УДК 004.896

Олена БІДНІЧЕНКО
м. Миколаїв
bidnichenko@rambler.ru

ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДУ *N*-ВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ

У статті подано матеріал щодо формування деяких геометричних об'єктів кінематичним способом. Проведено аналіз формул складу тіл шляхом декомпозиції їх на простіші геометричні образи. Отримано формули складу для нуль-, одно-, дво- та тривимірного об'єктів, проведено узагальнення для чотиривимірного простору, наведено формулу для n-вимірних просторів.

Ключові слова: багатовимірні простори, точка, відрізок, багатокутник, багатогранник, чотиривимірний куб, формули складу.

Багатовимірні простори – це об'єкт дослідження геометричної науки. Але зустрітися з питаннями, що пов'язані з ними, можливо в багатьох галузях науки і техніки: у фізиці та механіці; у термодинаміці; у фізичній хімії; у теоретичній фізиці тощо. У Росії на початку 19 століття у напрямах математики, фізики, механіки з'явились роботи Андрєєва, Власова, Гулака, Граве щодо розглядання багатовимірних просторів. Курс розроблявся у тісному зв'язку з лінійною алгеброю, тому багато фактів цієї багатовимірної геометрії можна знайти у курсах та задачниках з вищої алгебри. На початку 20 сторіччя стає актуальним питання про зображення на кресленнях об'єктів, які мають більше трьох вимірів, наприклад, і області фізико-хімічного аналізу при побудові діаграм багатокомпонентних систем [3]. На сучасному етапі найбільш відомі роботи вчених таких як П. В. Гордєвський [1], П. В. Філіппов [4], І. В. Прокофьєва [2]. та інші, які продовжують розробку теорії багатовимірних просторів з використанням різних розділів математичного апарату: аналітичної геометрії, алгебраїчної теорії лінійних рівнянь, векторній алгебри тощо.

Існують різні способи представлення багатовимірних просторів. У роботах з нарисної геометрії пропонується низка способів побудови креслень багатовимірних об'єктів на основі проекційного апарату.

Дана робота присвячена дослідженню метода кінематичного утворення тіл та виведення формул складу геометричних образів для просторів різної розмірності.

Тому доцільно розглянути деякі наочні геометричні особливості теорії багатовимірних просторів, в який прийняті такі позначення: K^0 – точка, K^1 – відрізок, K^2 – багатокутник, K^3 – багатогранник. Верхній індекс означає степінь розмірності одиниць, в яких вимірюється геометричний об'єкт. Тобто це є показник розмірності (числа вимірювань) геометричного образа.

Для наочного уявлення про багатовимірні об'єкти та виведення формули їх складу розглянемо кінематичний спосіб утворення, який полягає у розділенні тіла на примітивні геометричні образи та переміщенні їх у просторі.

Для формування кінематичним способом відрізка (одновимірного об'єкта) через будь-яку точку O простору проведемо пряму OX_1 (рис. 1). Точка K^0, виходячи з точки O, переміщується вздовж прямої OX_1 та пройде відрізок OK_1 довжиною a. Позначимо цей відрізок символом K^1. Тоді можна сказати, що повний відрізок складається із двох точок $O{=}K_0{}^0$ (початкового) і $A_1{=}K_1{}^0$ (кінцевого) положень рухомої точки K^0 та множини точок K^1, що розташовані між цими двома. Формула складу «заметенного» відрізка має вигляд: $\ddot{K}^1 = K^1 + 2 \cdot K^0$ (відкритий відрізок та 2 його кінця – точки).

