

УДК 622.625.28-592.112(043.5)

А.Н. Коптовец, д-р техн. наук

(Украина, Днепропетровск, Государственное ВУЗ «Национальный горный университет»)

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРАЦИОННОГО НАГРУЖЕНИЯ
КОЛОДОЧНО-КОЛЕСНОГО ТОРМОЗА**

Введение. Решение контактных задач с трением, построение моделей трибомеханики в тормозостроении не применяется. Торможение рассматривается как задача в механике твердого тела в виде эмпирической науки о трении. В теории контактирования твердых тел вибрационное нагружение нормаль-

ного направления определяется, в основном, реологическими, а в тангенциальном – фрикционными характеристиками материалов пар трения.

Цель работы. Исследование характеристик нагружения тормоза вычислительным экспериментом вместо натурных испытаний.

Материалы исследований. Рассмотрим в качестве динамической модели колодочно-колесного тормоза простейшую автоколебательную систему с двумя степенями свободы (рис. 1), состоящую из колодки массой m , скользящей по колесу радиусом R , вращающегося с постоянной угловой скоростью ω , и двух упругодемпфирующих элементов Фойхта. Первый из них, жесткость и коэффициент вязкости которого обозначим через c_1 и b_1 соответственно, моделирует конструктивную связь тормозного механизма, действующую в направлении под углом β к вертикальной оси, и прижимает колодку к колесу номинальным усилием Q . Второй упругодемпфирующий элемент, жесткость и коэффициент вязкости которого обозначим через c_2 и b_2 соответственно, моделирует конструктивную связь тормозного механизма, действующую в направлении под углом α к плоскости трения. Отметим, что если хотя бы один из углов α или β отличен от значений 0° или 90° , то наличие в рассматриваемой модели упругодемпфирующих элементов приводит к координатной взаимосвязи нормальных и тангенциальных колебаний колодки.

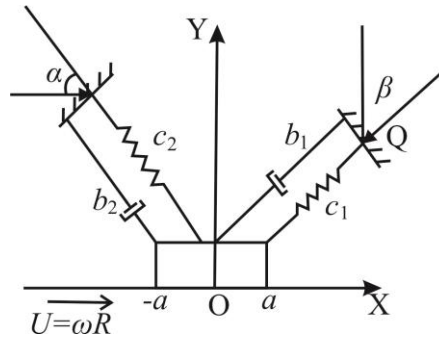


Рис. 1. Расчетная схема динамической модели тормоза

Каждая контактирующая поверхность покрыта деформируемым шероховатым слоем, представляющим собой линейно-упругие пружины одинаковой жесткости k , но различной высоты. В локальных системах координат $O_s \xi_s \eta_s$, $s=1, 2$, шероховатые поверхности колодки и колеса описываются соответствующими функциями вида

$$f_1(\xi_1) = \sum_{i=1}^{N_1} g_i^{(1)} \sin(\omega_i^{(1)} \xi_1), \quad f_2(\xi_2) = \sum_{i=1}^{N_2} g_i^{(2)} \sin(\omega_i^{(2)} \xi_2), \quad (1)$$

где $g_i^{(1)}$, $\omega_i^{(1)}$, $i = \overline{1, N_1}$, – коэффициенты, описывающие шероховатую поверхность колодки; $g_i^{(2)}$, $\omega_i^{(2)}$, $i = \overline{1, N_2}$, – коэффициенты, описывающие шероховатую поверхность колеса.

Нормальная компонента F_y усилия контактного взаимодействия колодки и колеса определяется как

$$F_y(x, y) = \int_{-a}^a k (f_2(\xi + x - Ut) - f_1(\xi) - y) H(f_2(\xi + x - Ut) - f_1(\xi) - y) d\xi, \quad (2)$$

где $H(S)$ – функция Хевисайда.

Трение между контактирующими поверхностями описывается одночленным законом Амонтона, который запишем в следующей форме:

$$|F_x| \leq \varphi F_y; \quad (3)$$

$$|F_x| < \varphi F_y \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = U; \quad (4)$$

$$|F_x| = \varphi F_y \quad \Rightarrow \quad \frac{F_x}{|F_x|} = - \frac{\dot{x} - U}{|\dot{x} - U|}, \quad (5)$$

где F_x – сила трения; φ – коэффициент трения; $U = \omega R$ – скорость движения поверхности колеса.

