

to the appropriate categories. Target ecological norms (TEN) for most of ingredients correspond 1-3 categories.

Analysis of obtained results, according to the improved methodologies of the environmental assessment of the quality of surface water to the appropriate categories, demonstrates that acceptable ecological norms (AEN) on the majority of the ingredients correspond to class 2 and 3 (2-4 categories).

It should be noted that on indicators of phosphorus, phosphate and nitrogen nitrate values environmental norms correspond the 4th class (Category 6), in terms of nitrite nitrogen - 3 class (category 5), and sulfates, petroleum, manganese, copper, BOD5 and index saprobity (phytoplankton) - class 3 (4 categories). These indicators require more in-depth analysis.

Target ecological norms (TEN) on the majority of the ingredients correspond the class 1 and 2 (categories 1-3), surface water quality. In this case, correspond class 3 (5 categories), and sulfates and nitrate nitrogen on indicators of phosphorus, phosphate values environmental standards - class 3 (4 categories).

Using forecasting models, in 2025 a significant deterioration is expected on the following parameters: phosphorus phosphates - 5 class (category 7), nitrogen ammoniynomu - Grade 3 (Category 4) and sulphate - Grade 3 (Category 5).

The proposed ecological norms can be used as the main indicators of the environmental component in the development of targeted surface water quality indicators in the implementation of the European iterative approach.

**Keywords:** surface water, environmental regulations, water quality, Oskol River, Kharkiv region.

**Надійшла до редколегії 11.02.2017**

УДК 627.142:543.117

**Онищук В.В.**

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*

## **РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ НАВ'Є – СТОКСА ДЛЯ ОЦІНКИ ГІДРОМОРФОЛОГІЧНОГО СТАНУ РУСЛО-ЗАПЛАВНОГО КОМПЛЕКСУ**

**Ключові слова:** гідродинамічна система «потік-русло-заплава», рівняння Нав'є-Стокса, “заморожена” турбулентність, планові деформації поверхні заплави, гідроморфологічний стан русло-заплавного комплексу.

**Актуальність проблеми.** Актуальність вирішення даної проблеми полягає в тому, що процеси переформування заплави кардинально відрізняються від тих процесів, які відбуваються в руслі, а тим більше, що вони недостатньо досліджені на сьогоднішній день. Математичне моделювання мілкої плоскої течії часто пов'язано з розривами суцільного середовища у вигляді місцевих замкнених поверхонь, наявністю вирів з вертикальною і горизонтальною осями обертання, присутністю рослинності у вигляді трави, окремих дерев та кущів. Динамічна вісь заплавного потоку, як правило, не співпадає з динамічною віссю руслового, а це ускладнює їх взаємний системний розгляд. Заплавний потік у більшій мірі залежить від конфігурації долини.

Запропоновані нижче аналітичні рішення окремих задач дозволяють уникнути цілого ряду обмежень стосовно отримання достатньо точного результату. Важливим аспектом при цьому є використання камеральних умов при виконанні комплексу обчислювальних робіт на противагу польовим спостереженням. Рівняння Нав'є–Стокса у даному дослідженні виступають методологічною основою системного розгляду взаємодії процесів русло-заплавного потоку при динамічній рівновазі руслового потоку в умовах відсутності динамічної рівноваги над поверхнею заплави. А тому важлива роль при проведенні аналітичних розв'язків відводиться задачі достатньо достовірного визначення руслоформувальної витрати субстрату

**Гідрологія, гідрохімія і гідроекологія. – 2017. – Т.1(44)**

суцільного середовища як при відсутності, так і наявності незворотних руслових деформацій.

**Аналіз попередніх досліджень.** Раніше автором цієї статті було виконано розв'язування системи рівнянь Нав'є–Стокса для оцінки динамічної рівноваги системи «потік – русло» [1]. Що стосується числових методів розв'язання цих рівнянь з використанням різних методів апроксимації, то вони найбільш повно висвітлені в роботах [2,3].

**Методика досліджень.** Динамічна рівновага ГДС<sub>п-р</sub> обумовлена проходженням руслоформуальної витрати води і транспортувальних наносів. При відсутності незворотних руслових деформацій проходження таких витрат, як правило, спостерігається у межах руслових бровок. Це дає змогу розглядати русло-заплавний потік в початкових умовах наближених до ламінарного режиму течії у центральному відсіку по поверхні руслового потоку у нерозривній їх єдності та окремо у бокових відсіках. останні періодично відгороджені від центрального відсіку ланцюгами розвинутих вертикальних макровирів вздовж ввігнутих берегів на фоні прояву динаміко-кінематичного ефекту. При розгляді рівнянь руху субстрату Нав'є–Стокса належить розвести дію силових факторів на їх індивідуальний рівень функціонування зі збереженням динамічної рівноваги системи і їх послідовну оцінку за умовами виконання конкретної задачі. З методичної точки зору це можна досягти шляхом стабілізації режиму турбулентності субстрату та його тиску за допомогою допоміжних (прототипних) рівнянь і шляхом їх сумісного розв'язування поетапне виокремлення агентів збурення, цебто тиску і його наслідку діяльності у вигляді змін форми деформації суцільного середовища. Цей підхід, який можна назвати “замороженою” турбулентністю, належить використовувати як для руслового потоку і заплавного у бокових відсіках, так і для їх придонних областей.

**Виклад основного матеріалу досліджень. Система рівнянь Нав'є – Стокса для описання системи «руслоформуальний потік – русло-заплавний потік».** Русло - заплавний потік розглядається в органічній єдності з русловим у відсіку над поверхнею в межах однорідних руслових бровок і на противагу окремо у відсіках з правого і лівого берегів. Для вирішення поставленої задачі пропонується наступна система рівнянь у частинних похідних:

$$* \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \nu \Delta \bar{v} - \frac{1}{\rho'} \nabla p + \left( \zeta + \frac{\nu}{3} \right) \delta \cdot \nabla \operatorname{div} \bar{v} ; \quad (1)$$

$$* \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \nu \Delta \bar{v} - \frac{1}{\rho'} \nabla p ; \quad (2)$$

$$* \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \nu \Delta \bar{v} - \frac{1}{\rho'} \nabla p + \nabla \bar{v}' ; \quad (3)$$

$$* \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} = -(\bar{v}' \cdot \nabla) \bar{v}' + \nu \Delta \bar{v}' - \frac{1}{\rho'} \nabla p + \zeta_{\Delta} \delta_{\Delta} \cdot \nabla \operatorname{div} \bar{v} ; \quad (4)$$

$$* \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} = -(\bar{v}' \cdot \nabla) \bar{v}' - \frac{1}{\rho'} \nabla p ; \quad (5)$$

$$* \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t} \pm \frac{\partial q_s}{\partial t} ; \quad (6)$$

$$* \frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho' g I_0 \frac{\partial Q}{\partial t} ; \quad (7)$$

$$* \frac{\partial Q}{\partial t} = (2gI_0)^{0.5} \lambda_3^{-0.5} \frac{\partial B \partial h^{1.5}}{\partial t} ; \quad (8)$$

$$* \frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho' g B_s I_n \frac{\partial \nu}{\partial t} ; \quad (9)$$

$$* \frac{\partial \delta_x^{0.5}}{\partial t} = \Delta h \frac{\partial h}{\partial t} ; \quad (10)$$

$$* \frac{\partial \delta_y^2}{\partial t} = 0,5(S_{x,\delta} / 2\pi h) \frac{\partial h}{\partial t} ; \quad (11)$$

$$* \frac{\partial \delta_z^2}{\partial t} = 0,5\Delta H_n (S_{x,\delta} 2gh) \frac{\partial h}{\partial t} ; \quad (12)$$