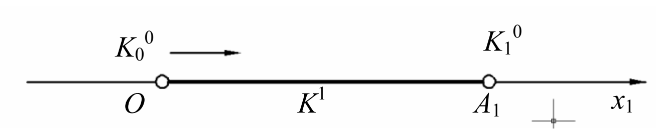

Рис. 1. Схема формування відрізка шляхом переміщення точки K^0

Для отримання площини (двовимірного об'єкта) проведемо через точку O ще одну пряму OX_2, перпендикулярну до прямої OX_1 (рис. 2). Тоді рухомий замкнений відрізок $\overline{K}^1$ довжини a поступово переміщується в напрямі осі OX_2 та при цьому збігаючись у початковому положенні з відрізком OA_1, який позначимо через $\overline{K}_0^1$. Рухомий відрізок $\overline{K}^1$, який переміщується на відстань, що також дорівнює a, займе положення $\overline{K}_1^1 = A_2A_{12}$. Кожна точка рухомого відрізку опише при русі відрізок довжиною a та перпендикулярний до осі OX_1, а весь відрізок $\overline{K}^1$ «заметений» замкнений квадрат $OA_1A_{12}A_2$ в площині OX_1X_2. Позначимо цей квадрат через $\overline{K}^2$. Формула складу замкненого квадрату буде такою: $\overline{K}^2 = K^2 + 4 \cdot K^1 + 4 \cdot K^0$ (відкритий квадрат, 4 відрізка – сторони та 4 вершини – точки).

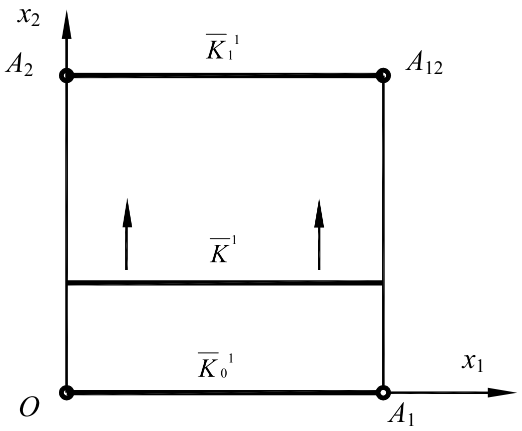

Рис. 2. Формування квадратного відсіку площини

Тривимірний об'єкт (куб) може бути отриманий за попереднім алгоритмом – шляхом переміщення отриманого раніше квадрата $\overline{K}_0^2$ вздовж третьої осі OX_3, яка перпендикулярна до площини OX_1X_2 (рис. 3), на відрізок, довжина якого дорівнює a. Кінцеве положення квадрата буде $\overline{K}_1^2 = A_3A_{13}A_{103}A_{23}$. Розділивши отриманий куб на дрібніші геометричні образи отримаємо таку формулу складу куба: $\overline{K}^3 = K^3 + 6 \cdot K^2 + 12 \cdot K^1 + 8 \cdot K^0$, тобто замкнений куб містить в собі відкритий куб, 6 відкритих квадратів (граней), 12 відкритих відрізків (ребер) та 8 точок (вершин), що є одночасно кінцями відрізків та вершинами куба.

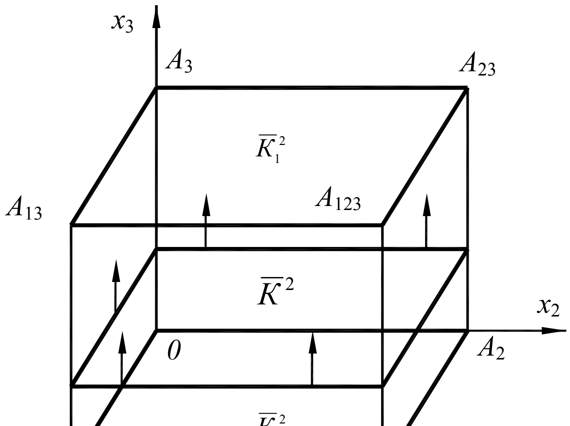

Рис. 3. Формування куба

Склад кожного із розглянутих образів було отримано прямим підрахунком числа елементів та їх границь. Знайдемо формули складу виходячи із кінематичного способу утворення тіл.

За аналогією з обчисленням об'єму куба, який дорівнює добутку площі основи на висоту, проведемо добуток квадрату K^2, який лежить у основі, на довжину відрізка K^1, що описує кожна точка при переміщенні: $\overline{K}^3 = \overline{K}^2 \cdot \overline{K}^1$.

Якщо використати алгебраїчні правила, то $\overline{K}^2 \cdot \overline{K}^1 = \overline{K}^{2+1} = \overline{K^3}$, що і потрібно було довести. Можна показати, що якщо підставити в цей вираз формули складу квадрата та відрізка, то після перемноження получимо формулу складу куба, що отримано підрахунком та наведено вище.

