

## ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЦЕНТРОЇД НЕКРУГЛИХ ЗУБЧАСТИХ КОЛІС ЗА ПЕРЕДАВАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ

*Проведено огляд застосувань механізмів з некруглими зубчастими колесами. Описано вхідні параметри, необхідні для розрахунку пари центроїд. Побудовано геометричні моделі центроїд некруглих зубчастих коліс на основі їх аналітичного опису за передавальною функцією. Наведено приклади зображень пари центроїд зубчастих коліс «нетрадиційної» форми залежно від вигляду передавальної функції.*

*Ключові слова: геометричне моделювання, зубчасті колеса, аналітичний опис, передавальна функція, центроїди.*

У різних галузях машинобудування для передачі обертового руху між паралельними осями зі змінним відношенням кутових швидкостей використовуються механізми з некруглими зубчастими колесами. За допомогою нескладного механізму з некруглими колесами можна відтворити монотонну зростаючу функцію, похідна якої на проміжку відтворення є гладкою функцією з обмеженими додатними значеннями [1].

У машинобудуванні некруглі зубчасті колеса використовуються для передачі руху зі змінним відношенням швидкостей, у приладобудуванні – для відтворення нелінійних функцій, у гідротехніці – для конструювання насосів, лічильників для вимірювання витрат тощо. У механізмі з некруглими зубчастими колесами залежність між кутами повороту ведучого й веденого коліс є нелінійною [4].

Порівнявши характеристики кулачкових механізмів та механізмів з некруглими зубчастими колесами, що використовують для відтворення функцій [1], можна прийти до висновку, що в умовах серійного виробництва коліс і кулачків точність відтворення функцій некруглими колесами є вищою, а відтворені некруглими колесами немонотонні функції є більш складними.

Галузь застосування некруглих зубчастих коліс залишається обмеженою внаслідок складності їх виготовлення за допомогою малоефективних способів нарізання зубців копіюванням або обкочуванням. Але більш прогресивним у цьому розумінні є геометричний метод вирізання зубців за координатами, в тому числі і на верстатах з числовим програмним керуванням [5]. Тому актуальною буде задача аналітичного опису центроїд некруглих зубчастих коліс.

Одним з основних завдань проектування некруглих зубчастих коліс є розрахунок їх центроїд – тобто кривих, що дотикаються одна до одної й перекочуються без ковзання при русі механізму. Крім того, центроїда ведучого колеса – це сукупність миттєвих центрів обертання в системі координат, жорстко пов'язаної з цим колесом. Теоретичні основи опису центроїд розглядалися, наприклад, в роботах Ф. Л. Литвина [4, 5], де наведено основні формули для розрахунку.

Некруглі зубчасті колеса зазвичай задаються [3]: кутом обертання ведучої шестерні  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ , кутом обертання веденої шестерні  $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ , міжцентровою відстанню  $a = const$ . Крім того, задається функція передачі обертання  $\Phi(t)$  та її похідна  $\eta(t) = \frac{d\Phi}{dt}$ .

Припустимо, що обертання ведучого колеса здійснюється з постійною (одичиною) швидкістю. Тоді кутові швидкості коліс визначаються формулами

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 = 1; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 = \eta(t). \quad (1)$$

Як вже зазначалось [1], некругла зубчаста передача призначена для перетворення обертового руху між деталями машин за заданою передавальною функцією  $\eta(t)$ , де  $t$  – час. Визначити передавальну функцію можна як відношення похідних

$$\eta(t) = \frac{d\varphi_2}{dt} / \frac{d\varphi_1}{dt}. \quad (2)$$

Водночас, передавальна функція для кожного фіксованого значення кута повороту  $\varphi_1$  ведучого колеса є відношенням миттєвих кутових швидкостей коліс в зачепленні. Тому з виразу

$$\eta = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}, \quad (3)$$

можна обчислити миттєві радіуси передачі:

$$R_1(t) = \frac{a \eta(t)}{1 + \eta(t)}; \quad R_2(t) = \frac{a}{1 + \eta(t)}. \quad (4)$$

Сума змінних радіусів  $R_1$  і  $R_2$  центроїд в точці дотику для випадку зовнішнього зачеплення дорівнюватиме:

$$R_1 + R_2 = a, \quad (5)$$

де  $a$  – постійна відстань між осями коліс.

Координати миттєвої точки контакту центроїд слід обчислювати за формулами [4]:

$$r_1 = [R \cos \Phi_1, R \sin \Phi_1]; \quad r_2 = [R \cos \Phi_2, R \sin \Phi_2], \quad (6)$$

де  $\Phi_1, \Phi_2$  – передавальні функції.

