УДК 514.18

Анатолій ХОМЧЕНКО, Олена КРЕМЕНЧЕНКО, Єлизавета ЗАВАЛКО
м. Миколаїв
khan@kma.mk.ua, elena.krem.elena@gmail.com, asklepia2012@gmail.com

СТЕРЕОМЕТРІЯ ІЗОПАРАМЕТРИЧНИХ АПРОКСИМАЦІЙ: НЕСТАНДАРТНІ БАЗИСИ

У статті розглядаються ізопараметричні апроксимації на скінченному елементі в формі одиничного квадрата. Описаний геометричний спосіб конструювання нестандартних базисів елемента 3-го порядку (бікубічна інтерполяція). Обговорюються геометричні аспекти парадоксу Зенкевича – фізичної неадекватності спектру вузлових навантажень від одиничної масової сили. Особливий інтерес для метода скінченних елементів (МСЕ) представляє візуалізація покрокової процедури конструювання фінітних поверхонь вищих порядків із фрагментів площин та поверхонь другого порядку. Головна відмінність від стандартного (матричного) підходу полягає в тому, що інтерполяційний поліном містить прихований (невузловий) параметр, який дозволяє генерувати безліч нестандартних базисів. В цьому ключова ідея «м'якого» моделювання (по В. І. Арнольду).

Ключові слова: ізопараметричні апроксимації, бікубічна інтерполяція, скінченний елемент серендипового сімейства, «м'яке» моделювання, нестандартні базисні функції, «приховані» параметри, геометричний підхід, фізична невідповідність інтегральних середніх.

Відомо, що внутрішні вузли лагранжових скінченних елементів (СЕ) вищих порядків небажані, тому їх намагаються позбутись. Проте, усунення внутрішніх вузлів, як правило, фізичну неадекватність інтегральних характеристик базисних функцій. Вважається, що цей недолік усунути неможливо. Ми встановили, що ця омана є результатом недооцінення участі невузлових параметрів. Нагадаємо, що в рекомендованих процедурах конденсації (редукції) усунення внутрішніх вузлів супроводжується неминучим виключенням «внутрішніх» невузлових параметрів із схеми Паскаля. Ця помилка приводить до «жорсткої» математичної моделі. Проблема постає в створенні таких методів конструювання ізопараметричних СЕ, в яких внутрішні вузли вилучаються, а відповідні параметри (мономи) зберігаються. Один з таких методів описано нижче.

Найкраща апроксимація криволінійних границь розрахункової області досягається за допомогою криволінійних ізопараметричних СЕ [1]. Вперше такі елементи були використані Тейгом (1961 р.). Цю ідею узагальнили і розробили автори [2]. Пізніше Зенкевич і його колеги запропонували назвати ізопараметричні СЕ елементами серендипового сімейства. Перші базиси (їх називають стандартними) були отриманні на канонічному квадраті ($|x| \le 1,\ |y| \le 1$). В літературі по МСЕ переважує саме ця версія [3–5]. В 1977 р. в англійському варіанті книги [6] з'явились стандартні базиси першого, другого та третього порядків на одиничному квадраті ($0 \le x,\ \ y \le 1$).

До 1982 р. вважалося, що стандартні базиси є єдино можливими в ізопараметричних апроксимаціях, що підтверджувалось методом оберненої матриці, методом конденсації (Джордан, 1970), нематричним методом Тейлора (1972 р.).

Ймовірнісно-геометричний метод конструювання нестандартних базисів вперше опублікований в [7, 8]. Так виникла і почала стрімко розвиватися конструктивна теорія ізопараметричних апроксимацій. Ми не будемо зупинятися на ймовірнісному аспекті нового підходу, а просто покажемо, як геометрично зконструювати базис бікубічної ізопараметричної апроксимації.

Розглянемо одиничний квадрат (рис. 1), на границях якого виділено 12 рівномірно розташованих точок (x_i, y_i) і в кожній точці задано результат зміни функції f_i.