Виходячи з цього для отримання формули складу квадрату помножимо рухомий відрізок K^1 на відрізок K^1, який опише кожна точка при переміщенні: $\overline{K}^2 = \overline{K}^1 \cdot \overline{K}^1 = \left(\overline{K}^1\right)^2$. Підставляємо цей вираз у попередню формулу, та отримаємо: $\overline{K}^3 = \left(\overline{K}^1\right)^2 \overline{K}^1 = \left(\overline{K}^1\right)^3$.

Підставимо в отримані вирази формули складу елементів. Для куба: $\overline{K}^3 = \overline{K}^2 \cdot \overline{K}^1 = \left(K^2 + 4K^1 + 4K^0\right)\left(K^1 + 2K^0\right) = K^3 + 6K^2 + 12K^1 + 8K^2$.

Для квадрата: $\overline{K}^2 = \overline{K}^1 \cdot \overline{K}^1 = \left(\overline{K}^1\right)^2 = \left(K^1 + 2K^0\right)^2 = K^2 + 4K^1 + 4K^0$.

За аналогією отримаємо формулу для відрізка:

$$\overline{K}^1 = \overline{K}^0 \cdot \overline{K}^1 = K^0\left(K^1 + 2K^0\right) = K^1 + 2K^0.$$

Потрібно зазначити, що добуток на K^0 рівнозначний добутку на 1.

Виходячи із вище викладеного зробимо узагальнення. Склад побудованого образу є добуток складу рухомого об’єкта на склад відрізка, який опише кожна точка рухомого геометричного об’єкта. Всі формули можуть бути представлені у такому вигляді:

$$\overline{K}^0 = \left(\overline{K}^1\right)^0 = K^0;\ \overline{K}^1 = \left(\overline{K}^1\right)^1 = K^1 + 2K^0;$$

$$\overline{K}^2 = \left(\overline{K}^1\right)^2 = \left(K^1 + 2K^0\right)^2;\ \overline{K}^3 = \left(\overline{K}^1\right)^3 = \left(K^1 + 2K^0\right)^3.$$

Проведемо аналогію для чотиривимірного простору. Абстрактно приймаємо, що існує пряма OX_4, яка перпендикулярна до простору $OX_1X_2X_3$.

По аналогії до утворення тривимірного кубу візьмемо куб $\overline{K}^3$ з довжиною ребра a та будемо переміщувати його поступово в напрямі осі OX_4 із положення $\overline{K}_0^3$ до положення $\overline{K}_1^3$ таким чином, щоб кожна точка рухомого куба $\overline{K}^3$ під час його руху замітала відрізок довжиною a, який паралельний осі OX_4. Куб $\overline{K}^3$ замете при цьому чотиривимірне тіло $\overline{K}^4$, яке називають чотиривимірним кубом або тессерактом. Тіло, отримане таким чином, зображено на рис. 4 в звичній для нас паралельній проекції.

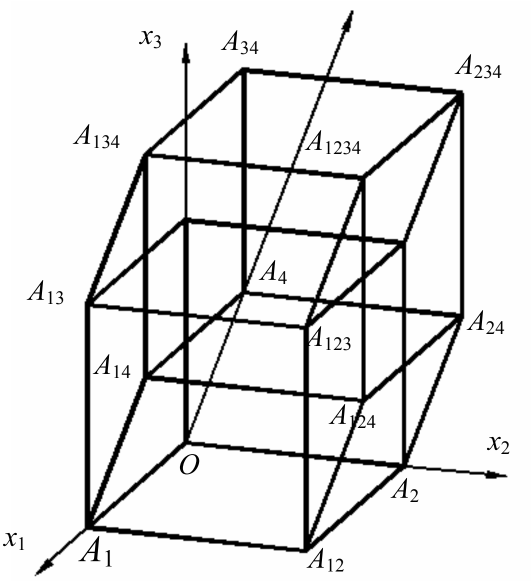

Рис. 4. Наочне зображення чотиривимірного куба

Формула складу такого куба виводиться за аналогією до тривимірного куба та має такий вигляд:

$$\overline{K}^4 = \overline{K}^3 \cdot \overline{K}^1 = \left(\overline{K}^1\right)^3 \cdot \overline{K}^1 = \left(\overline{K}^1\right)^4 = \left(K^1 + 2 \cdot K^0\right)^4.$$

