УДК 627.142:536.143

Онищук В.В.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА ДЛЯ ОЦІНКИ ДИНАМІЧНОЇ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ «ПОТІК - РУСЛО»

Ключові слова: *гідродинамічна система «потік-русло», динамічна рівновага системи, руслоформувальна витрата води і транспортувальних наносів, рівняння Нав'є-Стокса, явище меандрування, соліноїдальна траєкторія руху, ядро водотоку.*

Актуальність проблеми. Рівняння Нав'є-Стокса – це система диференційних рівнянь у частинних похідних, що описують рух і теплопередачу в'язкої ньютонівської рідини. Рівняння Нав'є-Стокса [1-3] являються одними з найважливіших у гідродинаміці й застосовуються в математичному моделюванні багатьох природних явищ і технічних задач. Зазвичай система рівнянь складається з рівняння руху рідини або субстанції, рівняння збереження енергії, маси і імпульсу сили та рівняння неперервності рідини, які є неповними для точного розв'язування як плоских, так і просторових задач гідродинаміки. Варто відмітити, що на сьогоднішній день детальне розв'язування цих рівнянь знайдені в обмеженій кількості і лише для деяких технічних задач (пристроїв), апроксимованими числовими методами.

Русловий потік це складна відкрита адаптивно-дисипативна гідродинамічна система «потік-русло» (ГДС$_{п-р}$), яка наділена властивістю самоорганізації, саморегулювання і самозбереження при розвитку процесів руслоформування. З метою розв'язання цих рівнянь для оцінки гідроморфологічного стану ГДС$_{п-р}$ пропонується замкнена система, яка наведена у наступному вигляді:

$$* \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial \mathrm{t}} = -(\upsilon \cdot \nabla)\upsilon + \nu\Delta\upsilon - \frac{1}{\rho'}\nabla p + \left(\varsigma + \frac{\nu}{3}\right)\delta_i \nabla \mathrm{div}\,\upsilon\ ; \qquad \textbf{(1)}$$

$$* \quad \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial \mathrm{t}} = \nu\Delta\vec{\upsilon} - \frac{1}{\rho'}\nabla p + \nabla\vec{\upsilon}'\ ; \qquad \textbf{(2)}$$

$$* \quad \frac{\partial \vec{\upsilon}'}{\partial \mathrm{t}} = -(\upsilon' \cdot \nabla)\upsilon' + \nu\Delta\upsilon' - \frac{1}{\rho'}\nabla p + \varsigma_\Delta \delta_i \nabla \mathrm{div\,h}\ ; \qquad \textbf{(3)}$$

$$* \quad \frac{\partial \vec{\upsilon}'}{\partial \mathrm{t}} = -(\vec{\upsilon}' \cdot \nabla)\vec{\upsilon}' - \frac{1}{\rho'}\nabla p\ ; \qquad \textbf{(4)}$$

$$* \quad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{t}} \pm \frac{\partial \mathrm{q_s}}{\partial \mathrm{t}}\ ; \qquad \textbf{(5)}$$

$$* \quad \frac{\partial \delta_{\mathrm{x}}^{\ 0,5}}{\partial \mathrm{t}} = \Delta\mathrm{h}\frac{\partial \mathrm{h}^2}{\partial \mathrm{t}}\ ; \qquad \textbf{(6)}$$

$$* \frac{\partial \delta_{y}^{1,5}}{\partial t} = 0,5(0,5S_{c.x} / 2\pi B)\frac{\partial h^{2}}{\partial t} \; ; \qquad (7)$$

$$* \frac{\partial \delta_{z}^{2}}{\partial t} = 0,5\Delta H_{n} \frac{\partial h^{2}}{\partial t} \; ; \qquad (8)$$

$$* \frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho' g I_{0} \frac{\partial Q}{\partial t} \; ; \qquad (9)$$

$$* \frac{\partial Q}{\partial t} = (2gI_{0})^{0,5} \lambda_{3}^{-0.5} \frac{\partial B \partial h^{1,5}}{\partial t} \; ; \qquad (10)$$

$$* \frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho' g I_{n} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \; ; \qquad (11)$$

$$* \frac{\partial h^{0,5}}{\partial t} = \Delta H_{n} \; , \qquad (12)$$

де ∇ - оператор Гамільтона; Δ - оператор Лапласа; $\rho'_{сер.зв} = (\sum P_i \rho_i) / 100$ (де P_i – забезпеченість відповідного елемента потоку, %; ρ_i – середня щільність фракцій завислих наносів та густина відповідного об'єму рідини) або за формулою $\rho^1 = \rho g(1 - s) + \rho_s s$ (де s – каламутність водного потоку), – щільність субстрату (вода разом з транспортувальними наносами), Т/м^3; P - сумарний градієнт тиску (градієнти гідростатичного і гідродинамічного тисків сповільненої течії, а також градієнт тиску атмосферного повітря по поверхні водного потоку, тобто вітер), кгс/м^2; ν - коефіцієнт кінематичної в'язкості, м^2/с; ζ - «друга» (об'ємна) в'язкість водного потоку, яка придбана після його стискання стоячою хвилею; кг/м·с; g – прискорення сили земного тяжіння, м/с^2; B і h - відповідно середні величини ширини русла поверху потоку і його глибини, м; Δh – прирощення глибини потоку в результаті дії стоячої хвилі на русловий потік, м; ΔH_n - прирощення відмітки перекату в результаті дії стоячої хвилі на русловий потік, м; $\omega = Bh$ – площа живого перерізу руслового потоку, м^2; δ_i - величина переміщення структурних елементів водного потоку (мезовирів) по координатах *x, y і z, м*; $\delta_{\Delta.i}$ - величина переміщення структурних елементів водного потоку у придонній області (мікровирів) по координатах *x, y і z, м*; I_0 - поздовжній гідравлічний похил; I_n - поперечний гідравлічний похил; $\lambda_з$ - коефіцієнт загального гідравлічного тертя; Q – витрата води, м^3/с; $q_{s.i}$ –компонентна витрати транспортувальних наносів, кг/м^3; υ – середня швидкість руслового потоку, м/с.

В аналіз розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса до теперішнього часу входило коректне рішення задачі Коші, оскільки можливість стійкого рішення у значній мірі залежить від рівня турбулентності потоку при великих числах Рейнольдса. Наведені вище рівняння складають замкнену систему для природних умов руслового потоку, які пропонується розв'язувати для режиму початкового спаду руслоформувального паводку або весняної повені: рівняння (1) описує рух рідини в координатах *x, y і z*; рівняння (2) стосується стабілізації режиму турбулентності руслового потоку ("заморожена" турбулентність) в координатах *x, y і z*; рівняння (3) оцінює рівень турбулентності рідини у придонній області потоку в координатах *x, y і z*; рівняння (4) стосується стабілізації режиму тиску в придонній області руслового потоку ("заморожений" конвенційний рух субстрату) в координатах *x, y і z*; рівняння (5) - це неперервність руслових процесів (баланс субстрату, який характерний для стану динамічної рівноваги системи); рівняння (6) описує переміщення структурних елементів потоку в умовах його стискання по осі *x*; рівняння (7) характеризує переміщення структурних елементів потоку в умовах його стискання по осі y; рівняння (8) оцінює переміщення структурних елементів потоку в умовах його стискання по осі z; рівняння 9) характеризує руслові деформації у поздовжньому розрізі (оцінює поздовжню стійкість водотоку); рівняння (10) відповідає пропускній здатності русла; рівняння (11) визначає поперечну стійкість русла на ділянці річки; рівняння (12) характеризує поздовжню стійкість русла по коритах перекатів.

У даному випадку при розв'язанні наведеної вище системи рівнянь слід відійти від рекомендацій Ландау Л.Д. і Ліфшиця Е.М. стосовно можливого спрощення рівнянь в умовах дії сили стискання рідини [4, с.73], оскільки першопричина меандрування річки пов'язана з дією стоячої хвилі відбувається спочатку у центральному струмені потоку, а лише потім змінами самого русла під впливом градієнтів тисків складових внутрішніх і зовнішніх масових сил [5].

Аналіз попередніх досліджень. На сьогоднішній день не існує аналітичного розв'язування замкненої системи рівнянь Нав'є–Стокса для коректних задач гідроаеромеханіки, які могли б бути використані в багатьох суміжних областях знань про навколишній матеріальний світ. Ці рівняння уже відомі майже 200 років, які пройшли широке випробування при вирішенні багатьох задач з ламінарним режимом течії, але находяться за зоною досяжності для турбулентного потоку ньютонівської рідини при високих числах Рейнольдса ⌈1-3]. Головна проблема розв'язування цих рівнянь навіть не так в кількості до них додаткових, а в самому підході щодо стабілізації рівня турбулентності у межах прояву властивості самоорганізації гідродинамічної системи «потік-русло» ($ГДС_{п-р}$), а потім шляхом їх сумісного розгляду виокремлення агентів збурення, цебто тиску в різних його величинах і наслідках прояву у вигляді змін форм суцільного середовища. Наведені вище рівняння (2 і 4) є універсальними для оцінки морфологічного стану будь-яких відкритих і закритих динамічних систем. Оскільки вони за своєю конструкцією характеризують процеси самозбереження з метою досягти мінімуму дисипації енергії. При проходженні русло формувальної витрати води і транспортувальних наносів цей стан відповідає динамічній рівновазі системи, а потік в цих умовах приймає соліноїдальну (гвинтову) траєкторію руху, який наближений до ламінарного режиму в автомодельній області гідравлічного опору по відношенню до діючих на нього зовнішніх і внутрішніх масових сил ⌈5-7].