Інтерполяційний поліном зручно записати в формі Лагранжа:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{12} N_i(x, y) \cdot f_i\ , \tag{1}$$

де $N_i(x, y)$ – базисні функції, які мають наступні властивості:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \ne k; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{12} N_i(x, y) = 1. \tag{2}$$

Крім того, уздовж границі, що містить вузол *i,* функція $N_i(x, y)$ змінюється по закону бікубічної параболи (бікубічна інтерполяція).

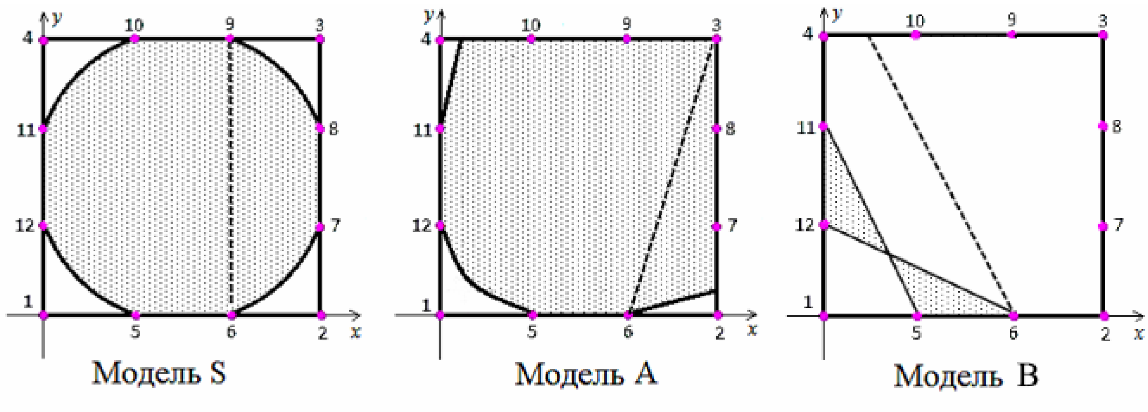

Рис. 1. Лінії нульового рівня поверхонь $N_1(x, y)$, для поверхонь $N_5(x, y)$ – пунктиром

Матричний метод, що панує в МСЕ, передбачає складання і рішення СЛАР з матрицею 12×12. В результаті ми отримаємо лише стандартний базис. Дві характерні функції стандартної моделі [6] виписані нижче:

$$N_1(x, y) = \frac{9}{2}(1-x)(1-y)\left(x^2 + y^2 - x - y + \frac{2}{9}\right); \tag{3}$$

$$N_5(x, y) = \frac{9x}{2}(1-x)(1-y)(2-3x). \tag{4}$$

На рис. 1 показано лінії нульового рівня поверхонь $N_1(x, y)$ для стандартної моделі S та альтернативних моделей A і B.

Щоб отримати альтернативну модель A, достатньо окружність, що проходить через всі проміжні вузли, замінити параболою, що проходить через вузли 5, 6, 11, 12.

Функції , що характерні моделі A мають вигляд:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2}(1-x)(1-y)(9(x-y)^2 - 9(x+y) + 2), \tag{5}$$

аналогічно $N_i(x, y), i = 2,3,4$;

$$N_5(x, y) = \frac{9x}{2}(1-x)(1-y)(2-3x+y), \tag{6}$$

аналогічно $N_i(x, y), i = 6,7,\ldots,12$.

Зауважимо, що на одиничному носію функції (5) і (6) побудовано вперше.

Щоб отримати альтернативну модель B, використаємо вві прямі, що перетинаються: 5-11 і 6-12. Характерні функції мають вигляд:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(6x+3y-2)(3x+6y-2), \tag{7}$$

аналогічно $N_i(x, y), i = 2,3,4$;

$$N_5(x, y) = -\frac{9x}{8}(1-x)(1-y)(12x+5y-8), \tag{8}$$

аналогічно $N_i(x, y), i = 6,7,\ldots,12$.