Таким образом, динамическое поведение рассматриваемой системы описывается следующими уравнениями:

$$m\ddot{x} + b_{xx}\dot{x} + c_{xx}x + b_{xy}\dot{y} + c_{xy}y - F_x + Q_x = 0; \quad (6)$$

$$m\ddot{y} + b_{yy}\dot{y} + c_{yy}y + b_{yx}\dot{x} + c_{yx}x - F_y + Q_y = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} b_{xx} &= b_1 \sin^2 \beta + b_2 \cos^2 \alpha; \\ c_{xx} &= c_1 \sin^2 \beta + c_2 \cos^2 \alpha; \\ b_{xy} &= b_{yx} = b_1 \cos \beta \sin \beta - b_2 \cos \alpha \sin \alpha; \\ c_{xy} &= c_{yx} = c_1 \cos \beta \sin \beta - c_2 \cos \alpha \sin \alpha; \\ b_{yy} &= b_1 \cos^2 \beta + b_2 \sin^2 \alpha; \\ c_{yy} &= c_1 \cos^2 \beta + c_2 \sin^2 \alpha; \\ Q_x &= Q \sin \beta; \\ Q_y &= Q \cos \beta. \end{aligned}$$

Учитывая, что для моделирования фрикционных автоколебаний используется метод установления, начальные условия примем следующими:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = 0; \\ y(0) &= 0, \quad \dot{y}(0) = 0. \end{aligned}$$

Задача состоит в определении закона движения колодки $\{x(t), y(t)\}$ с учетом связанности тангенциальных и нормальных колебаний.

Для разработки вычислительного алгоритма решения сформулированной выше динамической задачи с трением используем вариационный подход [1 – 3]. Пусть $\{u, v\}$ – возможные перемещения колодки, $\{\delta x, \delta y\} = \{u - x, v - y\}$ – вариации компонент перемещений колодки, $\{\delta \dot{x}, \delta \dot{y}\} = \{\dot{u} - \dot{x}, \dot{v} - \dot{y}\}$ – вариации компонент скорости колодки. Сложим уравнения (3) и (4), умножив их на соответствующие вариации компонент скорости. В результате получим

$$\begin{aligned} &(m\ddot{x} + b_{xx}\dot{x} + c_{xx}x + b_{xy}\dot{y} + c_{xy}y - F_x + Q_x)(\dot{u} - \dot{x}) + \\ &+ (m\ddot{y} + b_{yy}\dot{y} + c_{yy}y + b_{yx}\dot{x} + c_{yx}x - F_y + Q_y)(\dot{v} - \dot{y}) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношение (8) выражает принцип возможных мощностей для рассматриваемой системы. Аналогично работе [4] для произвольной возможной скорости \dot{u} можно записать, что

$$F_x(\dot{u} - \dot{x}) \geq -\varphi F_y(|\dot{u} - U| - |\dot{x} - U|). \quad (9)$$

С учетом выражения (9) из уравнения (8) следует, что решение $\{x, y\}$ системы уравнений (6) – (7) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} &(m\ddot{x} + b_{xx}\dot{x} + c_{xx}x + b_{xy}\dot{y} + c_{xy}y + Q_x)(\dot{u} - \dot{x}) + \varphi F_y(x, y)(|\dot{u} - U| - |\dot{x} - U|) + \\ &+ (m\ddot{y} + b_{yy}\dot{y} + c_{yy}y + b_{yx}\dot{x} + c_{yx}x - F_y(x, y) + Q_y)(\dot{v} - \dot{y}) \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя терминологию, введенную в работах Ж.-Л. Лионса и его учеников [5], неравенство (10) можно отнести к типу квазивариационных вследствие того, что нормальное усилие F_y , определяемое по формуле (2), зависит от перемещений колодки $\{x(t), y(t)\}$.