Методика досліджень. Динамічна рівновага $ГДС_{п-р}$ приурочена до проходження руслоформувальної витрати води і транспортувальних наносів. При відсутності незворотних руслових деформацій проходження таких витрат, як правило, спостерігається у межах руслових бровок. При розгляді рівнянь руху Нав'є–Стокса належить розвести дію силових факторів на їх індивідуальний рівень функціонування зі збереженням динамічної рівноваги системи і їх послідовну оцінку за умовами виконання конкретної задачі. З методичної точки зору це можна досягти шляхом стабілізації режиму турбулентності субстрату за допомогою додаткового рівняння і шляхом їх сумісного розв'язку відповідне виокремлення агентів збурення, цебто тиску і його наслідку діяльності у вигляді змін форм суцільного середовища. Цей підхід, який можна назвати "замороженою" турбулентністю належить використовувати як для руслового потоку, так і для його придонної області. Бажаний результат досягається шляхом використання універсальних рівнянь (2 і 4). У цьому контексті також слід зауважити, що у даній постановці задач розглядається безперервно-дискретний характер розвитку руслових деформацій (руслових процесів), що пояснюється використанням рівняння (5).

Виклад основного матеріалу. У розкритому форматі, з урахуванням формалізованої складової поздовжнього стискання руслового потоку, рівняння (1) Нав'є - Стокса приймає наступний вигляд [1-3]:

$$\rho'\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial t}\right)=-\rho'\left(\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z}\right)-\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x}-\frac{2}{3}\delta_x\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}\right)\right]+ \\ +\rho'\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\zeta+\frac{\mu}{3}\right)\delta_x\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}\right]; \tag{13}$$

$$\rho'\left(\frac{\partial\upsilon_y}{\partial t}\right)=-\rho'\left(\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_y}{\partial z}\right)-\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial y}-\frac{2}{3}\delta_y\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}\right)\right]+ \\ +\rho'\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\zeta+\frac{\mu}{3}\right)\delta_y\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}\right]; \tag{14}$$

$$\rho'\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial t}\right)=-\rho'\left(\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_z}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_z}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z}\right)-\frac{\partial p_z}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}+\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z}-\frac{2}{3}\delta_z\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)\right]+ \\ +\rho'\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\zeta+\frac{\mu}{3}\right)\delta_z\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right], \tag{15}$$

де μ – коефіцієнт динамічної в'язкості, кг/м·сек; ζ - "друга" (об'ємна) в'язкість потоку, яка придбана після його стискання; кг/м·сек. Цей параметр характеризується тим, що транспортувальні наноси центрального струмінню у складі мезовирів переміщуються до віртуально-реального опуклого берега на фоні зародження й подальшого розвитку поперечної циркуляції. Під впливом початкової дії стоячої хвилі переміщення структурних елементів потоку переходить від плоского до соліноїдального (формування перекатів на фоні гвинтового руху субстрату (вода і транспортувальні наноси) вздовж річки). Цебто спостерігається відповідний прояв явища мандрування річки [5]. Таким чином, маємо три рівняння руху рідини для умов просторового транспортування наносів і відповідного розвитку явища меандрування річки.

У розкритій формі рівняння (2) виглядить наступним чином:

$$\rho'\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x}-\frac{2}{3}\delta_x\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial p_x}{\partial x}+\rho'\frac{\partial U'_x}{\partial x} \tag{16}$$

$$\rho'\left(\frac{\partial\upsilon_y}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial y}-\frac{2}{3}\delta_y\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}\right)\right]-\frac{\partial p_y}{\partial y}+\rho'\frac{\partial U'_y}{\partial y}; \tag{17}$$

$$\rho'\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}+\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z}-\frac{2}{3}\delta_z\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\right)\right]-\frac{\partial p_z}{\partial z}+\rho'\frac{\partial U'_z}{\partial z}. \tag{18}$$

Маємо три рівняння стабілізації режиму турбулентності руслового потоку.

Дальше виконуємо сумісне розв'язування отриманих вище рівнянь шляхом послідовних підстановок рівнянь (16-18) у рівняння (13-15), що дає можливість отримати розрахункові рівняння

$$\frac{\partial U'_x}{\partial x}+\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_з\delta_x\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}\right)=0; \quad \textbf{(19)}$$

$$\frac{\partial U'_y}{\partial y}+\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_з\delta_y\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}\right)=0; \quad \textbf{(20)}$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial z}+\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\zeta_з\delta_z\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right)=0, \quad \textbf{(21)}$$

де $\zeta_з = \zeta + 0{,}333\mu$ – загальна величина в'язкості субстрату.

Таким чином, отримуємо наступні три рівняння, які відповідають стабільному станові гідродинамічної системи «потік-русло», тобто зберігаються умови абсолютної автомодельності опору русла у квадратичній області при дії зовнішніх і внутрішніх масових сил без впливу критеріїв Рейнольдса, Фруда, Томсона і Вебера у режимі досягнутого рівня турбулентності потоку: При вирішені поставлених задач досягнутий рівень турбулентності руслового потоку визначається проходженням руслоформувальних витрат води і транспортувальних наносів, що відповідає динамічній рівновазі ГДС$_{п-р}$.

Аналітичне розв'язування системи рівнянь для оцінки поздовжньої стійкості ділянки річки. Для вирішення поставленої задачі відібрано із загальної кількості рівнянь наступних п'ять:

$$\frac{\partial U'_x}{\partial x}+\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_з\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}\delta_x\right)=0; \quad \textbf{(22)}$$

$$\frac{\partial U'_y}{\partial y}+\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_з\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}\delta_y\right)=0; \quad \textbf{(23)}$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial z}+\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\zeta_з\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\delta_z\right)=0; \quad \textbf{(24)}$$

$$*\ \frac{\partial \omega}{\partial t}=\rho' g I_0\frac{\partial Q}{\partial t}; \quad \textbf{(25)}$$

$$*.\ \frac{\partial Q}{\partial t}=(2gI_0)^{0,5}\lambda_3^{-0.5}\frac{\partial B\partial h^{1,5}}{\partial t}. \quad \textbf{(26)}$$

Спочатку підставляємо рівняння (25) у (22), яке у диференційній формі має вигляд

$$\left[\frac{\partial U'_x}{\partial x}+\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_з\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}\delta_x\right)\right]\frac{dV}{dx}+\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}-\rho' g I_0\frac{\partial Q}{\partial t}\right)\frac{dQ}{dx}=0,$$

В інтегрувальній формі дане рівняння виглядить наступним чином.

$$\int_0^{V_{д.р}}\left[\frac{\partial U'_x}{\partial x}+\upsilon_x\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_з\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}\delta_x\right)\right]\frac{dV}{dx}+\int_0^{Q_{д.р}}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}-\rho' g I_0\frac{\partial Q}{\partial t}\right)\frac{dQ}{dx}=0.$$

Після інтегрування, при меженних/крайових умовах від 0 до $V_{\partial.p}$ і від 0 до $Q_{\partial.p}$ з даного рівняння отримуємо наступний вираз:

$$-U'_{x.\partial.p} - V^2{}_{x.\partial.p} + 0{,}333\zeta_з\delta_x V^3{}_{x.\partial.p} + \rho' g I_0 Q_{\partial.p} = 0 .$$

Аналогічним чином виконуємо розв'язування рівнянь по координатах y і z, з яких маємо вирази

$$-U'_{y.\partial.p} - V^2{}_{y.\partial.p} + 0{,}333\zeta_з\delta_y V^3{}_{y.\partial.p} - \omega_{\partial.p} + \rho' g I_0 Q_{\partial.p} = 0 ;$$

$$-U'_{z.\partial.p} - V^2{}_{z.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_z V^3{}_{z.\partial.p} = 0 .$$

З цих виразів отримуємо формули для визначення середнього гідравлічного поздовжнього похилу і прирощення площі живого перерізу потоку при стані динамічної рівноваги системи

$$I_{0.\partial.p} = \frac{U'_{x.\partial.p} + V^2{}_{x.\partial.p} - 0{,}333\zeta_з\delta_x V^3{}_{x.\partial.p}}{\rho' g Q_{\partial.p}} ; \qquad \textbf{(27)}$$

$$\Delta\omega_{\partial.p} = \rho' g I_0 Q_{\partial.p} - U'_{y.\partial.p} - V^2{}_{y.\partial.p} + 0{,}333\zeta_з\delta_y V^3{}_{y.\partial.p} ; \qquad \textbf{(28)}$$

Дальше рівняння (26) підставляємо у рівняння (22), звідки отримуємо рівняння у диференційній формі наступного вигляду:

$$. \left[\frac{\partial U'_x}{\partial x} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}\delta_x\right)\right]\frac{dV}{dx} + \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{dQ}{dx} - \frac{(2gI_0)^{0,5}}{\lambda_з^{\,0,5}}\frac{\partial B \partial h^{1,5}}{\partial t}\frac{dQ}{dx} = 0 .$$

Після інтегрування, при меженних умовах від 0 до $V_{\partial.p}$ і від 0 до $Q_{\partial.p}$ отримуємо вираз

$$-U'_{x.\partial.p} - V^2{}_{x.\partial.p} + 0{,}333\zeta_з\delta_x V^3{}_{x.\partial.p} - Q_{\partial.p} = 0 .$$

Аналогічним чином виконуємо розв'язування рівнянь по координатах y і z, з яких маємо вирази

$$-U'_{y.\partial.p} - V^2{}_{y.\partial.p} + 0{,}333\zeta_з\delta_y V^3{}_{y.\partial,p} - Q_{\partial.p} + 1{,}77 I_0^{\,0,5}\lambda_з^{-0,5} Bh_{\partial.p}^{\;\;2,5} = 0 ;$$

$$-U'_{z.\partial.p} - V^2{}_{z.\partial.p} + 0{,}333\zeta_з\delta_z V^3{}_{z.\partial.p} + 1{,}77 I_0^{\,0,5}\lambda_з^{-0,5} h^{2,5}{}_{\partial.p} = 0 .$$