На одиничному носії функції (7) і (8) побудовано вперше.

Альтернативні моделі A і B принципово відрізняються від стандартної моделі S наявністю 13-го монома x^2y^2. Це «м'які» моделі [9]. «М'яких» моделей – безліч, навіть якщо обмежитись розглядом лише 13-параметричних інтерполянтів (1).

Для того, щоб оцінити можливості та особливості «м'якого» моделювання в задачах відновлення функцій двох змінних, виконаємо стереометричний аналіз поверхонь $N_i(x,\ y)$. Судячи за лініями нульового рівня (рис. 1), найбільш складний рельєф мають «кутові» поверхні.

Наприклад поверхня $N_1(x,\ y)$ стандартної моделі S утворюється «перемножуванням» двох площин $z_1^{(1)} = 1 - x,\ z_1^{(2)} = 1 - y$ і параболоїда обертання $z_1^{(3)} = \frac{9}{2}(x^2 + y^2 - x - y + \frac{2}{9})$. Кожна з цих поверхонь утворює з площиною носія двогранний кут 45º (клин). В результаті перемноження цих площин отримується фрагмент гіперболічного параболоїда (гіпара), який показано на рис. 2, *а*.

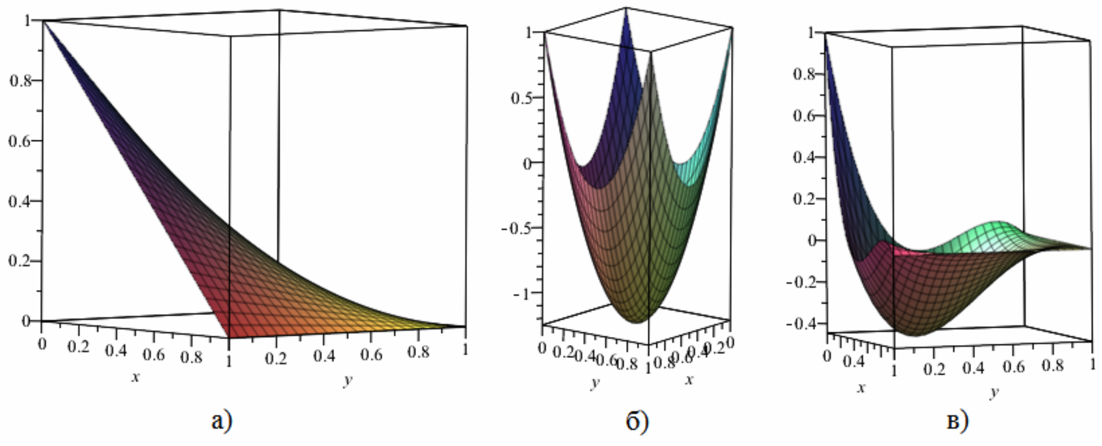

Рис. 2. Формоутворення «кутової» поверхні $N_1(x,\ y)$ стандартної моделі *S*

Зауважимо, що гіпар $z = (1 - x)(1 - y)$ є основним елементом формоутворення ізопараметричних поверхонь всіх порядків. Читач без труднощів виявить присутність гіпара в складі формул $N_1(x,\ y)$ і $N_5(x,\ y)$. На рис. 2, *б* показано фрагмент параболоїда обертання, який проходить через всі проміжні вузли носія і точку (0; 0; 1). Зрештою, на рис. 2, *в* показано результуючу поверхню $N_1(x,\ y)$, тобто добуток гіпара і параболоїда обертання. Поверхня $N_1(x,\ y)$ моделі A синтезується з двох фрагментів: гіпара $z = (1 - x)(1 - y)$ і «косого» параболічного циліндра $z = \frac{9}{2}((x - y)^2 - (x + y) + \frac{2}{9})$. Цю поверхню зображено на рис. 3, *а*.

