

УДК 621.66

М.Н. Трубицин, канд. техн. наук

(Украина, Днепропетровск, Государственное ВУЗ «Национальный горный университет»)

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОДНОПЛОСКОСТНОЙ БАЛАНСИРОВКИ МЕТОДОМ АМПЛИТУД

Введение

Задача одноплоскостной балансировки (З1ПБ) выполняется чаще всего методами динамической балансировки, как более точными по сравнению со статической балансировкой, – методами пробных пусков. К ним относятся: метод фаз и амплитуд (МФиА) – на каждом пуске измеряются свои фаза и амплитуда (вектор) колебаний опоры вращающегося диска; метод амплитуд (МА) – производится измерение только одной амплитуды (модуля вектора колебаний). В виду широкого применения З1ПБ в горном машиностроении и промышленности, например, балансировки: вентиляторов проветривания шахт; различных дымососных установок аглофабрик; роторов сепараторов сухого обогащения; турбин насосов водооткачивающих систем и др., а также, выполнения роли базисного алгоритма З1ПБ при проведении двух- и более плоскостных балансировок МА детальный анализ получения решения этой задачи показывает **актуальность** данной работы.

Рациональное решение задачи балансировки подразумевает проведение минимального количества пробных пусков при одном обязательном, начальном («нулевом») пуске, что при наличии многоопорного или гибкого ротора (несколько плоскостей коррекции – плоскостей расстановки пробных грузов) имеет существенное значение. Рассмотрев последовательность решений З1ПБ и двухплоскостной можно сформулировать простое правило для определения количества пробных пусков - при совпадении количества плоскостей коррекции и количества опор, на которых одновременно (за один пробный пуск) измеряются параметры колебаний опор, имеем:

– для МФиА количество пробных пусков равно количеству плоскостей коррекции – по одному пробному пуску из каждой плоскости коррекции;

– для МА количество пробных пусков равно утроенному количеству плоскостей коррекции – по три пробных пуска из каждой плоскости коррекции.

В связи с выше изложенным, можно заключить, что сокращение пробных пусков хотя бы на единицу или установление взаимосвязи параметров пробных и начального пусков имеет важное теоретическое и практическое значение. Сформулируем **цель** настоящей работы - определение условий получения однозначного решения ЗИПБ МА на основании минимального количества исходных данных – измеренных амплитуд колебаний опор балансируемого диска. При этом **идея** работы состоит в нахождении возможной теоретической взаимосвязи между величинами экспериментально измеренных амплитуд начального и пробных пусков.

Анализ известных исследований и публикаций

Основные фундаментальные работы по теоретическим вопросам балансировки это – [1] и [2]. В них представлено тезисное рассмотрение получения решения задач балансировки МА только для специальной расстановки пробных грузов на углах 0° , 90° и 180° . В этих случаях необходимо произвести 3-4 пробных пуска в ЗИПБ и 5-6 пусков при двухплоскостной балансировке. Причем иногда последний пробный пуск служит только для определения знака угла (фазы) искомой начальной неуравновешенности балансируемого ротора, что говорит о не достаточно полном использовании последнего условия. Имеем нарушение вышеприведенного правила количества пробных пусков и, следовательно, возможность сокращения этого количества, что возможно выполнить только на основании еще не установленных обобщенных теоретических зависимостей.

Современные методики, приборы и станки динамической балансировки роторов основаны на МФиА, алгоритм получения решения при этом удобно описывается комплексными числами, [3]. При этом необходимая для сокращения пусков обобщенная аналитическая связь между формулами обоих МФиА и МА в работах [1-4] не установлена. В [5, 6] получены удобные выражения для однозначного получения решения ЗИПБ МА, однако не достаточно глубоко рассмотрены вопросы применения графической интерпретации решения и не выявлено причин возникновения «лишних» уравнений и, следовательно, возможного сокращения «лишних» пробных пусков. Получаемые экспериментальные и теоретические результаты обоих методов сопоставимы, т.к. можно считать, что эмпирическое измерение величин фаз и амплитуд колебаний имеют одинаковые погрешности, [5]. Единственным аналитическим условием отсутствия решения ЗИПБ является совпадение любых двух пробных пусков (дисбалансов).