З другого виразу отримуємо формулу для визначення прирощення витрати води на тлі її припливу з ґрунтових вод або відтоку з частини периметру русла в підземний фільтраційний стік та з третього виразу прирощення глибини потоку та значення коефіцієнта гідравлічного тертя

$$\Delta Q_{\partial.p} = 0{,}333\zeta_з\delta_y V^3{}_{y.\partial,p} - V^2{}_{y.\partial.p} - U'_{y.\partial.p} + 1{,}77 I_0^{\,0,5}\lambda_з^{-0,5} Bh^{2,5}{}_{\partial.p} . \qquad \textbf{(29)}$$

$$\Delta h_{\partial.p} = \left(\frac{U'_{z.\partial.p} + V^2{}_{z.\partial.p} - 0{,}333\zeta_з\delta_z V^3{}_{z.\partial.p}}{1{,}77 I_0^{\,0,5}\lambda_з^{-0,5}}\right)^{0,4} . \qquad \textbf{(30)}$$

$$\frac{1}{\lambda_з^{\,0,5}} = \frac{U'_{z.\partial.p} + V^2{}_{z.\partial.p} - 0{,}333\zeta_з\delta_z V^3{}_{z.\partial.p}}{1{,}77 I_0^{\,0,5} h^{2,5}{}_{\partial.p}} . \qquad \textbf{(31)}$$

Аналітичне розв'язування системи рівнянь для оцінки інтенсивності розвитку явища меандрування. Явище меандрування, як відомо, є найважливішою властивістю відкритих самоорганізуючих систем. Це явище характеризує гідроморфологічний стан русла на самому високому структурному рівні самоорганізації гідродинамічної системи «потік-русло» від витоку до гирла річки.

Для вирішення цієї задачі підлягає для розв'язування наступна система рівнянь:

$$\frac{\partial U'_x}{\partial x} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}\delta_x\right) = 0\,; \qquad \textbf{(32)}$$

$$\frac{\partial U'_y}{\partial y} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}\delta_y\right) = 0\,; \qquad \textbf{(33)}$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial z} \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\delta_z\right) = 0\,; \qquad \textbf{(34)}$$

$$* \ \frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho' g I_0 \frac{\partial Q}{\partial t}\ ; \qquad \textbf{(35)}$$

$$* \ \frac{\partial Q}{\partial t} = (2gI_0)^{0,5}\lambda_3^{-0.5}\frac{\partial B \partial h^{1,5}}{\partial t}\ ; \qquad \textbf{(36)}$$

$$* \ \frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho' g I_n \frac{\partial \upsilon}{\partial t}\ ; \qquad \textbf{(37)}$$

На початку підставляються рівняння (36) у (35), що дає можливість отримати рівняння наступного вигляду:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - 1{,}41\rho'(gI_0)^{1,5}\lambda_3^{-0.5}\frac{\partial B \partial h^{1,5}}{\partial t} = 0\,.$$

Дальше отримане рівняння додаємо до рівнянь (32-34).

$$\frac{\partial U'_x}{\partial x} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}\delta_x\right) + \frac{\partial \omega}{\partial t} - 1{,}41\rho'(gI_0)^{1,5}\lambda_3^{-0.5}\frac{\partial B \partial h^{1,5}}{\partial t} = 0\,;$$
$$\frac{\partial U'_y}{\partial y} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}\delta_y\right) + \frac{\partial \omega}{\partial t} - 1{,}41\rho'(gI_0)^{1,5}\lambda_3^{-0.5}\frac{\partial B \partial h^{1,5}}{\partial t} = 0\,;$$
$$\frac{\partial U'_z}{\partial z} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\delta_z\right) + \frac{\partial \omega}{\partial t} - 1{,}41\rho'(gI_0)^{1,5}\lambda_3^{-0.5}\frac{\partial B \partial h^{1,5}}{\partial t} = 0\,.$$

Після диференціювання і інтегрування даних рівнянь, при меженних умовах від 0 до $V_{\partial.p}$, $0/\omega_{\partial.p}$, $0/B_{\partial.p}$, $0/h_{\partial.p}$, отримуємо вирази

$$-U'_{x.\partial.p} - V^2{}_{x.\partial.p} + 0{,}333\zeta_з\delta_x V^3{}_{x.\partial.p} + 0{,}56\rho'(gI_0)^{1,5}\lambda_3^{-0.5}Bh_{\partial.p}{}^{2,5} = 0\,;$$
$$-U'_{y.\partial.p} - V^2{}_{y/\partial.p} + 0{,}333\zeta_з\delta_y V^3{}_{y.\partial.p} - \omega_{\partial.p} + 0{,}56\rho'(gI_0)^{1,5}\lambda_3^{-0.5}Bh_{\partial.p}{}^{2,5} = 0\,;$$
$$-U'_{z.\partial.p} - V^2{}_{z.\partial.p} + 0{,}333\zeta_з\delta_z V^3{}_{z.\partial.p} + 0{,}56\rho'(gI_0)^{1,5}\lambda_3^{-0.5}h_{\partial.p}{}^{2,5} = 0\,.$$

З другого виразу отримуємо формулу для визначення прирощення ширини потоку $B_{\partial.p}$ посередині звивини при стані динамічної рівноваги системи

$$\Delta B_{\partial.p} = \frac{\mathrm{U}'_{\mathrm{y}.\partial.p} + \mathrm{V}^2{}_{\mathrm{y}/\partial.p} - 0{,}333\zeta_з \delta_{\mathrm{y}} \mathrm{V}^3{}_{\mathrm{y}.\partial.p} + \Delta\omega_{\partial.p}}{0{,}56\rho'(\mathrm{g}I_0)^{1{,}5}\lambda_3^{-0.5}\mathrm{h}_{\partial.p}{}^{2{,}5}} . \qquad \textbf{(38)}$$

Наступним етапом вирішення цієї задачі є підстановка рівняння (36) у (31-33), які в інтегральній формі мають вигляд

$$\int_0^{\mathrm{V}_{\partial.p}} \left[\frac{\partial \mathrm{U}'_{\mathrm{x}}}{\partial x} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}}\delta_{\mathrm{x}}\right)\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} + \int_0^{\upsilon}\left[\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{t}} - \rho'\mathrm{g}I_n \frac{\partial\upsilon}{\partial \mathrm{t}}\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}x} = 0;$$

$$\int_0^{\mathrm{V}_{\partial.p}} \left[\frac{\partial \mathrm{U}'_{\mathrm{y}}}{\partial \mathrm{y}} + \upsilon_{\mathrm{y}} \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{y}}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{y}}}{\partial \mathrm{y}}\delta_{\mathrm{y}}\right)\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dy}} + \int_0^{\upsilon}\left[\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{t}} - \rho'\mathrm{g}I_n \frac{\partial\upsilon}{\partial \mathrm{t}}\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dy}} = 0;$$

$$\int_0^{\mathrm{V}_{\partial.p}} \left[\frac{\partial \mathrm{U}'_{\mathrm{z}}}{\partial \mathrm{z}} + \upsilon_{\mathrm{z}} \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{z}}}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{z}}}{\partial \mathrm{z}}\delta_{\mathrm{z}}\right)\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dz}} + \int_0^{\upsilon}\left[\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{t}} - \rho'\mathrm{g}I_n \frac{\partial\upsilon}{\partial \mathrm{t}}\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dz}} = 0.$$

В результаті інтегрування даних рівнянь у межах від 0 до $\mathrm{V}_{\partial.p}$, отримуємо вирази

$$-\mathrm{U}'_{x.\partial.p} - \mathrm{V}^2{}_{\mathrm{x}.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_x \mathrm{V}^3{}_{x.\partial.p} + +\rho'\mathrm{gI}_n\mathrm{V}_{.\partial.p} = 0;$$

$$-\mathrm{U}'_{\mathrm{y}.\partial.p} - \mathrm{V}^2{}_{\mathrm{y}.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_{\mathrm{y}} \mathrm{V}^3{}_{\mathrm{y}.\partial.p} - \omega_{\partial.p} + \rho'\mathrm{gI}_n\mathrm{V}_{.\partial.p} = 0;$$

$$-\mathrm{U}'_{\mathrm{z}.\partial.p} - \mathrm{V}^2{}_{\mathrm{z}.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_{\mathrm{z}} \mathrm{V}^3{}_{\mathrm{z}.\partial.p} = 0.$$

З другого виразу визначаємо поперечний похил потоку посередині звивини

$$\mathrm{I}_{n.\partial.p} = \frac{\mathrm{U}'_{\mathrm{y}.\partial.p} + \mathrm{V}^2{}_{\mathrm{y}.\partial.p} - 0{,}333\varsigma_з\delta_{\mathrm{y}}\mathrm{V}^3{}_{\mathrm{y}.\partial.p} + \Delta\omega_{\partial.p}}{\rho'\mathrm{gV}_{.\partial.p}} . \qquad \textbf{(39)}$$

Для визначення компонент швидкості потоку при динамічній рівновазі ГДС$_{\text{п-р}}$ скористаємось рівняннями (32-34). Інтегральні рівняння по координатах *х, у* і z мають наступний вигляд:

$$\int_0^{\mathrm{V}_{\partial.p}} \left[\frac{\partial \mathrm{U}'_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}} + \upsilon_{\mathrm{x}} \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}}\delta_{\mathrm{x}}\right)\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} = 0;$$

$$\int_0^{\mathrm{V}} \left[\frac{\partial \mathrm{U}'_{\mathrm{y}}}{\partial \mathrm{y}} + \upsilon_{\mathrm{y}} \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{y}}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{y}}}{\partial \mathrm{y}}\delta_{\mathrm{y}}\right)\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dy}} = 0;$$

$$\int_0^{\mathrm{V}_{\text{д.р}}} \left[\frac{\partial \mathrm{U}'_{\mathrm{z}}}{\partial \mathrm{z}} + \upsilon_{\mathrm{z}} \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{z}}}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{z}}}{\partial \mathrm{z}}\delta_{\mathrm{z}}\right)\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} = 0.$$