З використанням наведених формул завданням буде розробити алгоритм геометричного моделювання центроїд некруглих зубчастих коліс на основі їх аналітичного опису. Для цього залежно від передавальної функції  $\Phi(t)$  визначаємо змінні радіуси центроїд в точці їх контакту:

$$R_1 = \frac{a \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}; \quad R_2 = \frac{a}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}. \quad (7)$$

Координати миттєвої точки контакту центроїд

$$r_1 = \left[ \frac{a \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right) \cos(t)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}, \frac{a \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right) \sin(t)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)} \right]; \quad r_2 = \left[ \frac{a \cos(\Phi)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}, \frac{a \sin(\Phi)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)} \right]. \quad (8)$$

В результаті одержимо параметричні рівняння ведучого (9) та веденого (10) коліс:

$$x_1 = \frac{a \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right) \cos(t)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}; \quad y_1 = \frac{a \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right) \sin(t)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}; \quad (9)$$

$$x_2 = \frac{a \cos(\Phi)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}; \quad y_2 = \frac{a \sin(\Phi)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}. \quad (10)$$

В роботі одержано зображення пари центроїд некруглих коліс за їх параметричними рівняннями та побудовано фази сумісного обертання пари коліс, яка відповідає значенню параметра  $t$ .

Далі наведемо приклади зображень пари центроїд зубчастих коліс «нетрадиційної» форми залежно від вигляду передавальної функції  $\Phi(t)$ , яку описано формулою:

$$\Phi(t) = t + \left(\frac{1}{a} \cos \frac{nt}{4}\right)^{n_1} + \left(\frac{1}{b} \sin \frac{nt}{4}\right)^{n_2}. \quad (11)$$

На рис. 1 наведено приклади зображення графіків передавальної функції (11) залежно від параметрів.

На рис. 2 наведено зображення відповідних центроїд некруглих коліс залежно від параметрів передавальної функції  $\Phi(t)$ .

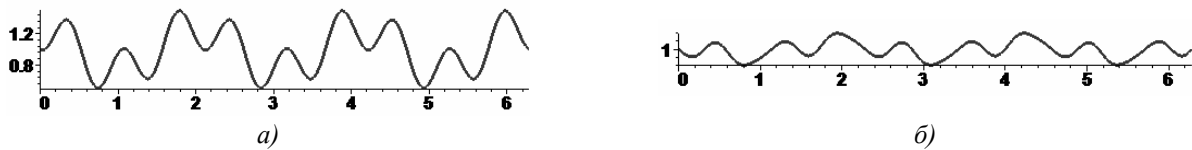


Рис. 1. Графіки передавальної функції  $\Phi(t)$  залежно від параметрів:

a) при  $a = 3,5$ ;  $b = 2$ ;  $n = 12$ ;  $n_1 = 3$ ;  $n_2 = 3$ ; б) при  $a = 3$ ;  $b = 2$ ;  $n = 11$ ;  $n_1 = 3$ ;  $n_2 = 5$

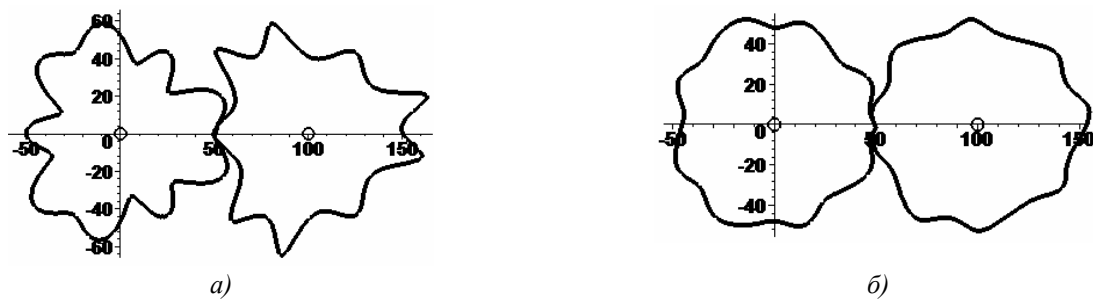


Рис. 2. Зображення пари центроїд залежно від параметрів:

a) при  $a = 3,5$ ;  $b = 2$ ;  $n = 12$ ;  $n_1 = 3$ ;  $n_2 = 3$ ; б) при  $a = 3$ ;  $b = 2$ ;  $n = 11$ ;  $n_1 = 3$ ;  $n_2 = 5$

У результаті виконання складеної в роботі програми одержано комп'ютерну анімацію руху пари центроїд зубчастих коліс нетрадиційної форми залежно від вигляду передавальної функції  $\Phi(t)$ . Це на графічному рівні доводить факт коректного аналітичного опису центроїд за передавальною функцією. Наведемо «кілька прикладів, які ілюструють зазначене.