Традиционно будем считать, что за один пробный пуск в МФиА производится одновременный замер двух величин - и фазы, и амплитуды колебаний опор, а в МА – одной величины - амплитуды. Это позволяет установить соответствие между количеством экспериментально замеренных скалярных величин каждого пуска (амплитуда и фаза - вектор в МФиА, или одна амплитуда в МА) и количеством искомым векторных величин – вектора начального дисбаланса и динамического коэффициента влияния (ДКВ), по две компоненты в каждом векторе.

Материалы исследований

Рассмотрим описание задачи балансировки при помощи комплексных чисел, что соответствует МФиА, [3]. Принимаем $i = \sqrt{-1}$, тогда дисбалансы, соответствующие им амплитуды и ДКВ в Эйлеровой форме будут иметь вид

$$d_0 = |d_0|e^{i\cdot\phi_0}, \quad d_j = |d_j|e^{i\cdot\phi_j}, \quad A_0 = |A_0|e^{i\cdot\alpha_0}, \quad A_j = |A_j|e^{i\cdot\alpha_j}, \quad k = |k| \cdot e^{i\cdot\gamma},$$

где $j=1,2,3$ – номера пробных пусков, а векторное представление комплексных чисел показано на рис. 1. ДКВ k изменяет масштаб векторов дисбалансов на $|k|$ раз и одновременно проворачивает каждый векторный треугольник дисбалансов на сдвиг фаз – угол γ , до получения векторного треугольника амплитуд. Символьная постановка и решение ЗИПБ для обоих рассматриваемых методов представлена в табл. 1

Получаемые здесь аналитические зависимости для обоих методов позволяют проследить взаимное соответствие этапов получения решений, рассмотреть различные варианты и подходы вывода разрешающих систем уравнений, основанных на известных свойствах комплексных чисел. В последней строке табл. 1 показаны равенства действительной и мнимой частей основного разрешающего комплексного уравнения. Использование других подходов, а именно, равенства аргументов или равенства квадратов модулей сравниваемых комплексных чисел приводит как и устранение синуса и косинуса угла $\phi_1' - \phi_0$ приводит к одному и тому же уравнению, [6]

$$(\lambda_j^2 - 1)d_0^2 - 2d_j d_0 \cos(\phi_j - \phi_0) = d_j^2, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

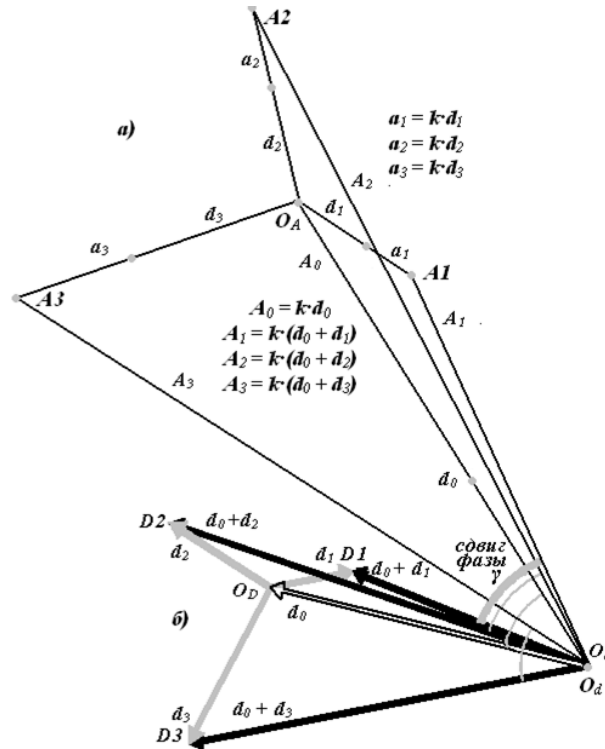


Рис. 1. Общая графическая интерпретация МА (метода трех пробных пусков) при совмещении плоскостей измерения амплитуд (угловая координата α) и плоскости коррекции (угловая координата ϕ):
 а) треугольники амплитуд в плоскости измерения амплитуд;
 б) векторный многоугольник дисбалансов в плоскости коррекции