Трехслойные разностные схемы. Произведем дискретизацию вариационной задачи (10). Разобьём временную ось на равные отрезки $[t^{n-1}, t^n]$, ($n = 1, 2, \dots$). Длину этих отрезков обозначим через h . Далее под $\{x^n, y^n\}$ будем понимать приближенное значение $\{x(t), y(t)\}$ в момент времени t^n . При использо-

ванні для інтегрування по времени квазивариационного неравенства (10) трехслойной схемы с весами [6] получим:

$$\begin{aligned}
 & \left(m \frac{x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1}}{h^2} + b_{xx} \frac{x^{n+1} - x^{n-1}}{2h} + c_{xx}(\theta_1 x^{n+1} + \theta_2 x^n + \theta_3 x^{n-1}) + \right. \\
 & + b_{xy} \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2h} + c_{xy}(\theta_1 y^{n+1} + \theta_2 y^n + \theta_3 y^{n-1}) + \tilde{Q}_x^n \left(\dot{u} - \frac{x^{n+1} - x^{n-1}}{2h} \right) + \\
 & + \left(m \frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{h^2} + b_{yy} \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2h} + c_{yy}(\theta_1 y^{n+1} + \theta_2 y^n + \theta_3 y^{n-1}) + \right. \\
 & + b_{yx} \frac{x^{n+1} - x^{n-1}}{2h} + c_{yxs}(\theta_1 x^{n+1} + \theta_2 x^n + \theta_3 x^{n-1}) - F_y^n + \tilde{Q}_y^n \left(\dot{v} - \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2h} \right) + \\
 & \left. + \varphi \tilde{F}_y^n |\dot{u} - U| - \varphi \tilde{F}_y^n \left| \frac{x^{n+1} - x^{n-1}}{2h} - U \right| \geq 0, \quad n = 2, 3, \dots, \right. \tag{11}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_y^n &= F_y(\theta_1 x^{n+1} + \theta_2 x^n + \theta_3 x^{n-1}, \theta_1 y^{n+1} + \theta_2 y^n + \theta_3 y^{n-1}); \\
 \tilde{Q}_x^n &= \theta_1 Q_x^{n+1} + \theta_2 Q_x^n + \theta_3 Q_x^{n-1}; \\
 \tilde{Q}_y^n &= \theta_1 Q_y^{n+1} + \theta_2 Q_y^n + \theta_3 Q_y^{n-1}; \\
 \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= 1; \\
 x^0 = x^1 = 0; \quad y^0 = y^1 &= 0.
 \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 d^{n+1} &= \frac{x^{n+1} - x^{n-1}}{2h}; \quad e^{n+1} = \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2h}; \\
 \delta^{n+1} &= \frac{x^{n+1} - x^n}{h}; \quad \gamma^{n+1} = \frac{y^{n+1} - y^n}{h}.
 \end{aligned}$$

Тогда схему (11) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & (2m(d^{n+1} - \delta^n)/h + b_{xx}d^{n+1} + c_{xx}(2h\theta_1 d^{n+1} + \theta_2 x^n + (\theta_3 + \theta_1)x^{n-1}) + \\
 & + b_{xy}e^{n+1} + c_{xy}(2h\theta_1 e^{n+1} + \theta_2 y^n + (\theta_3 + \theta_1)y^{n-1}) + \tilde{Q}_x^n)(\dot{u} - d^{n+1}) + \\
 & + (2m(e^{n+1} - \gamma^n)/h + b_{yy}e^{n+1} + c_{yy}(2h\theta_1 e^{n+1} + \theta_2 y^n + (\theta_3 + \theta_1)y^{n-1})) + \\
 & + b_{yx}d^{n+1} + c_{yxs}(2h\theta_1 d^{n+1} + \theta_2 x^n + (\theta_3 + \theta_1)x^{n-1}) - F_y^n + \tilde{Q}_y^n)(\dot{v} - e^{n+1}) + \\
 & + \varphi F_y^{n+1} |\dot{u} - U| - \varphi F_y^{n+1} |d^{n+1} - U| \geq 0, \quad n = 2, 3, \dots \tag{12}
 \end{aligned}$$

где

$$\tilde{F}_y^{n+1} = F_y(2h\theta_1 d^{n+1} + \theta_2 x^n + (\theta_3 - \theta_1)x^{n-1}, 2h\theta_1 e^{n+1} + \theta_2 y^n + (\theta_3 - \theta_1)y^{n-1}).$$