$$* \frac{\partial h^{0.5}}{\partial t} = \Delta H_n . \quad (13)$$

де  $\nabla$  - оператор Гамільтона;  $\Delta$  - оператор Лапласа;  $\rho'_{\text{сер.зв}} = (\sum P_i \rho_i) / 100$  (де  $P_i$  – забезпеченість відповідного елемента потоку, %;  $\rho_i$  – середня щільність фракцій завислих наносів та густина відповідного об'єму рідини) або за формулою  $\rho' = \rho(1 - s) + \rho_s s$  (де  $s$  – каламутність водного потоку),  $\rho'$  - віртуальна густина руслоформуванняльного потоку (вода разом з транспортувальними наносами - субстрат), кг/м<sup>3</sup>;  $\rho$  - сумарний градієнт тиску (градієнти гідростатичного і гідродинамічного тисків, а також градієнт тиску атмосферного повітря по поверхні водного потоку - вітер), кгс/м<sup>2</sup>;  $\nu$  - коефіцієнт кінематичної в'язкості, м<sup>2</sup>/с;  $\zeta$  - «друга» (об'ємна) в'язкість водного потоку, яка придбана після його деформації, кгм/с<sup>2</sup>;  $B$  і  $h$  - відповідно середні значення ширини поверху заплавного потоку і глибини, м;  $q_{s,i}$  – компонентна витрата транспортувальних наносів, кг/м<sup>3</sup>;  $Q$  – витрата води, м<sup>3</sup>/с;  $S_{x,\delta}$  - довжина хвилі деформації, яка домірна 1200 м;  $\omega = B h$  – площа живого перерізу заплавного потоку у відсіку, м<sup>2</sup>;  $\delta_i$  - величина переміщення структурних елементів водного потоку (макрівирів) в координатах  $x$ ,  $y$  і  $z$ , м;  $\delta_\Delta$  - величина переміщення структурних елементів водного потоку у придонній області (мікрівирів) по координатах  $x$ ,  $y$  і  $z$ , м;  $g$  – прискорення сили земного тяжіння, м/с<sup>2</sup>;  $I_0$  - поздовжній гідравлічний похил;  $I_n$  - поперечний гідравлічний похил;  $\lambda_3$  - коефіцієнт загального гідравлічного тертя заплавної поверхні;  $\Delta h_{x,\delta}$  – прирощення глибини потоку в результаті дії хвилі деформації на русловий потік, м;  $\Delta H_n$  - прирощення товщини перевалу в результаті дії хвилі деформації на заплавний потік, м;  $\nu$  – середня швидкість заплавного потоку у відсіках, м/с.

В аналіз розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса до теперішнього часу входило коректне рішення задачі Коші, оскільки можливість його здійснення у значній мірі залежала від рівня турбулентності водних мас і відповідних змін чисел Рейнольдса, а також пов'язаних з цим інших критеріїв. Наведені вище рівняння складають повну (замкнену) систему для умов русло-заплавного потоку: рівняння (1) описує рух рідини в декартових координатах  $x$ ,  $y$  і  $z$  у векторній формі; рівняння (2) стосується руху заплавного потоку над поверхнею руслового потоку у межах бровок; рівняння (3) стосується стабілізації режиму турбулентності руслового та заплавного в бокових відсіках потоків («заморожена» турбулентність) в координатах  $x$ ,  $y$  і  $z$ ; рівняння (4) оцінює рівень турбулентності субстрату у придонній області руслового та заплавного в бокових відсіках потоків в координатах  $x$ ,  $y$  і  $z$ ; рівняння (5) рекомендується для стабілізації режиму тиску заплавного потоку в бокових

відсіках (“заморожений” конвенційний рух субстрату) в координатах  $x$ ,  $y$  і  $z$ ; рівняння (6) характеризує безперервно-дискретний характер руслових і заплавної процесів; рівняння (7) характеризує деформації дна русла та поверхні заплави у поздовжньому розрізі (оцінює поздовжню стійкість руслового та заплавної потоків); рівняння (8) відповідає пропускній здатності руслового та заплавної потоків; рівняння (9) визначає поперечну стійкість руслового та заплавної потоків; рівняння (10) описує переміщення структурних елементів заплавної потоку в умовах його деформації по осі  $x$ ; рівняння (11) характеризує переміщення структурних елементів заплавної потоку в умовах його деформації по осі  $y$ ; рівняння (12) оцінює переміщення структурних елементів заплавної потоку в умовах його деформації по осі  $z$ ; рівняння (13) характеризує просторову поздовжню стійкість поверхні заплави по поперечних заплавної перевалах..

Рівняння (2) пропонується для описання руху рідини від заплавної потоку над поверхнею руслового потоку у межах бровок русла. У дане рівняння не входить вектор поля масових сил, оскільки розглядається плоска задача, де відсутній вплив берегів (схилів долини). Бокові заплавні відсіки розглядаються як плоский русловий потік з наявністю придонної області. Оскільки заплавної потік у бокових відсіках може майже наполовину глибини складатися з придонної області, то його варто розглядати як тонку гнучку плиту на пружній основі. Така плита підпорядкована типу деформації по аналогії ейлерового стержня, тобто його деформація має форму пологої синусоїди, яка орієнтована у вертикальній площині. Рівняння (13) описує поздовжню деформацію плити у форматі розповсюдження хвилі деформації прийняту нами при довжині  $S_{x,0} = 1200$  м. Детальний опис усіх інших рівнянь і характеристик наведені при розв’язуванні системи рівнянь для руслового потоку в роботі [1].

Для центрального відсіку заплавної потоку, розміщеного над поверхнею руслового потоку, розглядається двохвимірний плоский потік у площині  $XZ$ . В результаті сумісного розгляду рівнянь (2 і 3) отримуємо у розкритому вигляді наступні рівняння:

$$\frac{\partial U'_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial z} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad (15)$$

**Аналітичне розв’язування системи рівнянь для модельного заплавної потоку, розміщеного над водною поверхнею між бровками русла (*bankfull sage*).** Для вирішення поставленої задачі відібрана наступна система рівнянь:

$$\frac{\partial U'_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial z} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho' g I_0 \frac{\partial Q}{\partial t}; \quad (18)$$

Рівняння (18) додається до рівнянь (16,17), які після цього мають вигляд

$$\frac{\partial U'_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial t} - \rho' g I_0 \frac{\partial Q}{\partial t} = 0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial z} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial t} - \rho' g I_0 \frac{\partial Q}{\partial t} = 0. \quad (20)$$

Наведені рівняння рішаються при наступних крайових і початковій умовах: - швидкості течії на дні модельного русла мають співпадати зі швидкостями течії на вільній поверхні руслового потоку в умовах проходження руслоформувальної витрати води і транспортувальних наносів ( $V_{н.зап} = V_{пов.р.п.}$ ). Це означає відсутність русло-заплавної придонної області між потоками. На бокових поверхнях швидкість течії на відмітках бровок  $V_{н.зап}$  мають бути рівними відповідним швидкостям біля берегів (бровок) руслового потоку  $V_{б.р.п} = 0,2$  м/с при початковій умові  $V_{\Delta.з.п} = 0,2$  м/с, по глибині модельного заплавного потоку. На його віртуально зовнішніх межах біля руслових бровок зосереджуються похідні вирові мезоструктури з вертикальною віссю обертання. Вони обумовлюють формування берегових валів та відповідного функціонування динаміко-кінематичного ефекту при заповненні заплави водою до глибини 120 см (це означає наявність розривів суцільного водного середовища, тобто початковою умовою є розрив неперервності течії у русло-заплавному потоці).

Після диференціювання і інтегрування наведених вище рівнянь, при крайових умовах від  $V_{пов.р.п.}$  до  $V_{пов.з.п}$  та при початковій умові  $\partial U'/\partial t = 0$ , отримуємо наступні вирази:

$$V_{нов.р.п.х}^2 - V_{нов.з.п.х}^2 + \rho' g I_0 Q_{з.п} = 0;$$

$$V_{нов.р.п.з}^2 - V_{нов.з.п.з}^2 = 0;$$

з яких відповідно знаходимо

$$I_{0ц.б} = \frac{V_{нов.з.п.х}^2 - V_{нов.р.п.х}^2}{\rho' g Q_{з.п.ц.б}}; \quad (21)$$

$$V_{нов.з.п.з} = V_{нов.р.п.з}. \quad (22)$$

З формули (21) слідує, що гідравлічний поздовжній похил центрального заплавного відсіку дорівнює русловому.