Таблица 1

Алгоритмы решения ЗПБ для обоих рассматриваемых методов

Этапы решения	МФиА (комплексные числа)	МА (действительные числа)
Исходные данные	Амплитуды и фазы колебаний опор A_0 и A_1	Амплитуды начального и пробных пусков A_0 и A_1, A_2, A_3 . Относительные амплитуды: $\lambda_j = A_j/A_0$
	Вектор пробного дисбаланса d_1	Вектора пробных дисбалансов d_1, d_2, d_3 – модули и фазы ϕ_j
Основные исходные уравнения	$\begin{cases} A_0 = kd_0 \\ A_1 = k(d_0 + d_1) \end{cases}$	$\begin{cases} k = A_0 \cdot d_0^{-1} \\ (A_j k^{-1})^2 = (A_0 k^{-1})^2 + d_j^2 - 2A_0 k^{-1} d_j \cos(\pi - \phi_0 + \phi_j) \end{cases}$
Соответствие экспериментально замеренных данных и искомым величин	Два вектора амплитуд A_0 и A_1 соответствуют двум векторам - ДКВ k и начального дисбаланса d_0	Четырем модулям амплитуд A_0, A_1, A_2, A_3 соответствуют две координатные проекции начального дисбаланса $d_0 \cos \phi_0, d_0 \sin \phi_0$, квадрат его модуля d_0^2 и модуль (масштабный коэффициент) ДКВ k
Общий вид получаемых решений	$\begin{bmatrix} kd_0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & d_1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} d_0^2 \\ d_0 \cos \phi_0 \\ d_0 \sin \phi_0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^2) & d_1 \cos \phi_1 & d_1 \sin \phi_1 \\ \frac{1}{2}(1 - \lambda_2^2) & d_2 \cos \phi_2 & d_2 \sin \phi_2 \\ \frac{1}{2}(1 - \lambda_3^2) & d_3 \cos \phi_3 & d_3 \sin \phi_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_3^2 \end{bmatrix}$
Окончательный вид получаемых решений	$k = \begin{vmatrix} 1 & A_0 \\ 1 & A_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & d_1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{A_1 - A_0}{d_1}$ $d_0 = \begin{vmatrix} A_0 & 0 \\ A_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & A_0 \\ 1 & A_1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{A_0 d_1}{A_1 - A_0}$	
Основное разрешающее уравнение	$\frac{A_1}{A_0} = 1 + \frac{d_1}{d_0}, \quad \phi_1' = \arg(d_0 + d_1)$	$\begin{cases} \frac{A_1}{A_0} \cos(\phi_1' - \phi_0) = \frac{d_1}{d_0} \cos(\phi_1 - \phi_0) + 1 \\ \frac{A_1}{A_0} \sin(\phi_1' - \phi_0) = \frac{d_1}{d_0} \sin(\phi_1 - \phi_0) \end{cases}$ где $tg \phi_1' = \frac{d_0 \sin \phi_0 + d_1 \sin \phi_1}{d_0 \cos \phi_0 + d_1 \cos \phi_1}$

включающему заранее связанные неизвестные $d_0^2, d_0 \cos \phi_0, d_0 \sin \phi_0$. Исключение других аргументов тригонометрических функций в этой системе двух уравнений не оправдано, т.к. оно дает очевидные тождества. Подстановка выражения для $tg(\phi_1)$ за счет квадратичной связи между тригонометрическими функциями тангенс-синус и тангенс-косинус приводит к тому же квадратичному уравнению (1) для обоих равенств действительной и мнимой частей сравниваемых комплексных чисел.