Для решения квазивариационного неравенства (12) используем итерационный процесс (k – номер итерации):

$$\begin{aligned}
 & (2m(d_{(k+1)}^{n+1} - \delta^n)/h + b_{xx}d_{(k+1)}^{n+1} + c_{xx}(2h\theta_1 d_{(k+1)}^{n+1} + \theta_2 x^n + (\theta_3 + \theta_1)x^{n-1}) + \\
 & + b_{xy}e_{(k+1)}^{n+1} + c_{xy}(2h\theta_1 e_{(k+1)}^{n+1} + \theta_2 y^n + (\theta_3 + \theta_1)y^{n-1}) + \tilde{Q}_x^n)(\dot{u} - d_{(k+1)}^{n+1}) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(2m(e_{(k+1)}^{n+1} - \gamma^n) / h + b_{yy}e_{(k+1)}^{n+1} + c_{yy}(2h\theta_1e_{(k+1)}^{n+1} + \theta_2y^n + (\theta_3 + \theta_1)y^{n-1}) \right) + \\
 & + b_{yx}d_{(k+1)}^{n+1} + c_{yx}(2h\theta_1d_{(k+1)}^{n+1} + \theta_2x^n + (\theta_3 + \theta_1)x^{n-1}) - \tilde{F}_{y,(k)}^n + \tilde{Q}_y^n \left(\dot{v} - e_{(k+1)}^{n+1} \right) + \\
 & + \varphi \tilde{F}_{y,(k)}^n | \dot{u} - U | - \varphi \tilde{F}_{y,(k)}^n | d_{(k+1)}^{n+1} - U | \geq 0, \quad n = 2, 3, \dots, k = 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\tilde{F}_{y,(k)}^n = F_y(2h\theta_1d_{(k)}^{n+1} + \theta_2x^n + (\theta_3 - \theta_1)x^{n-1}, 2h\theta_1e_{(k)}^{n+1} + \theta_2y^n + (\theta_3 - \theta_1)y^{n-1}).$$

Нетрудно видеть, что если итерационный процесс (13) сходится, то предел последовательности $\{d_{(k)}^{n+1}, e_{(k)}^{n+1}\}$ является решением квазивариационного неравенства (12). Используя результаты работы [2], можно показать, что итерационный процесс (13) сходится при любом выборе начального приближения и ограничении сверху на величину коэффициента трения.

В качестве начального приближения в итерационном процессе (13) целесообразно принять

$$d_{(0)}^{n+1} = d^n, \quad e_{(0)}^{n+1} = e^n.$$

Неравенство (13) является вариационным. Используя результаты работы [6], можно показать, что на каждой итерации решение вариационного неравенства (13) сводится к решению задачи минимизации следующей функции двух переменных:

$$J_1(d, e) = \frac{1}{2}a_{11}d^2 + a_{12}de + \frac{1}{2}a_{22}e^2 - g_1d - g_2e + g_0|d - u|, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{2m}{h} + b_{xx} + 2c_{xx}h\theta_1; & a_{12} &= b_{xy} + 2c_{xy}h\theta_1; \\
 a_{22} &= \frac{2m}{h} + b_{yy} + 2c_{yy}h\theta_1; & a_{21} &= a_{12} = b_{yx} + 2c_{yx}h\theta_1; \\
 g_1 &= 2m\delta^n / h - c_{xx}(\theta_2x^n + (\theta_3 + \theta_1)x^{n-1}) - \\
 & \quad - c_{xy}(\theta_2y^n + (\theta_3 + \theta_1)y^{n-1}) - \tilde{Q}_x^n; \\
 g_2 &= 2m\gamma^n / h - c_{yy}(\theta_2y^n + (\theta_3 + \theta_1)y^{n-1}) - \\
 & \quad - c_{yx}(\theta_2x^n + (\theta_3 + \theta_1)x^{n-1}) + \tilde{F}_{y,(k)}^n - \tilde{Q}_y^n; \\
 g_0 &= \varphi \tilde{F}_{y,(k)}^n.
 \end{aligned}$$