Розкривши дужки отримаємо:

$$\overline{K}^4 = K^4 + 8 \cdot K^3 + 24 \cdot K^2 + 32 \cdot K^1 + 16 \cdot K^0,$$

тобто чотиривимірний куб складається із відкритого куба, 8 відкритих тривимірних кубів, 24 відкритих граней, 32 відкритих ребер та 16 точок або вершин.

Якщо зробити узагальнення, то можна стверджувати, що склад побудованого таким чином геометричного образа уявляє собою добуток складу рухомого геометричного образа на склад відрізка, який замете кожна точка рухомого образа.

Отримані дані щодо формул складу наведених геометричних образів зведено в табл. 1.

Таблиця 1

Кількісний склад геометричних об’єктів

	Вершини	Ребра	Грані	Куб	Тессеракт-грань
Точка	1				
Відрізок	2	1			
Квадрат	4	4	1		
Куб	8	12	6	1	
Тессеракт 4-D	16	32	24	8	1

Наведені вище рисунки зображують три- та чотиривимірний куби у паралельній проекції. Розглянемо центральну проекцію тривимірного кубу з центром у точці S, що лежить поза ним, та отримаємо проекцію куба на його грань. Таким же чином можна отримати центральну проекцію чотиривимірного кубу. Наочне уявлення описаних центральних проекцій можна представити як три двовимірні площини (рис. 5 *а*), що розташовані на відстані, яка дорівнює стороні куба. Схематично показано, що у верхній площині знаходиться спостерігач, в другий і третій – однакові квадрати, що є

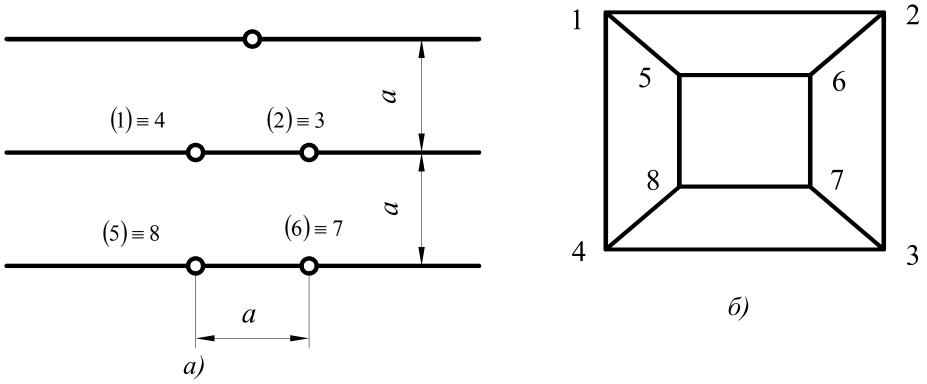

Рис. 5. Проекція тривимірного куба на його грань

гранями куба. Тоді спостерігач бачить картинку, як на рис. 5 *б*, де квадрати уявляються різними за величиною у зв'язку з віддаленістю від спостерігача.

Для чотиривимірного куба можна провести аналогію, тільки в площинах будуть розташовані не квадрати, а куби. Та спостерігач бачить центральну проекцію чотиривимірного куба на його тривимірну грань (рис. 6).

Такі ж побудови можна узагальнити на простори вищого числа вимірів та побудувати абстрактно n-вимірний куб. Склад такого n-вимірного замкненого кубу буде обчислятися за формулою [1]: $\overline{K}^n = \left(\overline{K}^1\right)^n = \left(K^1 + 2 \cdot K^0\right)^n$. Якщо розкрити дужки та виконати необхідні перетворення, то отримаємо:

$$\overline{K}^n = K^n + 2 \cdot C_n^1 K^{n-1} + 2^n C_n^2 K^{n-2} + \ldots + 2^{n-2} C_n^{n-2} K^2 + 2^{n-1} C_n^{n-1} K^1 + 2^n K^0 .$$