Після інтегрування першого рівняння, при меженних умовах від 0 до $\mathrm{V}_{\partial.p}$ отримуємо

$$-\mathrm{U}'_{x.\partial.p} - \mathrm{V}^2{}_{x.\partial.p} + 0{,}333\zeta_з\delta_x \mathrm{V}^3{}_{x.\partial.p} = 0.$$

В результаті спрощення даного виразу маємо

$$\mathrm{V}^2{}_{\partial.p.x}(0{,}333\zeta_з\delta_x \mathrm{V}_{x.\partial.p} - 1) - \mathrm{U}'_{x.\partial.p} = 0,$$

з якого можна визначити компоненту швидкості потоку по координаті *x*

$$\mathrm{V}_{x.\partial.p} = \frac{1}{0{,}333\zeta_з\delta_x}. \quad \textbf{(40)}$$

Для двох інших компонент швидкості отримуємо аналогічні формули

$$\mathrm{V}_{\mathrm{y}.\partial.p} = \frac{1}{0{,}333\zeta_з\delta_\mathrm{y}}; \quad \textbf{(41)}$$

$$\mathrm{V}_{z.\partial.p} = \frac{1}{0{,}333\zeta_з\delta_\mathrm{z}}. \quad \textbf{(42)}$$

Таким чином, середня швидкість переміщення субстанції визначається за формулою

$$\mathrm{V}_{\partial.p} = \left[\left(\frac{1}{0{,}333\varsigma_з\delta_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{0{,}333\varsigma_з\delta_\mathrm{y}}\right)^2 + \left(\frac{1}{0{,}333\varsigma_з\delta_x}\right)^2\right]^{0{,}5}. \quad \textbf{(43)}$$

Розв'язування системи рівнянь (32-37) для ряду створів моніторингової мережі або для окремих звивин дасть змогу охарактеризувати інтенсивність розвитку явища мандрування та оцінити загальну стійкість русла. Отримані результати можна також використати для оцінки гідроморфологічного стану русло-заплавного комплексу, що дасть змогу розробити необхідні управлінські рішення для збереження та покращення стійкості русла з дотриманням положень Водної Рамкової Директиви ЄС (ВРД ЄС) [8].

Аналітичне розв'язування системи рівнянь для оцінки характеристик розвитку руслових деформацій. Руслові деформації є по сутті проявом руслових процесів (самовимощення дна русла, турбулізація водних мас, мандрування річки, кавітація і суфозія активного шару ґрунтової поверхні у придонній області руслового потоку), формування морфологічних і гідравлічних структур, формування електромагнітних полів на контактах елементів системи з різними енергетичними потенціалами (наявності градієнта континуального тиску)). Загальні деформації відбуваються як в горизонтальній, так і у вертикальній площинах. Горизонтальна площина, яка домірна рівню bankfull sage і середній відмітці між рівноцінними бровками русла на досліджуваній ділянці річки є найбільш характерною щодо розвитку планових деформацій. Вертикальна площина, яка співпадає з динамічною віссю центрального струмінню є найбільш характерною щодо розвитку деформацій русла вздовж водотоку (формування перевалів (перекатів), формування різномасштабних стрічкових гряд, боковиків і осередків, розпад водотоку на рукави). Оскільки від поведінки центрального струмінню залежить інтенсивність прояву явища мандрування і, відповідно, амплітуда горизонтальних деформацій у межах русло-заплавного комплексу [5]. Центроструменеве руслоформування визначає у повній мірі рельєф русла. Таким чином, на фоні деформації центрального струмінню відбувається меандрування річки як в горизонтальній, так і у вертикальній площинах. Як правило, починаючи з верхів'я гірських річок у вертикальній площині формується поріжно-водоспадне русло, а нижче за течією серії осередків і перекатів на фоні прояву явища мандрування або явища блукання (дейгиш) русла. Отже є досить актуальним розробити метод аналітичного рішення, відмічених вище проблемних питань, на основі розв'язування системи рівнянь Нав‘є - Стокса.

Для вирішення поставленої задачі відібрано наступних шість рівнянь:

$$* \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t} \pm \frac{\partial q_s}{\partial t} \;; \qquad \textbf{(45)}$$

$$* \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho' g I_0 \frac{\partial Q}{\partial t} \;; \qquad \textbf{(46)}$$

$$* \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho' g I_n \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \;; \qquad \textbf{(47)}$$

$$\frac{\partial U'_x}{\partial x} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} \delta_x\right) = 0 \;; \qquad \textbf{(48)}$$

$$\frac{\partial U'_y}{\partial y} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} \delta_y\right) = 0 \;; \qquad \textbf{(49)}$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial z} \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} \delta_z\right) = 0 \,. \qquad \textbf{(50)}$$

Рішення даних рівнянь починається з підстановки рівняння (45) у (48-50) в результаті чого, після диференціювання, отримуємо рівняння у наступній інтегральній формі:

$$\int_0^{V_{з.п}} \left[\frac{\partial U'_x}{\partial x} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} \delta_x\right)\right] \frac{dV}{dx} + \int_0^{Q_{\partial.p}} \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{dQ}{dx} \mp \int_0^{q_s} \frac{\partial q_s}{\partial t}\frac{dq_s}{dx} = 0 \;;$$

$$\int_0^{V_{з.п}} \left[\frac{\partial U'_y}{\partial y} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} \delta_y\right)\right] \frac{dV}{dy} + \int_0^{Q_{\partial.p}} \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{dQ}{dy} - \int_0^{h_{\partial.p}} \frac{\partial h}{\partial t}\frac{dh}{dy} - \int_0^{B_{\partial.p}} \frac{\partial B}{\partial t}\frac{dB}{dy} \mp \int_0^{q_s} \frac{\partial q_s}{\partial t}\frac{dq_s}{dy} = 0 \;;$$

$$\int_0^{V_{з.п}} \left[\frac{\partial U'_z}{\partial z} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} \delta_z\right)\right] \frac{dV}{dy} - \int_0^{h_{\partial.p}} \frac{\partial h}{\partial t}\frac{dh}{dz} \mp \int_0^{q_s} \frac{\partial q_s}{\partial t}\frac{dq_s}{dz} = 0 \,.$$

Після інтегрування даних рівнянь, при меженних умовах від 0 до $V_{\partial.p}$, від 0 до $Q_{\partial.p}$, від 0 до $h_{\partial.p}$, від 0 до $B_{\partial.p}$ і від 0 до $q_{\,s.\partial.p}$, отримуємо вирази

$$-U'_{x.\partial.p} - V^2{}_{x.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_x V^3{}_{x.\partial.p} \pm q_{x.p\phi} - Q_{\partial.p} = 0 \;;$$

$$-U'_{y.\partial.p} - V^2{}_{y.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_y V^3{}_{y.\partial.p} - Q_{\partial.p} + h_{\partial.p} + B_{\partial.p} \pm q_{y.p\phi} = 0 \;;$$

$$-U'_{z.\partial.p} - V^2{}_{z.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_z V^3{}_{z.\partial.p} + h_{\partial.p} \pm q_{z.p\phi} = 0 \,,$$

з яких можна визначити компоненти витрат наносів за наступними формулами:

$$\pm q_{x.p\phi} = U'_{x.\partial.p} + V^2{}_{x.\partial.p} - 0{,}333\varsigma_з\delta_x V^3{}_{x.\partial.p} + Q_{\partial.p} \;; \qquad \textbf{(51)}$$

$$\pm q_{y.p\phi} = U'_{y.\partial.p} + V^2{}_{y.\partial.p} - 0{,}333\varsigma_з\delta_y V^3{}_{y.\partial.p} + Q_{\partial.p} - h_{\partial.p} - B_{\partial.p} \;; \qquad \textbf{(52)}$$

$$\pm q_{z.p\phi} = U'_{z.\partial.p} + V^2{}_{z.\partial.p} - 0{,}333\varsigma_з\delta_z V^3{}_{z.\partial.p} - h_{\partial.p} \,. \qquad \textbf{(53)}$$

Загальна витрата транспортувальних наносів визначається арифметичною сумою компонент

$$\mathrm{G}_{\partial.p} = \mathrm{q}_{x.\partial.p} + \mathrm{q}_{\mathrm{y}.\partial.p} + \mathrm{q}_{\mathrm{z}.\partial.p}\,. \qquad \textbf{(54)}$$

Витрата наносів циркуляційного переносу $\mathrm{q}_{\mathrm{y}.p\phi}$ характеризує інтенсивність розвитку явища мандрування річки і складається, в залежності від криволінійності ділянки у конкретному створі, з відповідної долі дрібних донних рухомих та завислих наносів. Для того, щоб оцінити місцеві горизонтальні деформації в конкретному створі і, відповідно, долю витрати завислих наносів при поперечному переносі, необхідно розв'язувати додаткове інтегральне рівняння по координаті y, яке враховує закономірність розподілу місцевих осереднених швидкостей потоку по ряду вертикалей від одного берега до другого. Таким чином, витрати донних рухомих і завислих наносів розділяться. Транзитні наноси, які проходять через перекітні зони, слід оцінювати по величині компоненти q_{x}.