**Аналітичне розв'язування системи рівнянь для бокових відсіків заплавного потоку, з метою оцінки гідроморфологічного стану заплави.** Ця задача виконується за допомогою наступної системи рівнянь [1, 4-6]:

$$\frac{\partial U'_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta_x \right) = 0; \quad (23)$$

$$\frac{\partial U'_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta_y \right) = 0; \quad (24)$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial z} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta_z \right) = 0; \quad (25)$$

$$* \frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho' g I_0 \frac{\partial Q}{\partial t}; \quad (26)$$

$$* \frac{\partial Q}{\partial t} = (2gI_0)^{0.5} \lambda_3^{-0.5} \frac{\partial B \partial h^{1.5}}{\partial t}; \quad (27)$$

$$* \frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho' g B_{3.6} I_n \frac{\partial v}{\partial t}; \quad (28)$$

$$* \frac{\partial h^{0.5}}{\partial t} = \Delta H_n. \quad (29)$$

де  $\zeta_3 = \zeta + 0,333\mu$  – загальна величина в'язкості субстрату.

Розрахункові рівняння (21-23) були уже отримані раніше для руслового потоку шляхом розв'язування рівнянь (1) разом з (3) [1], які по аналогії враховують дію масових сил стосовно віртуального стискання (деформації) заплавного потоку у бокових відсіках шляхом розповсюдження хвилі деформації за довжиною звужувального або розширювального відсіків.

Спочатку підставляємо рівняння (26) у (23), яке у диференційній формі має вигляд

$$\left[ \frac{\partial U'_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta_x \right) \right] \frac{dv}{dx} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} - \rho' g I_0 \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \frac{dQ}{dx} = 0; \quad (30)$$

В інтегральній формі дане рівняння виглядає наступним чином.

$$\int_0^{V_{0,p}} \left[ \frac{\partial U'_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta_x \right) \right] \frac{dv}{dx} + \int_0^{Q_{0,p}} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} - \rho' g I_0 \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \frac{dQ}{dx} = 0; \quad (31)$$

Після інтегрування, при меженних (крайових) умовах від 0 до  $V_{0,p}$ ,  $0/U'$ , і від 0 до  $Q_{0,p}$  з даного рівняння отримуємо наступний вираз:

$$-U'_{x,0,p} - V^2_{x,0,p} + 0,333\zeta_3 \delta_x V^3_{x,0,p} + \rho' g I_0 Q_{0,p} = 0.$$

Аналогічним чином виконуємо розв'язування рівнянь по координатах у і z, з яких маємо вирази

$$\begin{aligned} -U'_{y,0,p} - V^2_{y,0,p} + 0,333\zeta_3 \delta_y V^3_{y,0,p} - \omega_{0,p} + \rho' g I_0 Q_{0,p} &= 0; \\ -U'_{z,0,p} - V^2_{z,0,p} + 0,333\zeta_3 \delta_z V^3_{z,0,p} &= 0. \end{aligned}$$

З цих виразів отримуємо формули для визначення середнього гідравлічного поздовжнього похилу і прирощення площі живого перерізу потоку при стані динамічної рівноваги системи

$$I_{0,0,p} = \frac{U'_{x,0,p} + V^2_{x,0,p} - 0,333\zeta_3 \delta_x V^3_{x,0,p}}{\rho' g Q_{0,p}}; \quad (32)$$

$$\Delta \omega_{0,p} = \rho' g I_0 Q_{0,p} - U'_{y,0,p} - V^2_{y,0,p} + 0,333\zeta_3 \delta_y V^3_{y,0,p}; \quad (33)$$

Наступним кроком є підставлення рівняння (27) в (23), звідки отримуємо рівняння у диференційній формі наступного вигляду:

$$\left[ \frac{\partial U'_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta_x \right) \right] \frac{dv}{dx} + \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{dQ}{dx} - \frac{(2gI_0)^{0.5}}{\lambda_3^{0.5}} \frac{\partial B \partial h^{1.5}}{\partial t} \frac{dQ}{dx} = 0; \quad (34)$$

Після інтегрування, при меженних умовах від 0 до  $V_{\partial,p}$ ,  $0/U'$ , і від 0 до  $Q_{\partial,p}$  отримуємо вираз

$$-U'_{x,\partial,p} - V^2_{x,\partial,p} + 0,333\zeta_3 \delta_x V^3_{x,\partial,p} - Q_{\partial,p} = 0.$$

Аналогічним чином виконуємо розв'язування рівнянь по координатах  $y$  і  $z$ , з яких маємо вирази

$$\begin{aligned} -U'_{y,\partial,p} - V^2_{y,\partial,p} + 0,333\zeta_3 \delta_y V^3_{y,\partial,p} - Q_{\partial,p} + 1,77I_0^{0,5} \lambda_3^{-0,5} B h_{\partial,p}^{2,5} &= 0; \\ -U'_{z,\partial,p} - V^2_{z,\partial,p} + 0,333\zeta_3 \delta_z V^3_{z,\partial,p} + 1,77I_0^{0,5} \lambda_3^{-0,5} h_{\partial,p}^{2,5} &= 0. \end{aligned}$$

З другого виразу отримуємо формулу для визначення прирощення акумулятивної витрати води на ширині заплавної потоку на ділянках між двома поперечними перевалами та з третього виразу значення коефіцієнта гідравлічного тертя

$$\Delta Q_{\partial,p} = -U'_{x,\partial,p} - V^2_{x,\partial,p} + 0,333\zeta_3 \delta_x V^3_{x,\partial,p}. \quad (35)$$

$$\frac{1}{\lambda_3^{0,5}} = \frac{U'_{z,\partial,p} + V^2_{z,\partial,p} - 0,333\zeta_3 \delta_z V^3_{z,\partial,p}}{1,77I_0^{0,5} h_{\partial,p}^{2,5}}. \quad (36)$$

Наступним етапом вирішення цієї задачі є підстановка рівняння (28) в (23-25), які в інтегральній формі мають вигляд

$$\int_0^{V_{\partial,p}} \left[ \frac{\partial U'_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta_x \right) \right] \frac{dv}{dx} + \int_0^{V_{\partial,p}} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} - \rho' g B_{3,n} I_n \frac{\partial v}{\partial t} \right] \frac{dv}{dx} = 0; \quad (37)$$

$$\int_0^{V_{\partial,p}} \left[ \frac{\partial U'_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta_y \right) \right] \frac{dv}{dy} + \int_0^{V_{\partial,p}} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} - \rho' g B_{3,n} I_n \frac{\partial v}{\partial t} \right] \frac{dv}{dy} = 0; \quad (38)$$

$$\int_0^{V_{\partial,p}} \left[ \frac{\partial U'_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta_z \right) \right] \frac{dv}{dz} + \int_0^{V_{\partial,p}} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} - \rho' g B_{3,n} I_n \frac{\partial v}{\partial t} \right] \frac{dv}{dz} = 0. \quad (39)$$

В результаті інтегрування даних рівнянь у межах від 0 до  $V_{\partial,p}$ , отримуємо вирази

$$\begin{aligned} -U'_{x,3,n} - V^2_{x,3,n} + 0,333\zeta_3 \delta_x V^3_{x,3,n} + \rho' g B_{3,n} I_n V_{3,n} &= 0; \\ -U'_{y,3,n} - V^2_{y,3,n} + 0,333\zeta_3 \delta_y V^3_{y,3,n} - \omega_{3,n,\partial,p} + \rho' g B_{3,n} I_n V_{3,n} &= 0; \\ -U'_{z,3,n} - V^2_{z,3,n} + 0,333\zeta_3 \delta_z V^3_{z,3,n} &= 0. \end{aligned}$$

