепаратора (рис. 2.) за допомогою методу кінцевих елементів та отримаємо картину розподілу поля [3].



**Рис. 2. Схема магнітного сепаратора**

Етапи моделювання сегмента магнітної системи сепаратора показані на рис. 3., яка отримана за допомогою програмного продукту ELCUT [5].

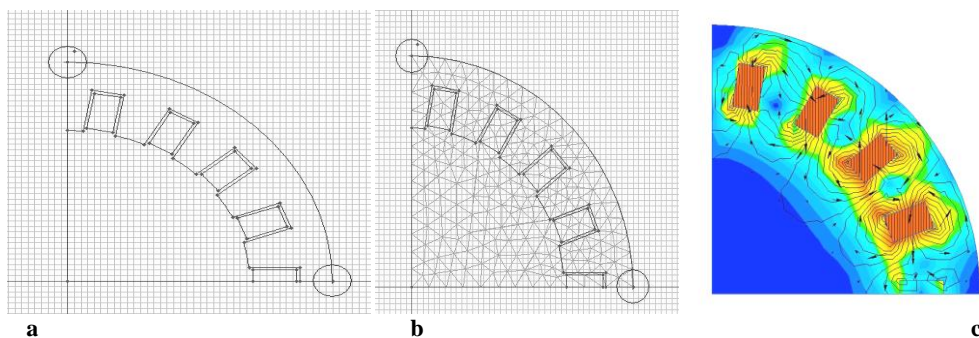


Рис. 3. (а) геометрична модель сегменту конструкції сепаратора, (б) побудова сіткової моделі, (с) картина розподілу поля.

**Висновок.** Усі наведені методи є ефективними для розв'язання задач, зв'язаних з моделюванням електромагнітних полів. Для забезпечення потрібної точності та доцільного використання методів потрібно звернути увагу на їх особливості з урахування геометричної форми та властивостей матеріалу конструкції, точності та часу обчислення. У деяких випадках можуть знадобитися попередні аналітичні розрахунки, це також може вплинути на вибір метода. Зараз все частіше для отримання потрібних результатів моделювання застосовують модифіковані методи на основі наведених.

#### Список літератури

- 1 Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер: пер. с англ. — М: Мир 1988 -352 с.
- 2.Самарский А.А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М: Наука 1989. - 432 с.
3. Шубов Л.Я. Технологии отходов: учебник / Л.Я. Шубов, Старовский М.Е. — М.: ГОУВПО «МГУС», 2006. - 411с.
4. Моррис І.Д. Моделирование электромагнитных полей - как выбрать лучший метод // Электроника. — 2012.— №3. — С. 124-129.
5. Официальный сайт ELCUT, руководство пользователя [Электронный ресурс] — Режим доступа к данным: [http://elcut.ru/free\\_doc\\_r.htm](http://elcut.ru/free_doc_r.htm)

*Рекомендовано до друку: д-ром техн. наук, проф. Корсуном В.І.*