Дальше підставляємо рівняння (46) у (48), яке в інтегральній формі має вигляд

$$\int_0^{\mathrm{V}_{\partial.p}} \left[\frac{\partial \mathrm{U}'_{\mathrm{x}}}{\partial x} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{x}}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\varsigma_з \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}} \delta_{\mathrm{x}}\right)\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} + \int_0^{\mathrm{Q}_{\partial.p}} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{t}} - \rho' \mathrm{gI}_0 \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{t}}\right)\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

Після інтегрування, при меженних/крайових умовах від 0 до $\mathrm{V}_{\partial.p}$ і від 0 до $\mathrm{Q}_{\partial.p}$, для даного рівняння отримуємо наступний вираз:

$$-\mathrm{U}'_{x.\partial.p} - \mathrm{V}^2{}_{x.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_x\mathrm{V}^3{}_{x.\partial.p} + \rho'\mathrm{gI}_0\mathrm{Q}_{\partial.p} = 0\,.$$

Аналогічним чином виконуємо розв'язування рівнянь по координатах y і z, з яких маємо вирази

$$-\mathrm{U}'_{\mathrm{y}.\partial.p} - \mathrm{V}^2{}_{\mathrm{y}.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_{\mathrm{y}}\mathrm{V}^3{}_{\mathrm{y}.\partial.p} - \omega_{\partial.p} + \rho'\mathrm{gI}_0\mathrm{Q}_{\partial.p} = 0\,;$$

$$-\mathrm{U}'_{\mathrm{z}.\partial.p} - \mathrm{V}^2{}_{\mathrm{z}.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_{\mathrm{z}}\mathrm{V}^3{}_{\mathrm{z}.\partial.p} = 0\,.$$

З цих виразів отримуємо формули для визначення середнього гідравлічного похилу і прирощення площі живого перерізу потоку при стані динамічної рівноваги системи

$$\mathrm{I}_{0.\partial.p} = \frac{\mathrm{U}'_{x.\partial.p} + \mathrm{V}^2{}_{x.\partial.p} - 0{,}333\varsigma_з\delta_x\mathrm{V}^3{}_{x.\partial.p}}{\rho'\mathrm{gQ}_{\partial.p}}\,; \qquad \textbf{(55)}$$

$$\Delta\omega_{\partial.p} = \rho'\mathrm{gI}_0\mathrm{Q}_{\partial.p} - \mathrm{U}'_{\mathrm{y}.\partial.p} - \mathrm{V}^2{}_{\mathrm{y}.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_{\mathrm{y}}\mathrm{V}^3{}_{\mathrm{y}.\partial.p}\,; \qquad \textbf{(56)}$$

Наступним етапом вирішення цієї задачі є підстановка рівняння (47) у (48-50), які в інтегральній формі мають вигляд

$$\int_0^{\mathrm{V}_{\partial.p}} \left[\frac{\partial \mathrm{U}'_{\mathrm{x}}}{\partial x} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{x}} \delta_{\mathrm{x}}\right)\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} + \int_0^{\upsilon}\left[\frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{t}} - \rho'\mathrm{g}I_n \frac{\partial \upsilon}{\partial \mathrm{t}}\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} = 0\,;$$

$$\int_0^{\mathrm{V}_{\partial.p}} \left[\frac{\partial \mathrm{U}'_{\mathrm{y}}}{\partial \mathrm{y}} + \upsilon_{\mathrm{y}} \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{y}}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{y}}}{\partial \mathrm{y}} \delta_{\mathrm{y}}\right)\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dy}} + \int_0^{\upsilon}\left[\frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{t}} - \rho'\mathrm{g}I_n \frac{\partial \upsilon}{\partial \mathrm{t}}\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} = 0\,;$$

$$\int_0^{\mathrm{V}_{\partial.p}} \left[\frac{\partial \mathrm{U}'_{\mathrm{z}}}{\partial \mathrm{z}} + \upsilon_{\mathrm{z}} \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{z}}}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\zeta_з \frac{\partial \upsilon_{\mathrm{z}}}{\partial \mathrm{z}} \delta_{\mathrm{z}}\right)\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dz}} + \int_0^{\upsilon}\left[\frac{\partial \omega}{\partial \mathrm{t}} - \rho'\mathrm{g}I_n \frac{\partial \upsilon}{\partial \mathrm{t}}\right]\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} = 0\,.$$

В результаті інтегрування даних рівнянь у межах від 0 до $V_{\partial.p}$, отримуємо вирази

$$-U'_{x.\partial.p} - V^2{}_{x.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_x V^3{}_{x.\partial.p} = 0\,;$$
$$-U'_{y.\partial.p} - V^2{}_{y.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_y V^3{}_{y.\partial.p} - \omega_{\partial.p} + \rho' g I_n V_{y.\partial.p} = 0\,;$$
$$-U'_{z.\partial.p} - V^2{}_{z.\partial.p} + 0{,}333\varsigma_з\delta_z V^3{}_{z.\partial.p} = 0\,.$$

З другого виразу визначаємо поперечний похил потоку субстанції посередині звивини

$$I_{n.\partial.p} = \frac{U'_{y.\partial.p} + V^2{}_{y.\partial.p} - 0{,}333\zeta_з\delta_y V^3{}_{y.\partial.p} + \Delta\omega_{\partial.p}}{\rho' g V_{\partial.p}}\,. \qquad \textbf{(57)}$$

Оцінка додаткових розрахункових характеристик. Поздовжню стійкість русла на перекатах можна оцінити шляхом сумісного розв'язування рівнянь (9 і 12) які показані в інтегральному вигляді

$$\int_0^{Q_{\partial.p}} \left(\Delta H_n{}^2 \frac{\partial B}{\partial t} - \rho' g I_0 \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \frac{dQ}{dy} = 0\,.$$

Після інтегрування у межах від 0 до $Q_{\partial.p}$ отримуємо

$$-\Delta H_n{}^2 B_{\partial.p} + \rho' g I_0 Q_{\partial.p} = 0\,,$$

звідки визначаємо ΔH_n

$$\Delta H_{n.\partial.p} = \left(\frac{\rho' g I_0 Q_{\partial.p}}{B_{\partial.p}} \right)^{0{,}5}. \qquad \textbf{(58)}$$

І насамкінець, виконуємо диференціювання та інтегрування рівнянь (6-8), у межах від 0 до $\delta_{\partial.p}$ і від 0 до $h_{\partial.p}$, після чого, отримуємо

$$-0{,}666\delta^{1{,}5}{}_{x\partial.p} + 0{,}333\Delta h h^3{}_{\partial.p} = 0\,;$$
$$-0{,}4\delta^{2{,}5}{}_{y\partial.p} + 0{,}04(S_{c.x}/B)h^3{}_{\partial.p} = 0\,;$$
$$-0{,}333\delta^3{}_{z\partial.p} + 0{,}166\Delta H_n h^3{}_{\partial.p} = 0\,.$$

Наведені вирази дають змогу визначити величини переміщення структурних елементів системи за наступними формулами:

$$\delta_{x\partial.p} = \left(0{,}5\Delta h h^3{}_{\partial.p}\right)^{0{,}667}; \qquad \textbf{(59)}$$

$$\delta_{y\partial.p} = \left(0{,}1(S_{c.x}/B)h^3{}_{\partial.p}\right)^{0{,}4}; \qquad \textbf{(60)}$$

$$\delta_{z\partial.p} = \left(0{,}5\Delta H_n h^3{}_{\partial.p}\right)^{0{,}333}. \qquad \textbf{(61)}$$

Для визначення "другої" (об'ємної) в'язкості водного потоку, яка придбана після його стискання, рекомендується скористатися емпіричною залежністю, яка наведена в монографії Л. Седова [1]

$$\varsigma_з = \varsigma + \frac{1}{3}\mu = \lambda_0 + \frac{2}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu = \lambda_0 + \mu \,, \tag{62}$$

де λ_0 – коефіцієнт Ламе, який залежить від модуля пружності рідини або твердого тіла і моменту інерції у поперечному вимірі, що визначає жорсткість об'єкта *EI.* Сила стискання (градієнт тиску) водного потоку викликає стоячу хвилю у вертикальній площині і зміщення мезовирів під впливом поперечного градієнту тиску в горизонтальній площині по синусоїдальній траєкторії (у межах русло-заплавного комплексу). Взаємодія стоячої хвилі з поперечною циркуляцією формує стійку соліноїдальну структуру потоку (гвинтовий рух води і транспортувальних наносів). В точках переходу напрямку поперечної циркуляції виникають перекати. Для річкового потоку жорсткість не має прояву, оскільки вода практично не сприймає нормальні напруження, а тільки дотичні, які виникають при її русі. Формулу (62) для руслового потоку можна записати у наступному вигляді:

$$\varsigma_з = 2\pi \mathrm{h}_{сер} + \mu \,, \tag{63}$$

де $2\pi\mathrm{h}_{сер}$ – віртуальна висота стоячої хвилі у водному середовищі, яка трансформується в процес нарощування висоти перекатів.

Аналітичне розв'язування системи рівнянь для оцінки характеристик придонної області руслового потоку. Дослідженнями турбулентності руслових потоків переймалися багато вітчизняних і зарубіжних вчених. Суттєві вклади у розвиток теоретичного обґрунтування турбулентності водотоків належать А.Н. Колмогорову [9], Б.А. Фідману [10], І.К. Нікітіну [11], А. Б .Клавену [12] В.С. Боровкову [13] та іншим вченим.