З другого виразу визначаємо поперечний похил потоку субстанції

$$I_{n,3,n,\partial,p} = \frac{U'_{y,3,n} + V^2_{y,3,n} - 0,333\zeta_3 \delta_y V^3_{y,3,n} + \Delta \omega_{3,n,\partial,p}}{\rho' g B_{3,n} V_{3,n,\partial,p}}. \quad (40)$$

Поздовжню стійкість поверхні заплави можна оцінити шляхом сумісного розв'язування рівнянь (29 і 23), які показані в інтегральному вигляді

$$\int_0^{Q_{\partial,p}} \left( \Delta H_n \frac{\partial B \partial h^{0,5}}{\partial t} - \rho' g I_0 \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \frac{dQ}{dx} = 0. \quad (41)$$

Після інтегрування у межах від 0 до  $Q_{з.п.б.в}$  отримуємо вираз

$$-0.667\Delta H_n B_{з.п.б.в} h^{1.5} + \rho'gI_0 Q_{з.п.б.в} = 0,$$

звідки визначаємо величину прирощення відмітки поверхні заплави через 1200 м у вигляді поперечного пологого валу (по аналогії з перекатами в руслі)

$$\Delta H_n = \frac{\rho'gI_0 Q_{з.п.б.в}}{0.667B_{з.п.б.в} h^{1.5}}. \quad (42)$$

Для визначення компонент швидкості течії розглянемо рівняння (23-25), які в інтегральній формі мають вигляд

$$\int_0^{V_{з.п.н}} \left[ \frac{\partial U'_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta_x \right) \right] dv = 0; \quad (43)$$

$$\int_0^{V_{з.п.н}} \left[ \frac{\partial U'_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta_y \right) \right] dv = 0; \quad (44)$$

$$\int_0^{V_{з.п.н}} \left[ \frac{\partial U'_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta_z \right) \right] dv = 0. \quad (45)$$

Після інтегрування першого рівняння, при меженних умовах від 0 до  $V_{з.п.б.в}$  і від 0 до  $U'$  отримуємо

$$-U'_{x.з.п.н} - V_{x.з.п.н}^2 + 0,333\zeta_3 \delta_x V_{x.з.п.н}^3 = 0.$$

Після спрощення даного виразу маємо

$$V_{x.з.п.н}^2 (0,333\zeta_3 \delta_x V_{x.з.п.н} - 1) - U'_{x.з.п.н} = 0,$$

з якого можна визначити компоненту швидкості потоку по координаті x

$$V_{x.з.п.б.в} = \frac{1}{0,333\zeta_3 \delta_x}. \quad (46)$$

Для двох інших компонент швидкості по координатах y і z отримуємо аналогічні формули

$$V_{y.з.п.б.в} = \frac{1}{0,333\zeta_3 \delta_y}; \quad (47)$$

$$V_{z.з.п.б.в} = \frac{1}{0,333\zeta_3 \delta_z}. \quad (48)$$

Таким чином, в результаті розв'язування системи рівнянь (23-29) були отримані розрахункові формули майже для всіх основних характеристик русло-заплавного потоку. Слід зауважити, що поставлена задача виконана для простої форми русло-заплавного комплексу, тобто коли бровки русла знаходяться майже на однакових відмітках. Там де в розрахункових формулах зустрічається коефіцієнт гідравлічного тертя  $\lambda_3$ , то для заплавного потоку його необхідно визначати як арифметичну суму ймовірно багатьох складових, які можуть бути пов'язані з



впливом зовнішніх і внутрішніх сил та елементів природного й антропогенного походження. Наприклад, наявність на території заплави будівель, кавальєрів ґрунту, транспортних комунікацій, опор ЛЕП, дамб обвалування, захисно-регульовальних споруд типу напівзагат тощо.

**Аналітичне розв'язування системи рівнянь для оцінки деформацій поверхні заплави.** З метою вирішення поставленої задачі відібрано наступні чотири рівняння:

$$\frac{\partial U'_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta_x \right) = 0; \quad (49)$$

$$\frac{\partial U'_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta_y \right) = 0; \quad (50)$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial z} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta_z \right) = 0. \quad (51)$$

$$* \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t} \pm \frac{\partial q_s}{\partial t}. \quad (52)$$

Шляхом підставлення рівняння (52) в (49-51) отримуємо наступні рівняння в інтегральній формі:

$$\int_0^{V_{3,n}} \left[ \frac{\partial U'_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta_x \right) \right] dv + \int_0^{Q_{3,n}} \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{dQ}{dx} - \int_0^{h_{3,n}} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dh}{dx} - \int_0^{B_{3,n}} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{dB}{dx} \mp \int_0^{q_{3,n}} \frac{\partial q_s}{\partial t} \frac{dq}{dx} = 0; \quad (53)$$

$$\int_0^{V_{3,n}} \left[ \frac{\partial U'_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta_y \right) \right] dv + \int_0^{Q_{3,n}} \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{dQ}{dy} - \int_0^{h_{3,n}} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dh}{dy} - \int_0^{B_{3,n}} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{dB}{dy} \mp \int_0^{q_{3,n}} \frac{\partial q}{\partial t} \frac{dq}{dy} = 0; \quad (54)$$

$$\int_0^{V_{3,n}} \left[ \frac{\partial U'_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \zeta_3 \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta_z \right) \right] dv + \int_0^{Q_{3,n}} \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{dQ}{dz} - \int_0^{h_{3,n}} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dh}{dz} - \int_0^{B_{3,n}} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{dB}{dz} \mp \int_0^{q_{3,n}} \frac{\partial q_s}{\partial t} \frac{dq}{dz} = 0. \quad (55)$$

Після інтегрування даних рівнянь при меженних умовах від 0 до  $V_{3,n}$ ,  $0/U'$ ,  $0/Q_{3,n}$ ,  $0/h_{3,n}$ ,  $0/B_{3,n}$  і від 0 до  $q_{3,n}$  отримуємо вирази

$$\begin{aligned} -U'_{3,n,x} - V^2_{3,n,x} + 0,333\zeta_3 \delta_x V^3_{3,n,x} - Q_{3,n} \pm q_{3,n,x} &= 0; \\ -U'_{3,n,y} - V^2_{3,n,y} + 0,333\zeta_3 \delta_x V^3_{3,n,y} - Q_{3,n} + h_{3,n} + B_{3,n} \pm q_{3,n,y} &= 0; \\ -U'_{3,n,z} - V^2_{3,n,z} + 0,333\zeta_3 \delta_x V^3_{3,n,z} + h_{3,n} \pm q_{3,n,z} &= 0, \end{aligned}$$

з яких можна визначити витрату транзитних наносів і витрату поперечного переносу на криволінійних ділянках долини за наступними формулами:

$$\pm q_{3,n,\delta,x} = U'_{3,n,x} + V^2_{3,n,x} - 0,333\zeta_3 \delta_x V^3_{3,n,x} + Q_{3,n}; \quad (56)$$

$$\pm q_{3,n,\delta,y} = U'_{3,n,y} + V^2_{3,n,y} - 0,333\zeta_3 \delta_x V^3_{3,n,y} + Q_{3,n} - h_{3,n} - B_{3,n}; \quad (57)$$

$$\pm q_{3,n,\delta,z} = U'_{3,n,z} + V^2_{3,n,z} - 0,333\zeta_3 \delta_x V^3_{3,n,z} - h_{3,n}; \quad (58)$$

Загальна величина витрати транспортувальних наносів визначається арифметичною сумою компонент

$$G_{z.n.б.в} = q_{z.n.x} + q_{z.n.y} + q_{z.n.z} \quad (59)$$

**Оцінка розрахункових характеристик.** Виконуємо диференціювання та інтегрування рівнянь (10 -12) у межах від 0 до  $h_{z.n.б.в.д}$  в результаті чого отримуємо вирази для визначення характеристик переміщення структурних елементів субстрату системи

$$\begin{aligned} -0,667\delta_{x\partial,p}^{1,5} + \Delta h h_{\partial,p} &= 0; \\ -0,333\delta_{y\partial,p}^3 + 0,5(S_{x,\partial} / 2\pi h)h_{\partial,p} &= 0; \\ -0,333\delta_{z\partial,p}^3 + 0,5\Delta H_n(S_{x,\partial} 2\pi h)h_{\partial,p} &= 0. \end{aligned}$$