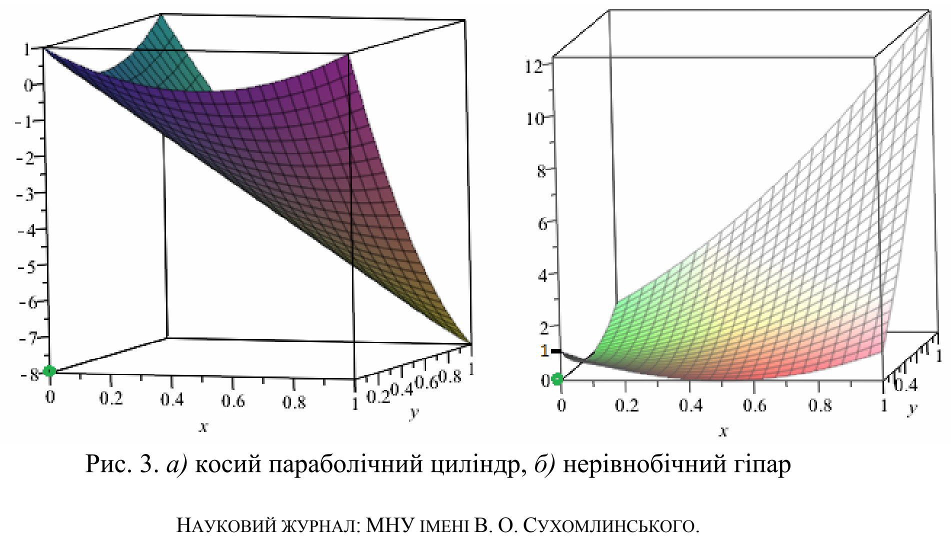

Рис. 3. *а)* косий параболічний циліндр, *б)* нерівнобічний гіпар

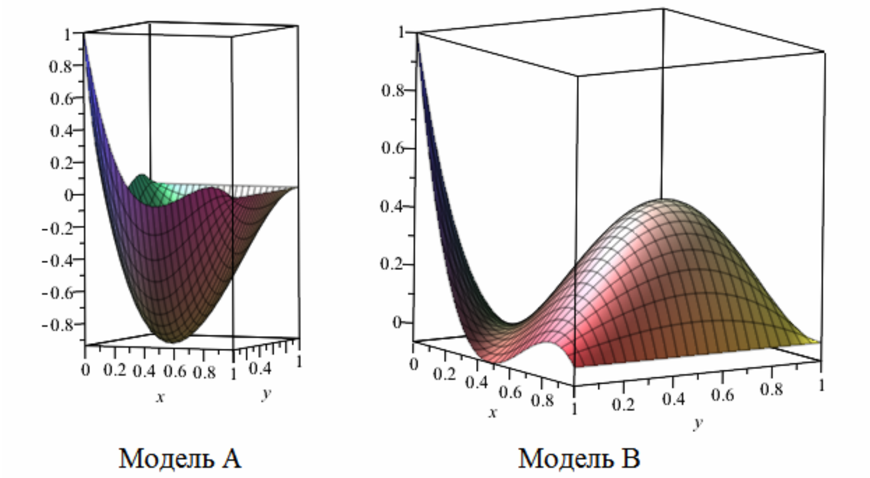

Рис. 4. «Кутові» поверхні $N_1(x, y)$ моделей A і B

Поверхня $N_1(x, y)$ моделі B синтезується з двох фрагментів: гіпара $z = (1 - x)(1 - y)$ і «нерівнобічного» гіпара $z = \frac{1}{4}(2 - 6x - 3y)(2 - 3x - 6y)$. Цю поверхню зображено на рис. 3, *б*. А результуючі поверхні моделей A і B показано на рис. 4.

Наші досліди з ізопараметричними базисами, які містять не більше 13-ти мономів, показали, що бікубічна поверхні $N_1(x, y)$ моделей A і B у певному сенсі екстремальні. Найменше значення середньої аплікати дорівнює $-\frac{3}{8}$ (модель A), а найбільше значення дорівнює $\frac{3}{16}$ (модель B).