Турбулентність (коливання) як явище – це природний двигун самоорганізації відкритих і закритих динамічних систем, зокрема ГДС$_{п\text{-}р}$. Турбулізація (активізація) водних мас відбувається у придонній області, яка розділяє русловий потік від підруслового фільтраційного потоку. Товщина придонної області δ_n домірна орієнтовно подвоєній абсолютній висоті виступів шорсткості дна русла ≈ $2\Delta_{сер.зв}$. Ця область перебуває під впливом тиску водних мас по глибині потоку. Чим більша глибина руслового потоку, тим вищий рівень активності явища турбулентності водних мас у придонній області. В самому русловому потоці, при зміні рівня турбулентності водних мас (рівня генерації мікровирів – елементів турбулентності), відбувається структурна перебудова потоку, що характеризує рівень формування мезовирів. Формування мікровирів також відбувається в області підруслового потоку, що забезпечує динамічну рівновагу нейтрального шару. Це положення необхідно додатково підтвердити експериментами. Два потоки з різними енергетичними потенціалами розмежовуються нейтральним шаром [7].

Для вирішення поставленої задачі відібрано два із наведених вище основних рівнянь

$$* \quad \frac{\partial \vec{\upsilon}'}{\partial \mathrm{t}} = -(\vec{\upsilon}'\nabla)\vec{\upsilon}' + \nu\Delta\vec{\upsilon}' - \frac{1}{\rho'}\nabla p + \varsigma_\Delta \delta_\Delta.\nabla \mathrm{divh} \;; \tag{64}$$

$$* \quad \frac{\partial \vec{\upsilon}'}{\partial \mathrm{t}} = -(\vec{\upsilon}'\nabla)\vec{\upsilon}' - \frac{1}{\rho'}\nabla p \,. \tag{65}$$

Розкрите рівняння (64) разом з (65) у трьохвимірному просторі мають наступний вигляд:

$$\frac{\partial U'_x}{\partial t} = -U'_x\frac{\partial U'_x}{\partial x} - U'_y\frac{\partial U'_x}{\partial y} - U'_z\frac{\partial U'_x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\left(\frac{\partial U'_x}{\partial x} + \frac{\partial U'_y}{\partial x} - \frac{2}{3}\delta_{x.\Delta}\frac{\partial U'_x}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_\Delta\delta_{\Delta.x}\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{1}{\rho'}\frac{\partial p_x}{\partial x} + \\ + \frac{\partial U'_x}{\partial t} + U'_x\frac{\partial U'_x}{\partial x} + U'_y\frac{\partial U'_x}{\partial y} + U'_z\frac{\partial U'_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho'}\frac{\partial p_x}{\partial x}; \tag{66}$$

$$\frac{\partial U'_y}{\partial t} = -U'_x\frac{\partial U'_y}{\partial x} - U'_y\frac{\partial U'_y}{\partial y} - U'_z\frac{\partial U'_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\left(\frac{\partial U'_y}{\partial y} + \frac{\partial U'_z}{\partial y} - \frac{2}{3}\delta_{y.\Delta}\frac{\partial U'_y}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta_\Delta\delta_{\Delta.y}\frac{\partial h}{\partial y}\right) - \frac{1}{\rho'}\frac{\partial p_y}{\partial y} + ; \\ + \frac{\partial U'_y}{\partial t} + U'_x\frac{\partial U'_y}{\partial x} + \rho U'_y\frac{\partial U'_y}{\partial y} + U'_z\frac{\partial U'_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho'}\frac{\partial p_y}{\partial y} \tag{67}$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial t} = -U'_x\frac{\partial U'_z}{\partial x} - U'_y\frac{\partial U'_z}{\partial y} - U'_z\frac{\partial U'_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\left(\frac{\partial U'_z}{\partial z} + \frac{\partial U'_x}{\partial z} - \frac{2}{3}\delta_{z.\Delta}\frac{\partial U'_y}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\zeta_\Delta\delta_{\Delta.z}\frac{\partial h}{\partial z}\right) - \frac{1}{\rho'}\frac{\partial p_z}{\partial z} + \\ + \frac{\partial U'_y}{\partial t} + U'_x\frac{\partial U'_z}{\partial x} + U'_y\frac{\partial U'_z}{\partial y} + U'_z\frac{\partial U'_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho'}\frac{\partial p_z}{\partial z}. \tag{68}$$

Рівняння (65) включено у дану систему з метою стабілізації рівня турбулентності у придонній області, який залежить від зміни тиску. Після відповідних скорочень отримуємо наступні розрахункові рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\left(\frac{\partial U'_x}{\partial x} + \frac{\partial U'_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\delta_{\Delta.x}\frac{\partial U'_x}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\zeta_\Delta\delta_{\Delta.x}\frac{\partial h}{\partial x}\right] = 0; \tag{69}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\left(\frac{\partial U'_y}{\partial y} + \frac{\partial U'_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\delta_{\Delta.y}\frac{\partial U'_y}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\zeta_\Delta\delta_{\Delta.y}\frac{\partial h}{\partial y}\right] = 0.; \tag{70}$$

$$\frac{\partial}{\partial я}\left[\nu\left(\frac{\partial U'_z}{\partial z} + \frac{\partial U'_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\delta_{\Delta.z}\frac{\partial U'_z}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\zeta_\Delta\delta_{\Delta.z}\frac{\partial h}{\partial z}\right] = 0. \tag{71}$$

Отримані рівняння являють собою однорідну стаціонарну систему.

Після диференціювання і інтегрування даних рівнянь, при меженних умовах від 0 до $U'_{\Delta\partial.p}$ і від 0 до $h_{\partial.p}$ отримуємо наступні вирази:

$$-0{,}333.\nu U'^3_{\Delta.x.\partial.p} + 0{,}222.\nu\delta_{\Delta.x}U'^3_{\Delta.x.\partial.p} - 0{,}333.\varsigma_\Delta.\delta_{\Delta.x}h^3_{\Delta.x.\partial.p} = 0;.$$
$$-0{,}333.\nu U'^3_{\Delta.y.\partial.p} + 0{,}222.\nu\delta_{\Delta.y}U'^3_{\Delta.y.\partial.p} - 0{,}333.\varsigma_\Delta\delta_{\Delta.y}h^3_{\Delta.y.\partial.p} = 0;$$
$$-0{,}333.\nu U'^3_{\Delta.z.\partial.p} + 0{,}222..\nu\delta_{\Delta.z}U'^3_{\Delta.z.\partial.p} - 0{,}333.\varsigma_\Delta\delta_{\Delta.z}h^3_{\Delta.z.\partial.p} - = 0.$$

З цих виразів отримані наступні розрахункові формули для визначення величин пульсації субстрату по координатах *x*, y і z:

$$U'_{\Delta.x.\partial.p} = \left(\frac{0{,}333.\varsigma_\Delta\delta_{x.\Delta}h^3_{\partial.p}}{0{,}222.\nu\delta_{.x.\Delta} - 0{,}333.\nu}\right)^{0{,}333}; \tag{72}$$

$$U'_{\Delta.y.\partial.p} = \left(\frac{0{,}333.\varsigma_\Delta\delta_{y.\Delta}h^3_{\partial.p}}{222.\nu\delta_{y.\Delta} - 0{,}333.\nu}\right)^{0{,}333}. \tag{73}$$

$$U'_{\Delta.я.\partial.p} = \left(\frac{0,333.\varsigma_{\Delta}\delta_{z.\Delta}h^{3}_{\partial.p}}{,222.\nu\delta_{z.\Delta.} - 0,333.\nu} \right)^{0,333} . \qquad \textbf{(74)}$$

де $\zeta_{.\Delta} = \zeta_{з} + 0,333\nu = 2\pi h + \mu + 0,333\nu$ – загальна в’язкість субстрату у придонній області руслового потоку; $\delta_{\Delta.x} = \delta_{\Delta.y} = \delta_{\Delta.z}$ - товщина придонної області по координаті x, y i z, яку рекомендується назначати домірною подвоєній висоті виступів абсолютної шорсткості дна русла як по тальвегу, так і по ширині морфоструктур $2\Delta_{сер.зв}$. Товщина придонної області потоку δ_{Δ} може бути як досить малою, так і значною, в залежності від рельєфу поверхні дна русла, сформованого під впливом природних і антропогенних чинників,

Аналізуючи наведені вище формули (72-74) видно, що при дії стоячої хвилі від навантаження водних мас проти течії у придонній області потоку інтенсивність швидкості пульсації субстрату різко збільшується у порівнянні з відсутністю дії такої сили. Цей аргумент є досить сильним стосовно забезпечення природного стану річок і недопущення на них будь-якого спрямлення звивин (меандр). Оскільки при цьому буде спостерігатись значний транзит наносів за довжиною річки (порушуватись при цьому динамічна рівноваги системи). Як видно з цих формул швидкість пульсації однозначно залежить від глибини руслового потоку (прояв ефекту континуального навантаження і відповідно аналогічної реакції алювіальної основи).