Наведені вирази дозволяють визначити величини переміщення елементарних об'ємів субстрату за наступними формулами:

$$\delta_{x\partial,p} = (1,5\Delta h h_{\partial,p})^{0,667}; \quad (60)$$

$$\delta_{y\partial,p} = (1,5(S_{x,\partial} / 2\pi h)h_{\partial,p})^{0,333}; \quad (61)$$

$$\delta_{z\partial,p} = [1,5\Delta H_n(S_{x,\partial} 2\pi h)h_{\partial,p}]^{0,333}. \quad (62)$$

Для визначення “другої” (об’ємної) в’язкості водного потоку, яка придбана після його стискання, рекомендується скористатися емпіричною залежністю, яка наведена в монографії Л. Седова [4, с. 327]

$$\zeta_3 = \zeta + \frac{1}{3}\mu = \lambda_0 + \frac{2}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu = \lambda_0 + \mu. \quad (63)$$

де  $\lambda_0$  – коефіцієнт Ламе, який залежить від модуля пружності рідини або твердого тіла і моменту інерції у поперечному вимірі, що визначає жорсткість об’єкта  $EI$ . Сила стискання (градієнт тиску) водного потоку у межах русла викликає стоячу хвилю у вертикальній площині і зміщення мезовирів під впливом поперечного градієнту тиску в горизонтальній площині по синусоїдальній траєкторії у межах русло-заплавного комплексу. Залежність  $\zeta$  від  $\lambda_0$  для заплавного потоку в бокових відсіках можна виразити через висоту хвилі деформації  $h_{x,\partial} = 2\pi h$ , що відповідає коливанням моделі тонкої гнучкої плити на пружній основі і яка буде використана при визначенні основних характеристик заплавного потоку і його придонної області

$$\zeta_3 = 2\pi h + \mu. \quad (64)$$

де  $h$  – середня глибина заплавного потоку.

**Аналітичне розв’язування системи рівнянь для оцінки характеристик придонної області.** Управлінським параметром у придонній області заплавного потоку виступає градієнт тиску, який періодично змінюється ( $\pm$ ) між заплавним і підземним фільтраційним потоками. Такий стан придонної області відповідає динамічній рівновазі системи «заплавний потік – придонна область – ґрунтовий потік» в цілому

Для вирішення поставленої задачі відбираються два із наведених вище основних рівнянь

$$* \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} = -(\bar{v}' \nabla) \bar{v}' + \nu \Delta \bar{v}' - \frac{1}{\rho'} \nabla p + \zeta_{\Delta} \delta_{\Delta} \nabla \operatorname{div} h ; \quad (65)$$

$$* \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} = -(\bar{v}' \nabla) \bar{v}' - \frac{1}{\rho'} \nabla p \quad (66)$$

Розкриті рівняння (65) разом з розкритим (66) у трьохвимірному просторі мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U'_x}{\partial t} = & -U'_x \frac{\partial U'_x}{\partial x} - U'_y \frac{\partial U'_x}{\partial y} - U'_z \frac{\partial U'_x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \left( \frac{\partial U'_x}{\partial x} + \frac{\partial U'_y}{\partial x} - \frac{2}{3} \delta_{x,\Delta} \frac{\partial U'_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta_{3,\delta,\Delta} \delta_{x,\Delta} \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p_x}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial U'_x}{\partial t} + U'_x \frac{\partial U'_x}{\partial x} + U'_y \frac{\partial U'_x}{\partial y} + U'_z \frac{\partial U'_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U'_y}{\partial t} = & -U'_x \frac{\partial U'_y}{\partial x} - U'_y \frac{\partial U'_y}{\partial y} - U'_z \frac{\partial U'_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \left( \frac{\partial U'_y}{\partial y} + \frac{\partial U'_z}{\partial y} - \frac{2}{3} \delta_{y,\Delta} \frac{\partial U'_y}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta_{3,\delta,\Delta} \delta_{y,\Delta} \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p_y}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial U'_y}{\partial t} + U'_x \frac{\partial U'_y}{\partial x} + \rho U'_y \frac{\partial U'_y}{\partial y} + U'_z \frac{\partial U'_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U'_z}{\partial t} = & -U'_x \frac{\partial U'_z}{\partial x} - U'_y \frac{\partial U'_z}{\partial y} - U'_z \frac{\partial U'_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \left( \frac{\partial U'_z}{\partial z} + \frac{\partial U'_x}{\partial z} - \frac{2}{3} \delta_{z,\Delta} \frac{\partial U'_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \zeta_{3,\delta,\Delta} \delta_{z,\Delta} \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p_z}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial U'_z}{\partial t} + U'_x \frac{\partial U'_z}{\partial x} + U'_y \frac{\partial U'_z}{\partial y} + U'_z \frac{\partial U'_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (69)$$

Рівняння (66) включено у дану систему з метою стабілізації рівня турбулентності у придонній області, який залежить від зміни тиску. Після відповідних скорочень отримуємо наступні розрахункові рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \left( \frac{\partial U'_x}{\partial x} + \frac{\partial U'_y}{\partial x} - \frac{2}{3} \delta_{\Delta,x} \frac{\partial U'_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta_{3,\delta,\Delta} \frac{\partial h}{\partial x} \delta_{\Delta,x} \right) = 0 ; \quad (70)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \left( \frac{\partial U'_y}{\partial y} + \frac{\partial U'_z}{\partial y} - \frac{2}{3} \delta_{\Delta,y} \frac{\partial U'_y}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta_{3,\delta,\Delta} \frac{\partial h}{\partial y} \delta_{\Delta,y} \right) = 0 ; \quad (71)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \left( \frac{\partial U'_z}{\partial z} + \frac{\partial U'_x}{\partial z} - \frac{2}{3} \delta_{\Delta,z} \frac{\partial U'_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \zeta_{3,\delta,\Delta} \frac{\partial h}{\partial z} \delta_{\Delta,z} \right) = 0 . \quad (72)$$

Отримані рівняння представляють однорідну стаціонарну систему.

Після диференціювання і інтегрування даних рівнянь, при межених умовах від 0 до  $U'_{\Delta,\delta,p}$  і від 0 до  $h_{\delta,p}$  отримуємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} -0,333 \cdot \nu U'^3_{\Delta,x,\delta,p} + 0,222 \cdot \nu \delta_{\Delta,x} U'^3_{\Delta,x,\delta,p} - 0,333 \cdot \zeta_{3,\delta,\Delta} \delta_{\Delta,x} h^3_{\Delta,x,\delta,p} &= 0 ; \\ -0,333 \cdot \nu U'^3_{\Delta,y,\delta,p} + 0,222 \cdot \nu \delta_{\Delta,y} U'^3_{\Delta,y,\delta,p} - 0,333 \cdot \zeta_{3,\delta,\Delta} \delta_{\Delta,y} h^3_{\Delta,y,\delta,p} &= 0 ; \\ -0,333 \cdot \nu U'^3_{\Delta,z,\delta,p} + 0,222 \cdot \nu \delta_{\Delta,z} U'^3_{\Delta,z,\delta,p} - 0,333 \cdot \zeta_{3,\delta,\Delta} \delta_{\Delta,z} h^3_{\Delta,z,\delta,p} &= 0 . \end{aligned}$$

З цих виразів отримані наступні розрахункові формули для визначення величин пульсації субстрату в координатах  $x$ ,  $y$  і  $z$ .