Решение задачи минимизации функции $J_1(d, e)$ можно записать в явном виде:

если $(g_1a_{22} - g_2a_{12} - g_0a_{22}) / a > U$, то

$$d = (g_1a_{22} - g_2a_{12} - g_0a_{22}) / a, \quad e = (g_2a_{11} - g_1a_{21} + g_0a_{21}) / a, \tag{15}$$

если $(g_1a_{22} - g_2a_{12} + g_0a_{22}) / a < U$, то

$$d = (g_1a_{22} - g_2a_{12} + g_0a_{22}) / a, \quad e = (g_2a_{11} - g_1a_{21} - g_0a_{21}) / a, \tag{16}$$

иначе

$$d = U, \quad e = (g_2 - a_{21}U) / a_{22}, \tag{17}$$

где $a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Двухслойные разностные схемы. При использовании для интегрирования по времени квазивариаци-

онного неравенства (10) двухслойных схем получим:

$$\begin{aligned} & \left(m \frac{p^{n+1} - p^n}{h} + b_{xx}(\theta_1 p^{n+1} + (1-\theta_1)p^n) + c_{xx}(\theta_1 x^{n+1} + (1-\theta_1)x^n) + \right. \\ & + b_{xy}(\theta_1 q^{n+1} + (1-\theta_1)q^n) + c_{xy}(\theta_1 y^{n+1} + (1-\theta_1)y^n) + \tilde{Q}_x^{n+\theta} \left. \right) (s - p^{n+1}) + \\ & + \left(m \frac{q^{n+1} - q^n}{h} + b_{yy}(\theta_1 q^{n+1} + (1-\theta_1)q^n) + c_{yy}(\theta_1 y^{n+1} + (1-\theta_1)y^n) + \right. \\ & - b_{yx}(\theta_1 p^{n+1} + (1-\theta_1)p^n) + c_{yx}(\theta_1 x^{n+1} + (1-\theta_1)x^n) - F_y^{n+\theta} + \tilde{Q}_y^{n+\theta} \left. \right) (w - q^{n+1}) + \\ & + \varphi F_y^{n+\theta} |s - U| - \varphi F_y^{n+\theta} |p^{n+1} - U| \geq 0, \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{h} = \theta_2 p^{n+1} + (1-\theta_2)p^n, \quad (19)$$

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = \theta_2 q^{n+1} + (1-\theta_2)q^n, \quad (20)$$

где $\{p^n, q^n\} = \{\dot{x}^n, \dot{y}^n\}$ – компоненты скорости в момент времени t^n ;

$$\begin{aligned} F_y^{n+\theta} &= F_y(\theta_1 x^{n+1} + (1-\theta_1)x^n, \theta_1 y^{n+1} + (1-\theta_1)y^n); \\ Q_x^{n+\theta} &= (\theta_1 Q_x^{n+1} + (1-\theta_1)Q_x^n); \quad Q_y^{n+\theta} = (\theta_1 Q_y^{n+1} + (1-\theta_1)Q_y^n). \end{aligned}$$

Соотношения (18) – (20) представляют собой систему квазивариационного неравенства и двух алгебраических уравнений. Начальные условия для системы (18) – (20) будем выбирать в виде

$$x^0 = p^0 = 0, \quad y^0 = q^0 = 0.$$

Представим уравнения (16) – (17) как

$$x^{n+1} = x^n + h(\theta_2 p^{n+1} + (1-\theta_2)p^n); \quad (21)$$

$$y^{n+1} = y^n + h(\theta_2 q^{n+1} + (1-\theta_2)q^n) \quad (22)$$

и подставим выражения (21) – (22) в (18). В результате получим квазивариационное неравенство