Для визначення компонент гідродинамічного тиску у придонній області використовуємо рівняння (64), яке наведено у розкритому вигляді

$$\frac{\partial U'_x}{\partial t} = -U'_x \frac{\partial U'_x}{\partial x} - U'_y \frac{\partial U'_x}{\partial y} - U'_z \frac{\partial U'_x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\nu \left(\frac{\partial U'_x}{\partial x} + \frac{\partial U'_y}{\partial x} - \frac{2}{3}\delta_{x.\Delta}\frac{\partial U'_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta_{\Delta}\delta_{\Delta.x}\frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{1}{\rho'}\frac{\partial p_x}{\partial x}; \qquad \textbf{(75)}$$

$$\frac{\partial U'_y}{\partial t} = -U'_x \frac{\partial U'_y}{\partial x} - U'_y \frac{\partial U'_y}{\partial y} - U'_z \frac{\partial U'_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu \left(\frac{\partial U'_y}{\partial y} + \frac{\partial U'_z}{\partial y} - \frac{2}{3}\delta_{y.\Delta}\frac{\partial U'_y}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varsigma_{\Delta}\delta_{\Delta.y}\frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho'}\frac{\partial p_y}{\partial y}; \qquad \textbf{(76)}$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial t} = -U'_x \frac{\partial U'_y}{\partial x} - U'_y \frac{\partial U'_y}{\partial y} - U'_z \frac{\partial U'_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu \left(\frac{\partial U'_z}{\partial z} + \frac{\partial U'_x}{\partial z} - \frac{2}{3}\delta_{z.\Delta}\frac{\partial U'_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varsigma_{\Delta}\delta_{\Delta.z}\frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho'}\frac{\partial p_z}{\partial z}, \qquad \textbf{(77)}$$

які після диференціювання і інтегрування у межах від 0 до $U'_{\partial.p}$, $0/p_{\partial.p}$ і від 0 до $h_{\partial.p}$ та при початковій умові збереження стану динамічної рівноваги системи $U'_{./t} = 0$ при $U'_{\partial.p}$.

$$U'^{2}_{\Delta.x.\partial.p} - 0,333..\nu U'^{3}_{\Delta.x.\partial.p} + 0,222..\nu.\delta_{x.\Delta}U'^{3}_{\Delta.x.\partial.p} + (1/\rho')p_{x.\partial.p} - 0,333.\varsigma_{\Delta}\delta_{x.\Delta}h^{3}_{\partial.p} = 0;$$
$$U'^{2}_{\Delta.y.\partial.p} - 0,333..\nu U'^{3}_{\Delta.y.\partial.p} + 0,222..\nu.\delta_{x.y}U'^{3}_{\Delta.x.\partial.p} + (1/\rho')p_{y.\partial.p} - 0,333.\varsigma_{\Delta}\delta_{y.\Delta}h^{3}_{\partial.p} = 0;$$
$$U'^{2}_{\Delta.z.\partial.p} - 0,333..\nu U'^{3}_{\Delta.z.\partial.p} + 0,222..\nu.\delta_{z.\Delta}U'^{3}_{\Delta.z.\partial.p} + (1/\rho')p_{z.\partial.p} - 0,333.\varsigma_{.\Delta}\delta_{z.\Delta}h_{\partial.p} = 0,$$

з яких отримуємо розрахункові формули

$$p_{\Delta.x.\partial.p} = (0,333.\nu U'^{3}_{\Delta.x.\partial.p} - U'^{2}_{\Delta.x.\partial.p} - 0,222.\nu.\delta_{x.\Delta}U'^{3}_{\Delta.x.\partial.p} + 0,333.\varsigma_{\Delta}\delta_{x.\Delta}h^{3}_{\partial.p})\rho'; \qquad \textbf{(78)}$$

$$p_{\Delta.y.\partial.p} = (0,333.\nu U'^{3}_{\Delta.y.\partial.p} - U'^{2}_{\Delta.y.\partial.p} - 0,222..\nu.\delta_{y.\Delta}U'^{3}_{\Delta.y.\partial.p} + 0,333.\varsigma_{\Delta}\delta_{y.\Delta}h^{3}_{\partial.p})\rho'; \qquad \textbf{(79)}$$

$$p_{\Delta.y.\partial.p} = (0,333.\nu U'^{3}_{\Delta.z.\partial.p} - U'^{2}_{\Delta.z.\partial.p} - 0,222.\nu.\delta_{z.\Delta}U'^{3}_{\Delta.z.\partial.p} + 0,333.\varsigma_{\Delta}\delta_{z.\Delta}h_{\partial.p})\rho'. \qquad \textbf{(80)}$$

Приклад розрахунку основних характеристик руслового потоку для гідрологічного поста Сірет – Сторожинець. *Вихідні дані для розрахунків.* Для розв'язування замкненої системи рівнянь необхідно знати наступні характеристики: значення руслоформувальної витрати води $Q_{рф}$ = 189 м^3/с, середньозважену крупність поверхневого шару дна русла (самовимощення) $D_{сер.зв}$ = 60 мм, яка домірна середньозваженій абсолютній висоті виступів шорсткості дна русла на досліджуваній ділянці $\Delta_{сер.зв}$, середню ширину русла у межах бровок $B_б$ = 45 м та середню глибину руслового потоку $h_{рф}$ = 2,0 м, а також поздовжній похил на однорідній за морфологією ділянці річки між п'ятьма перекатами I_0 = 0.0013. Розрахунками необхідно підтвердити значення наступних основних характеристик руслового потоку – середню швидкість течії $V_{д.р}$ = 2,10 м/с.

Хід розрахунку основних характеристик системи «потік-русло» для досліджуваної ділянки річки. При визначенні основних характеристик ГДСп-р рекомендується використати наступні фізичні величини: значення віртуальної густини субстрату ρ' = 1150 кг/м^3 або 1,15 Т/м^3; значення коефіцієнта динамічної в'язкості μ = 0,131 кг/м·с (відповідає середній температурі води 10^{o}С) і значення коефіцієнта кінематичної в'язкості ν = 131 м^2/с. За наведеними вище даними коефіцієнт об'ємної в'язкості $\varsigma = 2\pi h_{сер} + \mu$ = 12,69 кг/м·с. Дальше визначаємо величини переміщення субстрату в елементах системи при Δh = 0,01 м (величина Δh визначається підбором) – $\delta_{x.д.р}$ = 0,117 м, $\delta_{y.д.р}$ = 3,40 м (при довжині річки по прямій між трьома перекатами $S_{c.x}$ ≈ 1200 м), $\delta_{z.д.р}$ = 0,69 м (при ΔH_n = 0,12 м, яке визначене за формулою (58)). Наступним кроком є визначення компонент швидкості переміщення субстрату на перекаті - $V_{x.д.р}$ = 2,02 м/с, $V_{y.д.р}$ = 0,069 м/с, $V_{z.д.р}$ = 0,34 м/с, $V_{сер}$ = 2,05 м/с. Компоненти середньої швидкості пульсації субстрату у придонній області потоку за розрахунками складають - $U'_{x.д.р} = U'_{y.д.р} = U'_{z.д.р}$ = 0,717 м/с і $U'_{д.р}$ = 1,24 м/с. Дані компоненти обраховані при загальній в'язкості субстрату у придонній області $\zeta_\Delta = \zeta_{з.р.п}$ + 0,333ν = 56,32 кг/м·с і при товщині придонної області $\delta_{\Delta.x} = \delta_{\Delta.y} = \delta_{\Delta.z}$ = 0,1 м. Компоненти тиску у придонній області складають - $p_{\Delta.x.д.р} = p_{\Delta.y.д.р} = p_{\Delta.z.д.р}$ = 30 кгс/м^2 і $p_{\Delta.д.р}$ = 52 кгс/м^2 або 0,51 Па (0,005 атм).

За допомогою обчислених вище характеристик можна знайти решту основних: I_0 = 0,00032, $\omega_{д.р}$= 0,04 м^2 (прирощення площі поперечного перерізу потоку посередині звивини, що вказує на наявність розвинутого меандрування річки), I_n = 0,04/$B_з$ = 0,00068 (похил поверхні потоку посередині звивини річки, визначений при $\omega_{д.р}$= 0,04 м^2 і при $B_з = B_{д.р} + \Delta B$ = 45+13,76 = 58,76 м). Прирощення глибини потоку по динамічній вісі посередині звивини за формулою (30) складає 1,26 м, що відповідає максимальній глибині потоку по тальвегу посередині звивини під час проходження руслоформувальної витрати води $h_{макс}$ = 2 + 1,26 = 3,26 м. Загальна витрата транспортувальних наносів при розвинутому меандруванні річки складає $G_{д.р} = q_{x.д.р} + q_{y.д.р} + q_{z.д.р}$ = 191+117 – 0,41 = 308 кг/с, а витрата транзитних наносів при цьому дорівнює G_s = 191 кг/с.

Для оцінки характеристик ядра потоку, яке знаходиться всередині макровира, використаємо рівняння

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = Fa \frac{\partial S}{\partial t}, \qquad \textbf{(81)}$$

де $F = \rho' g W_м$ – сила гравітації субстрату при стаціонарному гідравлічному режимі на довжині двох звивин (меандри), кгм/с^2; ρ'g- питома густина води може складати, 1150 кг/м^3; $W_м = \omega_{д.р} \times S_{c.x}(S_з/L)$ = 90×1200×1,6 = 172800 – об'єм води на довжині двох звивин, м^3; S – контур ядра потоку; $a = (\delta_{y.\partial.p} / \delta_{x.\partial.p})\, g$ = (3,40/0,117)·9,81 = 285 – прискорення структурного елемента субстрату під впливом поперечної циркуляції, м/с ^{2}. Після диференціювання і інтегрування рівняння (60), при меженних умовах від 0 до $V'_{\partial.p}$ і від 0 до $S_{\partial.p}$ отримуємо вираз

$$-V_{\partial.p} - FaS_{\partial.p} = 0\,,$$

звідки маємо:

$$S_{\partial.p} = \frac{V_{\partial.p}}{Fa}. \qquad \textbf{(82)}$$

З цієї формули отримуємо $S_{\partial.p}$ = 2,17/(1,15×172800×285) = 3,83×10^{-08} м, а діаметр ядра буде домірним 6,1×10^{-09} м. Отже на досліджуваній ділянці річки ядро в потоці виражене досить слабо. .Коефіцієнт парної кореляції величин переміщення субстракту за межами цього ядра дорівнює $r_{yx} = \delta_{\partial.p.y} \times \delta_{\partial.p.x} / (\delta^2_{\partial.p.y} \times \delta^2_{\partial.p.x})^{0.5} = 0$. Це означає, що дана система перебуває в динамічній рівновазі.