Перетворення дозволить отримати: $\overline{K}^n = \sum_{s=0}^{n} 2^s \cdot C_n^s \cdot K^{n-s}$, де $s = 0, 1, 2, ..., n$; C_n^s – біноміальні коефіцієнти, тобто

$$C_n^s = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-s+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot s}; \; C_n^0 = 1 .$$

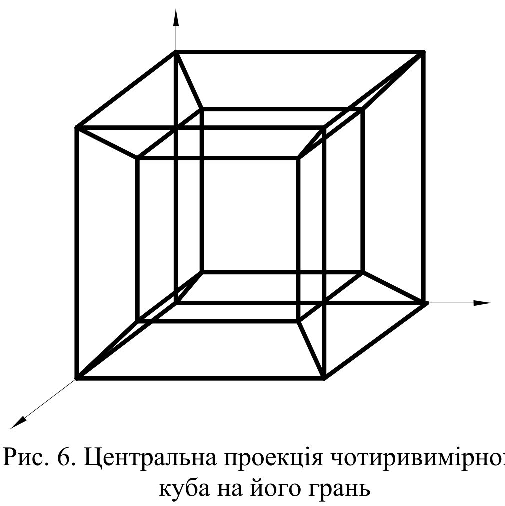

Рис. 6. Центральна проекція чотиривимірного куба на його грань

Таким чином у складі n-вимірного замкненого кубу існують 2^m вершин, $2^{n-1} C_n^1 = n \cdot 2^{n-1}$ ребер, $2^{n-2} C_n^2 = 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ квадратних граней, $2^{n-3} C_n^3 = 2^{n-3} \frac{n(n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ тривимірних кубічних граней $\overline{K}^3$ тощо, і, нарешті, $2n$ граней, що уявляють собою (n-1) вимірні куби $\overline{K}^{m-1}$. Всі грані $\overline{K}^m$, які мають однакові розмірності, рівні між собою.

Таким чином, представлений метод утворення об'єктів різної розмірності кінематичним способом дає змогу наочно уявити багатовимірні тілата провести математичну аналогію длявизначення їх складових примітивів. Дослідження формул складу елементів для геометричних образів із просторів низьких розмірностей дали змогу зробити узагальнення та отримати формулу складу для елементів *n*-вимірних кубів.

Список використаних джерел

1. Гордевский Д. З. Популярное введение в многомерную геометрию / Д. З. Гордевский, А. С. Лейбин. — Харьков : ХАУ, 1964. — 193 с.
2. Прокофьева И. Г. Начертательная геометрия – трехметная и многомерная / И. Г. Прокофьева, С. Г. Демидов // Universum: технические науки. — Вып. № 3–4 (25). — 2016.
3. Федоров Е. С. Графические операции с четырьмя независимыми переменными // Изв. Российск. Акад. Наук. Сер. 4. — 1918. — № 7. — С. 615—624.
4. Филиппов П. В. Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения. — Л., 1979. — 280 с.

Elena BIDNICHENKO
Nikolaev

THE RESEARCH OF THE *N*-DIMENSIONAL GEOMETRIC IMAGES

The article presents materials on the formation of some geometric objects by kinematic method. The analysis of the formulaof the constituent elements by decomposing them into simpler geometrical images.The formulas for the composition of zero-, one-, two-, three- and four-dimensional objects, the synthesis of four-dimensional space is carried out, the formula for n-dimensional spacesis shown.

Key words: multidimensional space, point, line, polygon, polyhedron, a four-dimensional cube, constituent elements formula.

Елена БИДНИЧЕНКО
г. Николаев

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТАВА *N*-МЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

В статье представлены материалы по формированию некоторых геометрических объектов кинематическим способом. Проведен анализ формул состава тел путем декомпозиции их на более простые геометрические образы. Получены формулы состава для ноль-, одно-, двух-, трех- и четырехмерных объектов, проведено обобщение для четырехмерного пространства, приведена формула для n-мерных пространств.

Ключевые слова: многомерные пространства, точка, отрезок, многоугольник, многогранник, четырехмерный куб, формулы состава.

Стаття надійшла до редколегії 3.10.2016