$$\begin{aligned} & \left(m \frac{p^{n+1} - p^n}{h} + \theta_1 p^{n+1}(b_{xx} + \theta_2 c_{xx} h) + p^n((1-\theta_1)b_{xx} + \theta_1(1-\theta_2)c_{xx} h) + c_{xx} x^n + \right. \\ & + \theta_1 q^{n+1}(b_{xy} + \theta_2 c_{xy} h) + q^n((1-\theta_1)b_{xy} + \theta_1(1-\theta_2)c_{xy} h) + c_{xy} y^n + \tilde{Q}_x^{n+\theta} \left. \right) (s - p^{n+1}) + \\ & + \left(m \frac{q^{n+1} - q^n}{h} + \theta_1 q^{n+1}(b_{yy} + \theta_2 c_{yy} h) + q^n((1-\theta_1)b_{yy} + \theta_1(1-\theta_2)c_{yy} h) + c_{yy} y^n + \right. \\ & + \theta_1 p^{n+1}(b_{yx} + \theta_2 c_{yx} h) + p^n((1-\theta_1)b_{yx} + \theta_1(1-\theta_2)c_{yx} h) + c_{yx} x^n - \\ & - F_y^{n+\theta} + \tilde{Q}_y^{n+\theta} \left. \right) (w - q^{n+1}) + \varphi F_y^{n+\theta} |s - U| - \varphi F_y^{n+\theta} |p^{n+1} - U| \geq 0, \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$F_y^{n+\theta} = F_y(x^n + \theta_1 \theta_2 p^{n+1} h + \theta_1(1-\theta_2)p^n h, y^n + \theta_1 \theta_2 q^{n+1} h + \theta_1(1-\theta_2)q^n h).$$

Для решения этого квазивариационного неравенства используем итерационный процесс (k – номер итерации):

$$\begin{aligned}
 & \left(m \frac{p_{(k+1)}^{n+1} - p^n}{h} + \theta_1 p_{(k+1)}^{n+1} (b_{xx} + \theta_2 c_{xx} h) + p^n ((1-\theta_1) b_{xx} + \theta_1 (1-\theta_2) c_{xx} h) + c_{xx} x^n + \right. \\
 & + \theta_1 q_{(k+1)}^{n+1} (b_{xy} + \theta_2 c_{xy} h) + q^n ((1-\theta_1) b_{xy} + \theta_1 (1-\theta_2) c_{xy} h) + c_{xy} y^n + \tilde{Q}_x^{n+\theta} \left. \right) (s - p_{(k+1)}^{n+1}) + \\
 & + \left(m \frac{q_{(k+1)}^{n+1} - q^n}{h} + \theta_1 q_{(k+1)}^{n+1} (b_{yy} + \theta_2 c_{yy} h) + q^n ((1-\theta_1) b_{yy} + \theta_1 (1-\theta_2) c_{yy} h) + c_{yy} y^n + \right. \\
 & \quad + \theta_1 p_{(k+1)}^{n+1} (b_{yx} + \theta_2 c_{yx} h) + p^n ((1-\theta_1) b_{yx} + \theta_1 (1-\theta_2) c_{yx} h) + c_{yx} x^n - \\
 & \left. - F_y^{n+\theta} + \tilde{Q}_x^{n+\theta} \right) (w - q_{(k+1)}^{n+1}) + \varphi_{y,(k)}^{F^{n+\theta}} |s - U| - \varphi_{y,(k)}^{F^{n+\theta}} |p_{(k+1)}^{n+1} - U| \geq 0, n = 2, 3, \dots, k = 1, 2, \dots, \quad (24)
 \end{aligned}$$

где

$$F_{y,(k)}^{n+\theta} = F_y (x^n + \theta_1 \theta_2 p_{(k)}^{n+1} h + \theta_1 (1-\theta_2) p^n h, y^n + \theta_1 \theta_2 q_{(k)}^{n+1} h + \theta_1 (1-\theta_2) q^n h).$$

Нетрудно видеть, что если итерационный ряд (21) сходится, то предел последовательности $\{p_{(k)}^{n+1}, q_{(k)}^{n+1}\}$ является решением квазивариационного неравенства (20). Используя результаты работы [2], можно показать, что итерационный ряд (24) сходится при любом выборе начального приближения и ограничении сверху на величину коэффициента трения.

В качестве начального приближения в итерационном ряде (24) целесообразно выбрать величину

$$p_{(0)}^{n+1} = p^n, \quad q_{(0)}^{n+1} = q^n.$$

После определения с помощью итерационного ряда (24) значений $\{p^{n+1}, q^{n+1}\}$ величины $\{x^{n+1}, y^{n+1}\}$ вычисляем по формулам (21) – (22).