$$U'_{\Delta.x.\partial.p} = \left( \frac{0,333.\zeta_{3.6.\Delta} \delta_{x.\Delta} h^3_{\partial.p}}{0,333.v - 0,222.v\delta_{x.\Delta}} \right)^{0,333}; \quad (73)$$

$$U'_{\Delta.y.\partial.p} = \left( \frac{0,333.\zeta_{3.6.\Delta} \delta_{y.\Delta} h^3_{\partial.p}}{0,333.v - 0,222.v\delta_{y.\Delta}} \right)^{0,333}. \quad (74)$$

$$U'_{\Delta.z.\partial.p} = \left( \frac{0,333.\zeta_{3.6.\Delta} \delta_{z.\Delta} h^3_{\partial.p}}{0,333.v - 0,222.v\delta_{z.\Delta}} \right)^{0,333}. \quad (75)$$

де  $\zeta_{3.6.\Delta} = \zeta_{3.3.6} + 0,333v = 2\pi h + \mu + 0,333v$  – загальна в'язкість субстрату у придонній області заплавного потоку;  $\delta_{\Delta.x}$ ,  $\delta_{\Delta.y}$  і  $\delta_{\Delta.z}$  - відповідно товщина придонної області по координатах  $x$ ,  $y$  і  $z$ , яку рекомендується назначати домірною подвоєній висоті виступів абсолютної шорсткості поверхні заплави  $2\Delta_{сер.36}$ . Товщина придонної області потоку  $\delta_{\Delta}$  може бути як досить малою, так і значною в залежності від рельєфу поверхні заплави, сформованого під впливом природних і антропогенних чинників,

Аналізуючи наведені вище формули (73-75) видно, що при дії хвилі деформації від навантаження водних мас у придонній області потоку інтенсивність пульсації субстрату різко збільшується у порівнянні з відсутністю дії такої сили. Цей аргумент є досить сильним стосовно забезпечення природного стану русло-заплавного комплексу річок і недопущення на них будь-якого спрямлення звивин (меандр) та порушення поверхні заплави. Оскільки при цьому буде спостерігатись значний транзит наносів на нижні ділянки річки (порушуватись динамічна рівноваги системи). Як видно з формул (73-75) швидкість пульсації однозначно залежить від глибини як руслового, так і заплавного потоків.

Для визначення компонент тиску у придонній області можемо використати рівняння (65), яке наведене у розкритому вигляді

$$\frac{\partial U'_x}{\partial t} = -U'_x \frac{\partial U'_x}{\partial x} - U'_y \frac{\partial U'_x}{\partial y} - U'_z \frac{\partial U'_x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ v \left( \frac{\partial U'_x}{\partial x} + \frac{\partial U'_y}{\partial x} - \frac{2}{3} \delta_{x.\Delta} \frac{\partial U'_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta_{3.6.\Delta} \frac{\partial h}{\partial x} \delta_{\Delta.x} \right) - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p_x}{\partial x}; \quad (76)$$

$$\frac{\partial U'_y}{\partial t} = -U'_x \frac{\partial U'_y}{\partial x} - U'_y \frac{\partial U'_y}{\partial y} - U'_z \frac{\partial U'_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ v \left( \frac{\partial U'_y}{\partial y} + \frac{\partial U'_z}{\partial y} - \frac{2}{3} \delta_{y.\Delta} \frac{\partial U'_y}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( \zeta_{3.6.\Delta} \frac{\partial h}{\partial y} \delta_{\Delta.y} \right) - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p_y}{\partial y}; \quad (77)$$

$$\frac{\partial U'_z}{\partial t} = -U'_x \frac{\partial U'_z}{\partial x} - U'_y \frac{\partial U'_z}{\partial y} - U'_z \frac{\partial U'_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ v \left( \frac{\partial U'_z}{\partial z} + \frac{\partial U'_x}{\partial z} - \frac{2}{3} \delta_{z.\Delta} \frac{\partial U'_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \zeta_{3.6.\Delta} \frac{\partial h}{\partial z} \delta_{\Delta.z} \right) - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p_z}{\partial z}. \quad (78)$$

які після диференціювання і інтегрування у межах від 0 до  $U'_{\partial.p}$ ,  $0/\rho_{\partial.p}$  і від 0 до  $h_{\partial.p}$  та при початковій умові збереження стану динамічної рівноваги системи  $\partial U'/\partial t|_{t \rightarrow 0}$  дають наступні вирази:

$$U'^2_{\Delta.x.\partial.p} - 0,333..vU'^3_{\Delta.x.\partial.p} + 0,222..v.\delta_{x.\Delta} U'^3_{\Delta.x.\partial.p} + (1/\rho')p_{x.\partial.p} - 0,333.\zeta_{3.3.6.\Delta} \delta_{x.\Delta} h^3_{\partial.p} = 0;$$

$$U'^2_{\Delta.y.\partial.p} - 0,333..vU'^3_{\Delta.y.\partial.p} + 0,222..v.\delta_{y.\Delta} U'^3_{\Delta.y.\partial.p} + (1/\rho')p_{y.\partial.p} - 0,333.\zeta_{3.3.6.\Delta} \delta_{y.\Delta} h^3_{\partial.p} = 0;$$

$$U'^2_{\Delta.z.\partial.p} - 0,333..vU'^3_{\Delta.z.\partial.p} + 0,222..v.\delta_{z.\Delta} U'^3_{\Delta.z.\partial.p} + (1/\rho')p_{z.\partial.p} - 0,333.\zeta_{3.3.6.\Delta} \delta_{z.\Delta} h^3_{\partial.p} = 0,$$

з яких отримуємо розрахункові формули

$$P_{\Delta.x.\delta.p} = (0,333 \cdot \nu U'^3_{\Delta.x.\delta.p} - U'^2_{\Delta.x.\delta.p} - 0,222 \cdot \nu \cdot \delta_{x,\Delta} U'^3_{\Delta.x.\delta.p} + 0,333 \cdot \zeta_{з.з.б.б.\Delta} \delta_{x,\Delta} h^3_{\delta.p}) \rho'; \quad (79)$$

$$P_{\Delta.y.\delta.p} = (0,333 \cdot \nu U'^3_{\Delta.y.\delta.p} - U'^2_{\Delta.y.\delta.p} - 0,222 \cdot \nu \cdot \delta_{y,\Delta} U'^3_{\Delta.y.\delta.p} + 0,333 \cdot \zeta_{з.з.б.б.\Delta} \delta_{y,\Delta} h^3_{\delta.p}) \rho'; \quad (80)$$

$$P_{\Delta.z.\delta.p} = (0,333 \cdot \nu U'^3_{\Delta.z.\delta.p} - U'^2_{\Delta.z.\delta.p} - 0,222 \cdot \nu \cdot \delta_{z,\Delta} U'^3_{\Delta.z.\delta.p} - 0,333 \cdot \zeta_{з.з.б.б.\Delta} \delta_{z,\Delta} h_{\delta.p}) \rho'. \quad (81)$$

**Приклад розрахунку основних характеристик заплавного потоку для гідрологічного поста Сірет– м. Сторожинець.** Вихідні дані для розрахунків. Для розв'язування системи рівнянь Нав'є – Стокса достатньо мати вихідну інформацію у наступному складі: профіль русло-заплавного комплексу на розрахунковій ділянці; характеристики шорсткості поверхні заплави, які необхідні для визначення  $\lambda_{з.зап}$ ,  $\delta_{\Delta,x}$ ,  $\delta_{\Delta,y}$  і  $\delta_{\Delta,z}$ ; значення поверхневих швидкостей в русловому потоці; ширину заплави по берегах річки; топографічну зйомку масштабу 1 : 200; середня ширина заплави з правого берега річки сягає  $B_n = 800$  м на довжині ділянки  $l_n = 10$  км, поверхня рівна, подекуди зустрічаються дерева і кущі, з луговою низькою рослинністю, абсолютну висоту виступів шорсткості поверхні можна прийняти рівною  $\Delta_{сер} = 0,18$  м. Середня ширина лівої заплави  $B_n = 400$  м з аналогічною шорсткістю поверхні. Середня ширина русла річки між бровками  $B_b = 45$  м. Бровки русла на однаковій висоті. Середня глибина затоплення русло-заплавного комплексу  $h_{сер} = 0,5$  м (у межах прояву динаміко-кінематичного ефекту). Поздовжній похил заплави  $l_{0,з} = 0,0013$ . Середня поверхнева швидкість руслового потоку біля бровок  $V_{пов.р.п.б} = 0,20$  м. Середні поверхневі швидкості руслового потоку через 7,5 м відповідно дорівнюють – 0,20, 1,40, 2,00, (2,20), 2,00, 1,40, 0,20 (м/с) [1]. Висота берегових валів домірна  $h_{вал} = 0,15$  м. Слід зауважити, що відсіки періодично відділяються між собою мезовирами, які формуються ланцюгами вздовж ввігнутих берегів.