Висновки. На основі вищевикладеного матеріалу можна зробити наступні наукові узагальнення:

1. В періоди проходження руслоформувальних паводків або весняних повеней відбувається стискання потоку при якому відбуваються переміщення структурних елементів потоку, що призводить до поступового викривлення центрального струміння у вигляді синусоїдальної кривої, а потім це призводить, на фоні розвинутої поперечної циркуляції, до формування гвинтової течії. У цьому контексті слід зауважити, що стояча хвиля виникає в результаті градієнту тиску на всю глибину потоку на ділянці річки. При дії хвилі проти течії виникає прояв явища мандрування або переміщення антидюн або осередків (антигряд), які призводять до блукання русла. Віддаль між перекатами по прямій лінії має орієнтовно складати 1200 м При дії градієнту тиску за течією маємо переміщення гряд або розгалуження русла на рукави.

2. На основі визначених величин основних характеристик потоку – $Q_{p.\phi}$, $V_{\partial.p}$, $G_{p\phi}$, $\omega_{p\phi}$, $B_{\partial.p}$, $h_{\partial.p}$ - є можливість виконати прогноз розвитку руслових деформацій та оцінити гідроморфодинамічний стан ГДС $_{п\text{-}р}$.

3. При значній зміні величин $\omega_{\partial.p}$ *і* $B_{\partial.p}/h_{\partial.p}$ це вказує на розвиток незворотних руслових деформацій русла, а також на зміну рівня властивості самоорганізації системи і, відповідно, терміну повернення її до попереднього стану або наближеного до динамічної рівноваги.

4. Отримані результати розрахунків підтверджують про реальність розвитку явища мандрування річки, що дозволяє при виконанні моніторингових спостережень за розвитком руслових процесів визначати у відповідному часовому зрізі гідроморфологічний стан ділянки річки. У якості вихідної інформації необхідно лише мати планове положення ділянки річки і поперечні профілі русла у відповідних річкових гідроморфологічних створах та розрахункові характеристики шару самовимощення дна русла, що дасть можливість скласти належну систему рівнянь та виконати за ними необхідні аналітичні розрахунки, а також здійснити верифікацію отриманих результатів.

5. Розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса дозволяє у повній мірі оцінити стан динамічної рівноваги системи «потік-русло». Наведені вище розв'язки актуальних задач підтверджують можливість широкого використання цієї системи рівнянь для вирішення цілого ряду задач гідроаеромеханіки.

Список літератури

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды / Л.И. Седов. -Т.1. - М. Наука, 1983.- 528 с. **2.** *Дмитревский В.И.* Гидромеханика / В.И. Дмитревский. – М.: Изд-во «Морской транспорт», 1962. - 296 с. **3.** *Войткунский Я.И.* Гидромеханика. / Я.И. Войткунский, Ю.И. Фаддеев, К.К. Федяевский Ученик. – 2-е узд., перераб. и доп. – Л.: Судостроение, 1982. – 456 с. **4.** *Ландау Л.Д.* Гидродинамика. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц - М.: Наука.- T.VI, 1988.- 736с. **5.** *Онищук В.В.* Принципові властивості відкритих динамічних систем у контексті еволюції руслових процесів: інваріантність, ергодичність, меандрування / В.В. Онищук // Гідрологія, гідрохімія і гідроекологія., 2006. – Т.10. – С.9-20. **6.** *Онищук В.В.* Принципи функціонування відкритих динамічних систем та їх роль при регулюванні русел річок / В.В. Онищук // Гідрологія, гідрохімія і гідроекологія.- К.: ВГП Обрії, - 2012.- Т.1(26). - С. 19-27. **7.** *Онищук В.В.* Принципи функціонування відкритих динамічних систем та їх роль при регулюванні русел річок / В.В. Онищук // Гідрологія, гідрохімія і гідроекологія.- К.: ВГП Обрії, - 2012.- Т.1(26). - С. 19-27. **8.** *Водна Рамкова Директива* ЄС 2000/60/ЄС : основні терміни та їх визначення / [підгот.: Алієв К. та ін.]. – Вид. офіц. – К., 2006. – 240 с. **9.** *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса / А.Н. Колмогоров // ДАН СССР.-Т.30.-№4, 1941. **10.** *Фидман Б.А.* Об уравнениях гидромеханики для многокомпонентной турбулентной среды / Б.А. Фидман // Изд. СО АН СССР, ОТН, №2,вып.1,1965. **11.** *Никитин И.К.* Турбулентный русловой поток и процессы в придонной области. / И.К. Никитин - Киев: Изд-во АН УССР,1968. – 120 с. **12.** *Клавен А.Б.* Исследование структуры турбулентного потока / А.Б. Клавен //Тр. ГГИ, 1986. – Вып.136. – С. 65-76. **13.** *Боровков В.С.* Русловые процессы и динамика речных наносов на урбанизованных территориях / В.С. Боровков. - Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 286 с.

Розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса для оцінки динамічної рівноваги системи «потік-русло»

Онищук В.В.

На основі аналітичного розв'язування замкненої системи рівнянь Нав'є-Стокса виконана оцінка гідроморфологічного стану річкового русла при динамічній рівновазі системи «потік-русло». Для рівняння руху сповільненої течії запропоновано додаткове рівняння, яке стабілізує досягнутий рівень турбулентності руслового потоку. Аналогічна процедура запропонована для оцінки характеристик придонної області. За допомогою системи з дванадцяти рівнянь оцінені основні характеристики поздовжньої стійкості потоку, розвитку явища меандрування, розвитку горизонтальних і вертикальних руслових деформацій, транспортувальної здатності водотоку та придонної області руслового потоку. За отриманими розрахунковими формулами оцінено гідроморфологічний стан ділянки мандруючої річки в районі гідрологічного поста Сірет – Сторожинець (Чернівецька область). Установлено, що гідродинамічний тиск субстрату у придонній області наближений до глибокого вакууму, що вказує на наявність нейтрального шару між двома енергетичними потоками з різко відмінними потенціалами. На межі руслового і підруслового (фільтраційного) потоків має місце динамічна рівновага взаємного масообміну між водою і повітрям у вигляді продукування мікровирів і антимікровирів на фоні дії ефекту ежекції.

Ключові слова: *гідродинамічна система «потік-русло», динамічна рівновага системи, руслоформувальна витрата води і транспортувальних наносів, рівняння Нав'є-Стокса, явище меандрування, соліноїдальна траєкторія руху, ядро водотоку*.

Решение системы уравнений Навье-Стокса для оценки динамического равновесия системы «поток-русло»

Онищук В.В.

На основе аналитического решения замкнутой системы уравнений Навье-Стокса выполнена оценка гидроморфологического состояния речного русла при динамическом равновесии системы «поток-русло». Для уравнения движения замедленного течения предложено дополнительное уравнение, которое стабилизирует достигнутый уровень турбулентности руслового потока. Аналогичная процедура предложена для оценки характеристик придонной области. С помощью системы с двенадцати уравнений оценены основные характеристики продольной устойчивости потока, развития явления меандрування, развития горизонтальных и вертикальных русловых деформаций, транспортирующей способности водотока и придонной области руслового потока. По полученным расчетным формулам дана оценка гидроморфологического состояние участка меандрирующей реки в районе гидрологического поста Сирет - Сторожинец (Черновицкая область). Установлено, что гидродинамическое давление *субстрата в придонной области приближенно к глубокому вакууму, что указывает на наличие нейтрального слоя между двумя энергетическими потоками с резко отличными потенциалами. На границе руслового и подруслового (фильтрационного) потоков имеет место динамическое равновесие взаимного массообмена между водой и воздухом в виде выработки микровихрей и антимикровихрей на фоне действия эффекта эжекции.*

Ключевые слова: *гидродинамическая система «поток-русло», динамическое равновесие системы, руслоформирующий расход воды и транспортировочных наносов, уравнения Навье-Стокса, явление меандрувания, солиноидальная траектория движения, ядро водотока*.

Solving the system of Navier-Stokes equations for estimation of dynamic equilibrium system "flow-channel"

Onischuk V.

Based on the analytical solution of closed system of Navier-Stokes hydromorphological condition the estimation of river channel with dynamic equilibrium system "flow-channel." To slow traffic flow equation proposed additional equation that the current level stabilizes turbulent channel flow. The same procedure proposed for assessing the characteristics of the bottom area. With the system of equations estimated twelve main characteristics of longitudinal stability flux of phenomena meandruvannya, development of horizontal and vertical channel deformations of shipping capacity of the watercourse and the bottom area of the channel flow. According to the calculation formula assessed hydromorphological state area traveling near the river Siret hydrological post - Storozhynets (Chernivtsi region). Established that the hydrodynamic pressure in the bottom substrate area close to deep vacuum, which indicates the presence of a neutral layer between two energy flows dramatically different potentials. At the edge of the channel and filtration flows is a dynamic equilibrium relative mass exchange between water and air in the form of production and mikrovyriv antymikrovyriv action against the background effect ejection. It is established that the phenomenon meandruvannya characteristic slow flow resulting in compression of structured spatial stream. The action of the deformation of the standing wave in the shallows and channels gyros towards low energy dissipation. As for the bottom area, it is characteristic of significant influence pryvantazhennya thicker bottom channel flow. Established that hdrodynamichnyy pressure in the bottom substrate area close to deep vacuum, which indicates the presence of a neutral layer between two energy flows dramatically different potentials. At the edge of the channel and soil filtration flows is a dynamic equilibrium relative mass exchange between water and air in the form of production and mikrovyriv antymikrovyriv action against the background effect ejection.

Keywords: hydrodynamic system of "flow-channel" dynamic equilibrium system, channel bed water flow channels, equation Navier-Stokes, phenomenon meandruvannya, solinoyidalna trajectory, the core stream.

Надійшла до редколегії **07.11.2016**