Неравенство (24) является вариационным. Используя результаты работы [6], можно показать, что на каждой итерации решение вариационного неравенства (24) сводится к решению задачи минимизации следующей функции двух переменных:

$$J_1(p, q) = \frac{1}{2} a_{11} p^2 + a_{12} p q + \frac{1}{2} a_{22} q^2 - g_1 p - g_2 q + g_0 |p - u|, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{m}{h} + \theta_1 (b_{xx} + \theta_2 c_{xx} h); & a_{12} &= \theta_1 (b_{xy} + \theta_2 c_{xy} h); \\
 a_{22} &= \frac{m}{h} + \theta_1 (b_{yy} + \theta_2 c_{yy} h); & a_{21} &= a_{12} = \theta_1 (b_{yx} + \theta_2 c_{yx} h); \\
 g_1 &= m/h - p^n ((1-\theta_1) b_{xx} + \theta_1 (1-\theta_2) c_{xx} h) - c_{xx} x^n - \\
 & \quad - q^n ((1-\theta_1) b_{xy} + \theta_1 (1-\theta_2) c_{xy} h) - c_{xy} y^n - \tilde{Q}_x^{n+\theta}; \\
 g_2 &= m/h - p^n ((1-\theta_1) b_{yy} + \theta_1 (1-\theta_2) c_{yy} h) - c_{yy} y^n - \\
 & \quad - q^n ((1-\theta_1) b_{yx} + \theta_1 (1-\theta_2) c_{yx} h) - c_{yx} x^n + F_y^{n+\theta} - \tilde{Q}_y^{n+\theta}; \\
 g_0 &= \varphi_{y,(k)}^{F^{n+\theta}}.
 \end{aligned}$$

Решение задачи минимизации функции $J_2(p, q)$ можно получить по формулам (15) – (17).

Выводы. Разработана математическая модель фрикционных колебаний шероховатых тел тормоза, трение между которыми описывается законом Амонтона с учетом конструктивных связей между нормальными и тангенциальными колебаниями, а также получена вариационная формулировка в виде квазивариационного неравенства динамической задачи для колебательной системы двух шероховатых тел. С использованием трехслойных и двухслойных разностных схем разработаны вычислительные алгоритмы интегрирования по времени полученного квазивариационного неравенства. В результате вычислительных экспериментов установлено, что предложенная математическая модель, учитывающая нормальные колебания колодки, вызванные шероховатостью контактирующих поверхностей и наличием кон-

структивной связи между нормальными и тангенциальными колебаниями, описывает возникновение фрикционных колебаний в упругой системе, в которой не вводится искусственная разница между статическим и динамическим коэффициентами трения.

В зависимости от значений параметров динамической системы тормоза возможны три варианта колебаний тормозной колодки: затухающие, установившиеся релаксационные и установившиеся квазигармонические. Зависимость коэффициента трения тормоза, при котором возникают колебания в тормозном механизме, от угла наклона подвески колодки – линейная, от отношения жесткостей двух конструктивных связей в нормальном c_2 и тангенциальном c_1 направлениях – нелинейная. При этом минимальное значение коэффициента трения, при котором возникают установившиеся колебания, соответствует случаю, когда $c_1 = c_2$.

Список литературы

1. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А.С. Кравчук. – М.: МГАПИ, 1997. – 340 с.
3. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения / П. Панагиотопулос. – М.: Мир, 1989. – 492 с.
4. Коптовец А.Н. Взаимодействие нормальных и тангенциальных фрикционных автоколебаний при наличии конструктивных связей / А.Н. Коптовец, А.А. Бобылёв // *Вібрації в техніці та технологіях: Всеукраїнський наук.-техн. журнал.* – В., 2007. – № 3 (48). – С. 97 – 100.
5. Lions J.-L., (1975). "Surface problems: Methods of variational and quasivariational inequalities" // *Lect. Notes in Math. Syst.*, № 461. , pp. 129 – 148.
6. Гловински Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979. – 574 с.

Рекомендовано до друку: д-ром техн. наук, проф. Самусею В.І.