Передавальна функція (11) при значенні параметрів  $a = 2$ ;  $b = 3$ ;  $n = 4$ ;  $n_1 = 2$ ;  $n_2 = 3$  набуває вигляду

$$\Phi(t) = t + \frac{1}{4} \cos(t)^2 + \frac{1}{27} \sin(t)^3. \quad (12)$$

Окремі кадри анімації сумісного обертання пари центроїд зубчастих коліс «нетрадиційної» форми для заданої передавальної функції  $\Phi(t)$  наведено на рис. 3.

При значенні параметрів  $a = 3$ ;  $b = 2$ ;  $n = 10$ ;  $n_1 = 2$ ;  $n_2 = 2$  передавальна функція (11) набуває вигляду

$$\Phi(t) = t + \frac{1}{9} \cos\left(\frac{5t}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{5t}{2}\right)^2. \quad (13)$$

Кадри анімації обертання центроїд для функції (13) наведено на рис. 4.

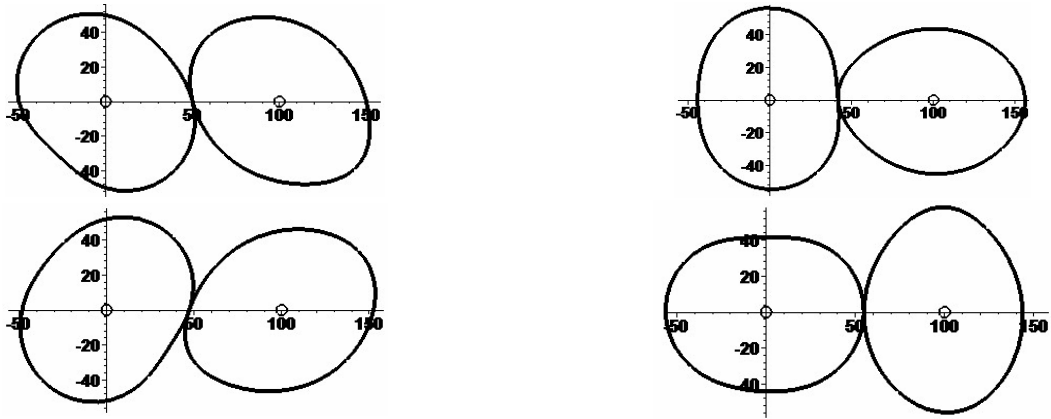


Рис. 3. Кадри анімації для передавальної функції (12)

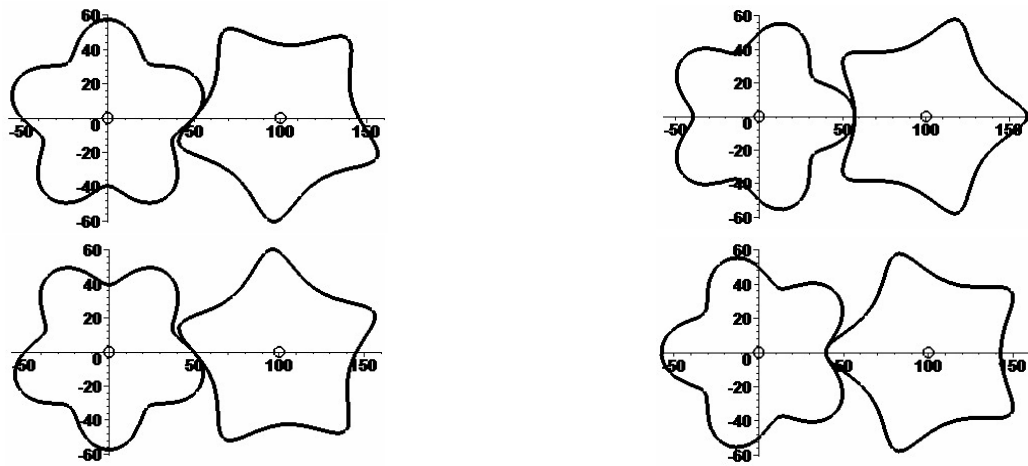


Рис. 4. Кадри анімації для передавальної функції (13)

Коректність запропонованого аналітичного опису центрівд некруглих зубчастих коліс підтверджує комп'ютерна анімація руху і для інших передавальних функцій  $\Phi(t)$ , відмінних від (11).