**Розрахунок основних характеристик для центрального відсіку.** Початкова умова  $V_{дон.з.п.х} = V_{пов.р.п.х}$  (згідно розподілу поверхневих швидкостей руслового потоку по ширині русла в бровках),  $V_{нов.з.п.х} = V_{нов.р.п.х}$  (згідно цієї формули у центральному відсіку при симетричному поперечному перерізі потоку маємо ламінарний режим та відповідно тотожність гідравлічних похилів). Середня глибина потоку у центральному відсіку  $h_{сер} = 0,50$  м (глибина потоку приймається домірною вихідним даним). Витрата води в центральному відсіку русло-заплавного потоку складає

$$Q_{р-з.ц.в} = \sum_{i=1}^{n=6} q = 45 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Основні розрахункові характеристики: коефіцієнт динамічної в'язкості  $\mu = 0,131$  кг/м·с; коефіцієнт кінематичної в'язкості (відповідає середній температурі води 10°C )  $\nu = 131$  м<sup>2</sup>/с; віртуальна густина субстрату  $\rho' = 1050$  кг/м<sup>3</sup> (відповідають середній температурі води 10°C ) та висота хвилі деформації  $h_{х.д} = 2\pi h = 3,14$  м; за цими даними  $\zeta_{з.з.п.б.в} = 3,14 + 0,131 = 3,27$  кг/м·с.

**Розрахунок основних характеристик для лівого відсіку заплавного потоку** На першому етапі розрахунків визначаємо витрату води за формулою Шезі - Манінга  $Q = 153$  м<sup>3</sup>/с (при коефіцієнті шорсткості поверхні заплави  $n_з = 0,03$ ,  $C = 30$  і  $l_0 = 0,0013$ ). Середня швидкість при цій витраті води дорівнює  $V_{сер} = 0,765$  м/с. Спершу визначаємо  $\Delta H_n$  за формулою (42), що відповідно дорівнює  $\Delta H_n = 0,0022$  м. Приймаємо  $\Delta h = 6,40$  м, при цьому маємо наступні значення переміщення субстрату:  $\delta_x = 1,37$  м,  $\delta_y = 6,58$  м, і  $\delta_z = 2,69$  м. Наступним етапом є визначення

компонент швидкості переміщення субстрату -  $V_x = 0,67$  м/с,  $V_y = 0,14$  м/с,  $V_z = 0,34$  м/с. На основі цих даних середня швидкість течії  $V_{сер} = 0,764$  м/с. При такому значенні середньої швидкості потоку витрата води для лівого відсіку заплави складає  $Q = 153$  м<sup>3</sup>/с. Компоненти середньої швидкості пульсації у придонній області заплавного потоку за розрахунками складають -  $U'_{x,\Delta} = U'_{y,\Delta} = U'_{z,\Delta} = 0,17$  м/с (при  $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0,1$  м),  $U'_{сер} = 0,29$  м/с. Дані компоненти обраховані при загальній в'язкості субстрату у придонній області  $\zeta_{зз.в.\Delta} = \zeta_{з.з.п.б.в} + 0,333v = 3,27 + 46,89 = 50$  кг/м·с. Компоненти тиску у придонній області -  $\rho_{x\Delta} = \rho_{y\Delta} = \rho_{z\Delta} = 0,41$  кгс/м<sup>2</sup>,  $\rho_{\Deltaз.п} = 0,71$  кгс/м<sup>2</sup>, або 0,0007 Па.

За допомогою обчислених вище характеристик можна знайти решту основних, які для лівого відсіку заплави складають: -  $I_0 = 0,001$ . Потім визначаємо за новими даними поздовжнього похилу можливу висоту поперечного перевалу  $\Delta H_n = 0,0018$  м. При цій величині  $\Delta H_n$  необхідне коректування деяких даних. Нове значення  $\delta_z = 2,51$  м дає нам  $V_z = 0,36$  м/с,  $V_{сер} = 0,77$  м/с,  $Q = 155$  м<sup>3</sup>/с,  $\lambda = 0,0034$ ,  $\Delta Q = 0$  м<sup>3</sup>/с,  $\Delta \omega_{\partial.p} = 0$  м<sup>2</sup>,  $I_n = 0,00052$ . Витрата транспортувальних наносів у лівому відсіку заплавного потоку складає -  $G_{\partial.p.n.z} = q_{x.\partial.p} + q_{y.\partial.p} + q_{z.\partial.p} = 155 - 245,33 - 0,33 = - 90,66$  кг/с. Таким чином, транзит наносів з меж лівого відсіку відсутній і лише зможе спостерігатись процес значної акумуляції наносів.

*Розрахунок основних характеристик для правого відсіку заплавного потоку.* Витрата води в цьому відсіку за формулою Шезі-Манінга  $Q = 306$  м<sup>3</sup>/с (при коефіцієнті шорсткості поверхні заплави  $n_3 = 0,03$ ,  $C = 30$  і  $I_0 = 0,0013$ ). Середня швидкість при цій витраті води дорівнює  $V_{сер} = 0,765$  м/с. По аналогії з розрахунками характеристик лівого відсіку заплави визначаємо  $\Delta H_n$  за формулою (42), що відповідно дорівнює  $\Delta H_n = 0,0044$  м. Приймаємо  $\Delta h = 2,96$  м, при цьому маємо наступні значення переміщення субстрату:  $\delta_x = 1,30$  м,  $\delta_y = 6,58$  м, і  $\delta_z = 3,38$  м. Наступним етапом є визначення компонент швидкості переміщення субстрату -  $V_x$ .

$V_x = 0,70$  м/с,  $V_y = 0,14$  м/с,  $V_z = 0,27$  м/с. На основі цих даних середня швидкість течії  $V_{сер} = 0,763$  м/с. При такому значенні середньої швидкості потоку витрата води для правого відсіку заплави складає  $Q = 305$  м<sup>3</sup>/с. Компоненти середньої швидкості пульсації у придонній області заплавного потоку за розрахунками складають -  $U'_{x,\Delta} = U'_{y,\Delta} = U'_{z,\Delta} = 0,17$  м/с (при  $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0,1$  м),  $U'_{сер} = 0,29$  м/с. Дані компоненти обраховані при загальній в'язкості субстрату у придонній області  $\zeta_{зз.в.\Delta} = \zeta_{з.з.п.б.в} + 0,333v = 3,27 + 46,89 = 50$  кг/м·с. Компоненти тиску у придонній області -  $\rho_{x\Delta} = \rho_{y\Delta} = \rho_{z\Delta} = 0,41$  кгс/м<sup>2</sup>,  $\rho_{\Deltaз.п} = 0,71$  кгс/м<sup>2</sup>, або 0,0007 Па.

За допомогою обчислених вище характеристик можна знайти решту основних, які для правого відсіку заплави складають: -  $I_0 = 0,00053$ . Потім визначаємо за новими даними поздовжнього похилу можливу висоту поперечного перевалу  $\Delta H_n = 0,0018$  м. При цій величині необхідна корегування деяких даних. Нове значення  $\delta_z = 2,51$  м дає нам  $V_z = 0,366$  м/с,  $V_{сер} = 0,80$  м/с,  $Q = 321$  м<sup>3</sup>/с,  $\lambda = 0,0018$ ,  $\Delta Q = 0$  м<sup>3</sup>/с,  $\Delta \omega_{\partial.p} = 0$  м<sup>2</sup>,  $Q_{п.з} = 302,25 + 130 = 432,25$  м<sup>3</sup>/с,  $I_n = 0,00025$ . Витрата транспортувальних наносів у правому відсіку заплавного потоку складає -  $G_{\partial.p.n.z} = q_{x.\partial.p} + q_{y.\partial.p} + q_{z.\partial.p} = 321 - 479,33 - 0,33 = - 158,66$  кг/с. Таким чином, транзит наносів з меж даного відсіку відсутній і лише зможе спостерігатись процес значної акумуляції наносів.