Рассмотрим геометрическую трактовку уравнений (1), сделав подстановку

$$d_0^2 = d_0^2 \cdot \sin^2 \phi_0 + d_0^2 \cdot \cos^2 \phi_0, \quad (2)$$

после несложных преобразований получим уравнение окружности радиуса $\lambda_j d_j / (\lambda_j^2 - 1)$, центр которой находится в точке с координатами $\{d_j \cos \phi_j / (\lambda_j^2 - 1); d_j \sin \phi_j / (\lambda_j^2 - 1)\}$ в системе координат $X = d_0 \cos \phi_0$ и $Y = d_0 \sin \phi_0$

$$\left(X - \frac{d_j \cos \phi_j}{\lambda_j^2 - 1} \right)^2 + \left(Y - \frac{d_j \sin \phi_j}{\lambda_j^2 - 1} \right)^2 = \left(\frac{d_j \lambda_j}{\lambda_j^2 - 1} \right)^2. \quad (3)$$

В этом случае нам удастся избавиться от «лишнего» не линейного неизвестного d_0^2 , очевидно за счет удачного выбора системы координат $X-Y$, соответствующей искомым линейным неизвестным - проекциям на эти оси начального дисбаланса. Решение нелинейной системы трех уравнений (3), соответствующее трем пробным пускам $j=1,2,3$, проведем снижая порядок уравнений, основываясь на следующей геометрической интерпретации. Пара окружностей, в общем случае, имеет две точки пересечения, которые ограничивают их общую хорду. Эта хорда будет лежать на прямой, проходящей через указанные ограничивающие точки. Уравнение прямой легко получить вычитанием одного уравнения (3), например при $j=2$, из второго, при $j=1$ - имеем каноническое уравнение прямой 1-2.

$$\left| \begin{array}{cc} d_1 \cos \phi_1 & d_2 \cos \phi_2 \\ \lambda_1^2 - 1 & \lambda_2^2 - 1 \end{array} \right| X + \left| \begin{array}{cc} d_1 \sin \phi_1 & d_2 \sin \phi_2 \\ \lambda_1^2 - 1 & \lambda_2^2 - 1 \end{array} \right| Y + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} d_1^2 & d_2^2 \\ \lambda_1^2 - 1 & \lambda_2^2 - 1 \end{array} \right| = 0.$$

Аналогично строится уравнение для любой второй пары окружностей, например 1-3. Т.к. полученные две прямые должны пересечься в одной точке, решение этих канонических уравнений однозначно даст искомый результат

$$\begin{bmatrix} d_0 \cos \phi_0 \\ d_0 \sin \phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{cc} d_1 \cos \phi_1 & d_2 \cos \phi_2 \\ \lambda_1^2 - 1 & \lambda_2^2 - 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} d_1 \sin \phi_1 & d_2 \sin \phi_2 \\ \lambda_1^2 - 1 & \lambda_2^2 - 1 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} d_1 \cos \phi_1 & d_3 \cos \phi_3 \\ \lambda_1^2 - 1 & \lambda_3^2 - 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} d_1 \sin \phi_1 & d_3 \sin \phi_3 \\ \lambda_1^2 - 1 & \lambda_3^2 - 1 \end{array} \right| \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1^2 & d_2^2 \\ \lambda_1^2 - 1 & \lambda_2^2 - 1 \\ d_1^2 & d_3^2 \\ \lambda_1^2 - 1 & \lambda_3^2 - 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Полученное выражение при решении ЗИПБ МА позволяет снизить порядок определителей и обрабатываемых матриц с 3 до 2, см. табл. 1, за счет увеличения количества определителей второго порядка. В (4) неявно присутствует данные нулевого пуска - в выражениях относительных амплитуды $\lambda_j = A_j / A_0$, таким образом, задействованы все пробные и нулевой пуски. Но в то же время использовать в этом или другом алгоритме третью пару окружностей 2-3 не имеет смысла, т.к. каноническое уравнение их общей прямой будет составлять линейную комбинацию - разницу уравнений прямых 1-2 и 1-3. Другими словами, будем иметь пучок трех прямых, проходящих через точку пересечения трех окружностей. Для большей наглядности геометрическая интерпретация указанного алгоритма для заданных значений амплитуд и векторов пробных дисбалансов представлена на рис. 2.