На рис. 5 наведено зображення кадрів анімації сумісного обертання пари центрівд для передавальної функції

$$\Phi(t) = 1 + t + \frac{1}{25} \sin(9t). \quad (14)$$

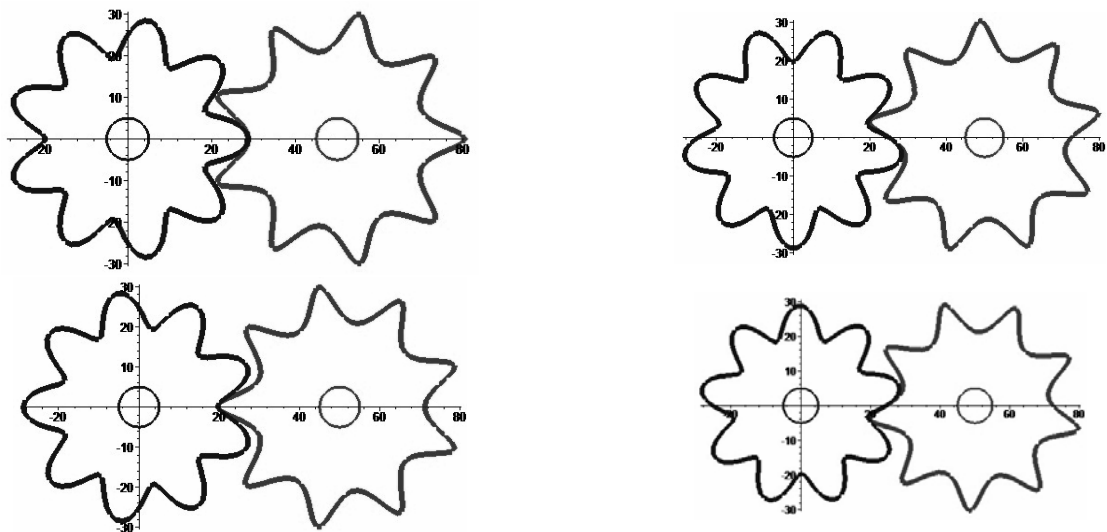


Рис. 5. Кадри анімації сумісного обертання пари центрівд для передавальної функції (14)

За результатами дослідження одержано аналітичний опис центроїд некруглих зубчастих коліс за їх передавальною функцією. Завдяки цьому можна визначати і аналізувати їх диференціальні характеристики в точці контакту. Одержані описи центроїд дозволяють створити математичне забезпечення алгоритмів технології виготовлення некруглих зубчастих коліс на верстатах з числовим програмним керуванням.

### Список використаних джерел

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. — М. : Наука, 1975. — 639 с.
2. Воронцова Д. В. Геометричне моделювання профілів роторно-планетарної машини, узгоджених із зубчастою передачею: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 Прикладна геометрія, інженерна графіка / Д. В. Воронцова. — К., 2008. — 18 с.
3. Легета Я. П. Опис та побудова спряжених центроїд некруглих зубчастих коліс / Я. П. Легета // Сучасні проблеми моделювання. — Мелітополь : МДПУ ім. Богдана Хмельницького, 2014. — Вип. 3. — С. 87—92.
4. Литвин Ф. Л. Некруглые зубчатые колеса / Ф. Л. Литвин. — М. : Машгиз, 1956. — 312 с.
5. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений / Ф. Л. Литвин. — М. : Наука, 1968. — 584 с.
6. Росоха С. В. Геометричне моделювання об'ємів робочих камер роторно-планетарних трохохідних машин / С. В. Росоха, Л. М. Куценко. — Харків : УЦЗУ, 2007. — 176 с.

**Yaroslav LEGETA**

Uzhhorod

**Olga SHOMAN**

Kharkiv

## GEOMETRIC MODELING OF CENTROID NONCIRCULAR GEARS BY TRANSFER FUNCTION

*There was the review of application of mechanisms with non-circular gears. Described the input parameters required for the calculation of the centroid pair. Constructed geometric models the centroid noncircular gears based on their analytical description of the transfer function. Examples of images the centroid pair of gears "unconventional" forms depending on the form of the transfer function.*

*Key words: geometric modeling, gears, analytical description, transfer function, centroids.*

**Ярослав ЛЕГЕТА**

г. Ужгород

**Ольга ШОМАН**

г. Харьков

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕНТРОИД НЕКРУГЛЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС ПО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

*Проведен обзор применений механизмов с некруглыми зубчатыми колесами. Описаны входные параметры, необходимые для расчета пары центроид. Построено геометрические модели центроид некруглых зубчатых колес на основании их аналитического описания по передаточной функции. Приведены примеры изображений пары центроид зубчатых колес "нетрадиционной" формы в зависимости от вида передаточной функции.*

*Ключевые слова: геометрическое моделирование, зубчатые колеса, аналитическое описание, передаточная функция, центроиды.*

Стаття надійшла до редколегії 30.09.2016