Загальна витрата води заплавного потоку домірна  $Q_{з.п} = 155 + 45 + 321 = 521$  м<sup>3</sup>/с.

**Висновки.** Викладені матеріали стосовно розв'язування наведеної вище системи рівнянь Нав'є – Стокса і прикладу розрахунку основних характеристик заплавного потоку дають можливість сформулювати наступні науково-методичні положення:

1. Кінематика заплавного потоку в центральному відсіку, розміщеного над поверхнею руслового потоку, наближена за характером течії до ламінарного режиму.

2. Кінематика заплавного потоку в бокових відсіках характеризується плоскою задачею, де течія підпорядкована прояву динаміко-кінематичного ефекту, який додатково збуджує субстрат потоку вировими структурами руслового походження. Значна акумулятивна прибавка витрат води у бокових відсіках на довжині ділянок між двома поперечними пологими перевалами пов'язана з впливом періодичних коливань потоку. На фоні резонансу частоти коливань відміток перевалів і частоти коливань пульсації субстрату у придонній області потоку по поверхні заплави між перевалами, в умовах стаціонарного гідравлічного режиму, відбувається періодична вертикальна або поперечно-вертикальна динаміка водних мас суцільного середовища.

3. Русловий потік при витратах води і транспортувальних наносів вищих від руслоформуєвальних значень розвантажується в боки долини і таким чином формуються тераси (при проходженні катастрофічних паводків).

#### Список літератури

1. *Онищук В.В.* Розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса для оцінки динамічної рівноваги системи «потік-русло» /В.В. Онищук // Гідрологія, гідрохімія і гідроекологія 6 Наук. Збірник / Гол. Редактор В.К. Хільчевський. - К.: ВГП Обрії, 2016.- Т.4(43). - С. 6-24. 2. *Темам Р.* Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ /Р. Темам. – 2-е изд. М.: Мир, 1981. – 408 с. 3. Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02 / В.М. Трушевський; НАН України. Ін-т приклад. проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України. — Львів, 2004. — 16 с. 4. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды /Л.И. Седов.-Т.1. - М. Наука, 1983.- 528с. 5. *Дмитревский В.И.* Гидромеханика /В.И. Дмитревский. – М.: Изд-во «Морской транспорт», 1962. – 296 с. 6. *Войткунский Я.И.* Фаддеев Ю.И., Федяевский К.К. Гидромеханика. Учебник. – 2-е изд., перераб. и доп./я.и. Войткунский, Ю.И. Фаддеев, К.К. Федяевский. – Л.: Судостроение, 1982. – 456 с.

#### Розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса для оцінки гідроморфологічного стану русло-заплавного комплексу

**Онищук В. В.**

*На основі аналітичного розв'язування замкненої системи рівнянь Нав'є-Стокса виконана оцінка гідроморфологічного стану русло- заплавного комплексу. Для рівняння руху течії запропоновано додаткове рівняння, яке стабілізує досягнутий рівень турбулентності заплавного потоку. Аналогічна процедура запропонована для оцінки характеристик придонної області. За допомогою системи з тринадцяти рівнянь оцінені основні характеристики поздовжньої стійкості потоку, розвитку деформацій з оцінкою транспортувальної здатності водотоку та придонної області заплавного потоку. За отриманими розрахунковими формулами оцінено гідроморфологічний стан ділянки мандруючої річки в районі гідрологічного поста Сірет – Сторожинець (Чернівецька область). Установлено, що гідродинамічний тиск субстрату у придонній області наближений до помірного вакууму у порівнянні з русловим потоком, що вказує на наявність нейтрального шару між двома енергетичними потоками з різко відмінними потенціалами. На межі руслового і підруслового (фільтраційного) потоків має місце динамічна рівновага взаємного масообміну між водою і повітрям у вигляді продукування мікрівирів і антимікрівирів на фоні дії ефекту ежекції.*

**Ключові слова:** гідродинамічна система «потік-русло-заплава», рівняння Нав'є-Стокса, “заморожена” турбулентність, планові деформації поверхні заплави, гідроморфологічний стан русло-заплавного комплексу.

## **Решение системы уравнений Навье - Стокса для оценки гидроморфологического состояния русло-пойменного комплекса**

**Онищук В. В.**

На основе аналитического решения замкнутой системы уравнений Навье-Стокса выполнена оценка гидроморфологического состояния русло- пойменного комплекса. Для уравнения движения течения предложено дополнительное уравнение, которое стабилизирует достигнутый уровень турбулентности пойменного потока. Аналогичная процедура предложена для оценки характеристик придонной области. С помощью системы из тринадцати уравнений оценены основные характеристики продольной устойчивости потока, развития деформаций с оценкой транспортировочной способности водотока и придонной области пойменного потока. По полученным расчетным формулам дана оценка гидроморфологического состояния участка меандрирующей реки в районе гидрологического поста Сирет - Сторожинец (Черновицкая область). Установлено, что гидродинамическое давление субстрата в придонной области приближенно к умеренному вакуума по сравнению с русловым потоком, что указывает на наличие нейтрального слоя между двумя энергетическими потоками с резко отличными потенциалами. На границе руслового и подруслового (фильтрационного) потоков имеет место динамическое равновесие взаимного массообмена между водой и воздухом в виде выработки микровихорев и антимикровихорев на фоне действия эффекта эжекции в обоих направлениях.

**Ключевые слова:** гидродинамическая система «поток-русло-пойма», уравнения Навье-Стокса, "замороженная" турбулентность, плановые деформации поверхности поймы, гидроморфологическое состояние русло-пойменного комплекса.

## **Solving the system of Navier-Stokes equations for estimation of hydromorphological state flood - channel complex**

**Onischuk V.**

Based on the analytical solution of closed system of Navier-Stokes equations the estimation hydromorphological condition flood - channel complex. For the equations of motion of the current proposed additional equation, which stabilizes the current level of turbulence flood flow. The same procedure proposed for assessing the characteristics of the bottom area. With the system of thirteen equations estimated basic characteristics of longitudinal stability of the flow of strains with an estimate of shipping capacity of the watercourse and the bottom field flood flow. According to the calculation formula assessed hydromorphological state area traveling near the river Surety hydrological post - Storozhynets (Chernivtsi region). Established that the hydrodynamic pressure in the bottom substrate area close to the vacuum moderate compared to the flow channel, which indicates the presence of a neutral layer between two energy flows dramatically different potentials. At the edge of the channel and filtration flows is a dynamic equilibrium relative mass exchange between water and air in the form of production microeddy and antimicroeddy and action against the background effect ejection. Kinematics flood flow in the central compartment located above the flow channel, close to the nature of laminar flow regime. Kinematics flood flow in the side compartments characterized by a flat object, which is subject to the current manifestation of the dynamical-kinematic effects, further divided the substrate flow channel structures Whirlpool origin. Much accumulative increase of water flow in the lateral compartment on the length of the two transverse flat passes linked to the influence of periodic oscillations of flow. Against the background of the resonance frequency of oscillation marks passes and oscillation frequency ripple in the bottom area of the substrate onto the surface of the floodplain between passes in a residential hydraulic regime is periodic vertical or transverse vertical dynamics of water masses continuum. The flow channel at a cost of shipping water and sediment from the higher values channel bed water flow channels unloaded in the sides of the valley, thus forming terraces (the passage of catastrophic floods)

**Keywords:** hydrodynamic system of "flow-channel-floodplain" Navier-Stokes equations, "frozen" turbulence, planned floodplain surface deformation hydromorphological condition of channel-floodplain complex.

**Надійшла до редколегії 02.02.2017**