Следует ожидать, что однозначное решение поставленной задачи будет иметь место при выполнении единственного условия, следующего из табл. 1 - обращаемости матрицы, [6]

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^2) & d_1 \cos \phi_1 & d_1 \sin \phi_1 \\ \frac{1}{2}(1 - \lambda_2^2) & d_2 \cos \phi_2 & d_2 \sin \phi_2 \\ \frac{1}{2}(1 - \lambda_3^2) & d_3 \cos \phi_3 & d_3 \sin \phi_3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

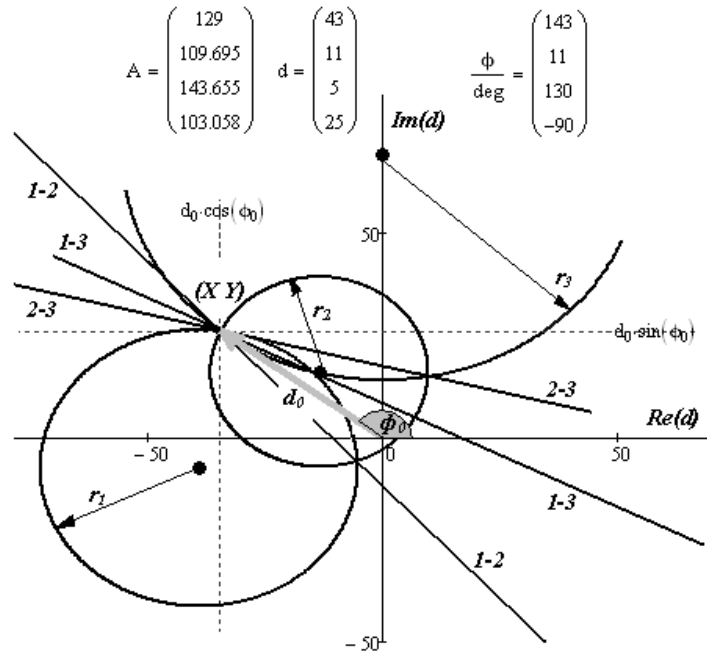


Рис. 2. Графическое решение ЗПБ МА. Результаты расчета – нулевые компоненты векторов d и ϕ .

В то же время, полученные решения указанной системы трех линейных уравнений, табл. 1, можно связать согласно тождества (2), тогда с учетом $\lambda_j = A_j/A_0$ получим уравнение для определения A_0 по известным параметрам трех пробных пусков A_j . Использование правила Крамера позволяет получить

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 - 1 & d_1^2 & d_1 \sin \phi_1 \\ \lambda_2^2 - 1 & d_2^2 & d_2 \sin \phi_2 \\ \lambda_3^2 - 1 & d_3^2 & d_3 \sin \phi_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \lambda_1^2 - 1 & d_1 \cos \phi_1 & d_1^2 \\ \lambda_2^2 - 1 & d_2 \cos \phi_2 & d_2^2 \\ \lambda_3^2 - 1 & d_3 \cos \phi_3 & d_3^2 \end{vmatrix}^2 = 4d_2^2 \begin{vmatrix} d_1^2 & d_1 \cos \phi_1 & d_1 \sin \phi_1 \\ d_2^2 & d_2 \cos \phi_2 & d_2 \sin \phi_2 \\ d_3^2 & d_3 \cos \phi_3 & d_3 \sin \phi_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1^2 - 1 & d_1 \cos \phi_1 & d_1 \sin \phi_1 \\ \lambda_2^2 - 1 & d_2 \cos \phi_2 & d_2 \sin \phi_2 \\ \lambda_3^2 - 1 & d_3 \cos \phi_3 & d_3 \sin \phi_3 \end{vmatrix}$$

Откуда имеем уравнение четвертого порядка для нахождения двух значений A_0

$$a \cdot \left(\frac{1}{A_0^2} \right)^2 + b \cdot \left(\frac{1}{A_0^2} \right) + c = 0, \quad A_0', A_0'' = \sqrt{\frac{2a}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}},$$

где

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^2 + w^2 \\ -2(y \cdot v + z \cdot w + 2u) \\ y^2 + z^2 + 4x \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^2 & d_1 \cos \phi_1 & d_1 \sin \phi_1 \\ d_2^2 & d_2 \cos \phi_2 & d_2 \sin \phi_2 \\ d_3^2 & d_3 \cos \phi_3 & d_3 \sin \phi_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & A_1^2 \\ 1 & A_2^2 \\ 1 & A_3^2 \end{bmatrix}.$$

Проведем возможный перебор расчетов контрольных примеров ЗПБ, для выяснения возможности однозначного выбора корня представленного уравнения на основе определения закономерности выбора «правильного» корня. Данные и результаты расчетов при ДКВ $k = 3e^{i \cdot deg \cdot 32}$ сведем в табл. 2.