Наявність нестандартних базисів ізопараметричних апроксимацій відкриває необмежені можливості для створення модельного ряду СЕ з наперед заданими інтегральними характеристиками. 3D зображення поверхонь підказує, як обрати «батьківську» пару і вагові коефіцієнти для конструювання «дочірньої» моделі. Це простий і надійний метод «м'якого» моделювання шляхом зваженого усереднення двох моделей (необов'язково «м'яких»). У перспективі цікаво побудувати бікубічний базис на елементі, в кутових вузлах якого сила «гравітаційного відштовхування» більше, ніж в моделі A.

Список використаних джерел

1. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. — М. : Мир, 1976. — 464 с.
2. Ergatoudis I. Curved isoperimetric «quadrilateral» elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz // Int. J. Solids Struct. — 1968. — 4. — P. 31—42.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич — М. : Мир, 1975. — 541 с.
4. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. — М. : Мир, 1981. — 304 с.
5. Akin J. E. Finite Element Analysis with Error Estimators / J. E. Akin. –Butterworth — Heinemann, 2005. — 477 p.
6. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. — М. : Мир, 1981 — 216 с.
7. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. — Ивано-Франковск, 1982. — 6 с. — № 1213.
8. Хомченко А. Н. Метод конечных элементов: стохастический подход / А. Н. Хомченко. — Ивано-Франковск: Ив.-Франк. ин-т нефти и газа, 1982. — 7 с. — № 5167.
9. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд — М. : МЦНМО, 2008. — 32 с.

Анатолий ХОМЧЕНКО, Елена КРЕМЕНЧЕНКО, Елизавета ЗАВАЛКО
г. Николаев

СТЕРЕОМЕТРИЯ ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ: НЕСТАНДАРТНЫЕ БАЗИСЫ

В статье рассматриваются изопараметрические аппроксимации на конечном носителе в форме единичного квадрата. Описан геометрический способ конструирования нестандартных базисов элемента 3-го порядка (бикубическая интерполяция). Обсуждаются геометрические аспекты парадокса Зенкевича – физической неадекватно-

сти спектра узловых нагрузок от единичной массовой силы. Особый интерес для метода конечных элементов (МКЭ) представляет визуализация пошаговой процедуры конструирования финитных поверхностей высших порядков из фрагментов плоскостей и поверхностей второго порядка. Главное отличие от стандартного (матричного) подхода заключается в том, что интерполяционный полином содержит скрытый (неузловой) параметр, позволяющий генерировать множество нестандартных базисов. В этом ключевая идея «мягкого» моделирования (по В. И. Арнольду).

Ключевые слова: изопараметрические аппроксимации, бикубическая интерполяция, конечный элемент серендипового семейства, «мягкое» моделирование, нестандартные базисные функции, «скрытые» параметры, геометрический подход, физическое несоответствие интегральных средних.

Anatoly KHOMCHENKO, Elena KREMENCHENKO, Elizaveta ZAVALKO
Mykolaiv

STEREOMETRY OF ISOPARAMETRIC APPROXIMATIONS: NONSTANDARD BASES

The article considers isoparametric finite element approximation in the form of the unit square. Geometric method of constructing a nonstandard basis element of the third order (bicubic interpolation) is described. We discuss the geometric aspects of the Zienkiewicz paradox – physical inadequacy spectrum of nodal loads from the unit mass force. Particular interest to the finite element method (FEM) is a turn-based visualization of the procedure of constructing finite surfaces higher orders of fragments of planes and the second order surfaces. The main difference of the standard (matrix) approach is that the interpolation polynomial contains a hidden (nonnodal) option that lets you generate a lot of non-standard bases. This is the key idea of "soft" modeling (by V. I. Arnold).

Key words: isoparametric approximation, bicubic interpolation, the finite element of serendipity family, "soft" modeling, non-standard basis functions, "hidden" parameters, geometric approach, physical mismatch of integral averages.

Стаття надійшла до редколегії 05.10.2016