Как видно из последней таблицы (ячейки с серой подложкой) закономерность или систему нужного выбора корня выявить не удастся, поэтому вопрос однозначного выбора A_0 остается открытым. Следовательно, отбрасывание из рассмотрения условий начального пуска не представляется возможным для однозначного решения ЗПБ МА. Подобное игнорирование начальным состоянием системы вызовет необходимость введения в алгоритм дополнительных проверок или условий и не может иметь практического смысла.

Примеры определения амплитуды начального пуска по амплитудам пробных пусков

Соотношения пробных дисбалансов	№ пускa	Соотношения амплитуд															
		$A_1, A_2, A_3 > A_0$				$A_1, A_2, A_3 < A_0$				$A_1 < A_0; A_2, A_3 > A_0$				$A_1 > A_0; A_2, A_3 < A_0$			
		A	d	ϕ^o	$\frac{A_1}{A}$	A	d	ϕ^o	$\frac{A_1}{A}$	A	d	ϕ^o	$\frac{A_1}{A}$	A	d	ϕ^o	$\frac{A_1}{A}$
$d_1=d_2=d_3$	0	21	7	143	21	231	77	183	45	165	55	183	45	165	55	183	45
	1	42		30	21	191		30	45	127		30	45	204		150	45
	2	66	15	130	45	217	15	70	231	207	15	160	165	145	15	60	165
	3	24		-30	45	194		-30	231	208		200	165	123		20	165
$d_1 \neq d_2 \neq d_3$	0	21	7	143	21	261	87	143	261	261	87	143	145	135	45	143	135
	1	25	11	11	21	240	11	11	261	230	11	-17	145	167	11	130	135
	2	36	5	130	36	259	1	20	263	389	45	120	261	125	15	30	150
	3	65	25	-90	36	224	25	-90	263	444	65	170	261	63	65	-30	150

Выводы:

1. Предпринята теоретическая попытка уменьшить количество пусков при решении ЗІПБ МА. Двухзначность (два корня квадратного уравнения) полученного решения-связи начального и пробных пусков говорит о необходимости проведения дополнительных исследований (четвертого пробного пуска), что не сокращает общее количество ведения испытаний.
2. Показано не возможность полного использования известного тригонометрического тождества (2) в рассматриваемой задаче, за счет уже существующего его применения в аналитическом и геометрическом описании нулевого пуска. Это условие можно служить только для уточнения знаков определяемых величин.
3. Получен аналитический вариант решения ЗІПБ, с использованием определителей второго порядка, дающий в результате только проекции начального дисбаланса, без не нужного квадрата его модуля.

Список литературы

1. Штейнвольф Л.И. Динамические расчеты машин и механизмов / Л.И. Штейнвольф. – М.: Машгиз, 1961, – 240с.
2. Левит М.Е. Справочник по балансировке. / М.Е. Левит. – М.: Машиностроение, 1992, – 464 с.
3. Гольдин А.С. Вибрация роторных машин / А.С. Гольдин. – М.: Машиностроение, 2000, – 344 с.
4. Левит М.Е., Рыженков В.М. Балансировка деталей и узлов. / М.Е. Левит, В.М. Рыженков. – М.: Машиностроение, 1986, – 248 с.
5. Трубицин М.Н. Геометрическая интерпретация корректности решения задачи одноплоскостной балансировки методом амплитуд: науч. журн. / М.Н. Трубицин, И.А. Таран // Вісник СУНУ ім. В. Даля, № 15(204), ч. 2, 2013, С. 141-146.
6. Таран И.А. Обобщенная формула одноплоскостной балансировки / И.А. Таран, М.Н. Трубицин / Вісник НТУ «ХП», №8(1051), 2014, – С.114-119.

Рекомендовано до друку д-ром техн. наук, проф. Самусею В.І.